Московский Государственный Университет имени М. В. Ломоносова
Механико-математический факультет

На правах рукописи
УДК 517

Кудряшов Юрий Георгиевич

КОСТЛЯВЫЕ АТТРАКТОРЫ И МАГИЧЕСКИЕ БИЛЬЯРДЫ

01.01.02 — Дифференциальные уравнения,
динамические системы и оптимальное управление

Автореферат
диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Москва, 2011

Работа выполнена на кафедре дифференциальных уравнений
Механико-математического факультета
Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова.

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук профессор Ильяшенко Юлий Сергеевич
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук профессор Закалюкин Владимир Михайлович
	кандидат физико-математических наук Голенищева-Кутузова Татьяна Игоревна
Ведущая организация:	Математический институт им. В. А. Стеклова РАН

Защита диссертации состоится 20 мая 2011 г. в 16 часов 40 минут на заседании диссертационного совета Д 501.001.85 при Московском государственном университете имени М. В. Ломоносова по адресу: 119991, ГСП-1, Москва, Ленинские горы, МГУ, механико-математический факультет, ауд. 16-24.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Механико-математического факультета МГУ (Главное здание, 14 этаж).

Автореферат разослан 19 апреля 2011 г.

Учёный секретарь диссертационного
совета Д 501.001.85 при МГУ,
доктор физико-математических наук,
профессор В. Н. Сорокин

Общая характеристика работы

Актуальность темы

Работа посвящена исследованию аттракторов и периодических траекторий динамических систем. Оба объекта являются важными характеристиками динамической системы и тесно связаны между собой.

Неформально говоря, *аттрактор* динамической системы — это подмножество фазового пространства, к которому стремятся орбиты всех (или почти всех) точек фазового пространства. Одна из основных проблем теории динамических систем — исследовать возможные типы аттракторов типичных динамических систем. Эта проблема естественным образом распадается на два вопроса.

- Какую структуру может иметь аттрактор (одной) динамической системы?
- Какие свойства аттрактора могут быть выполнены для достаточно большого класса динамических систем (например, для открытого множества в пространстве всех диффеоморфизмов)?

Широко известны примеры локально типичных динамических систем, аттракторы которых — гладкие многообразия (например, произведение диффеоморфизма Аносова на сжатие в трансверсальном направлении), или устроены локально как прямые произведения множества Кантора на гладкое многообразие (например, соленоид Смейла–Вильямса), или же устроены локально как канторова книжка (аттрактор Лоренца). **Первая глава** диссертации посвящена построению открытого множества динамических систем, аттрактор каждой из которых имеет другую локальную структуру.

Есть несколько различных формализаций понятия аттрактора. В работе используется определение, предложенное Джоном Милнором[1].

---

1 *Milnor, J.* On the Concept of Attractor // *Commun. Math. Phys.* — **99** (1985) — pp. 177–195

Определение 1 Пусть X — полное метрическое пространство с мерой μ, $F\colon X \to X$ — непрерывное отображение, сохраняющее класс меры μ. *Аттрактор Милнора* отображения F — это наименьшее замкнутое множество $A_M \subset X$, такое что для μ-почти всех точек $x \in X$ расстояние $d(A_M, F^n(x))$ стремится к нулю при $n \to +\infty$.

В 2000 году Ю. С. Ильяшенко и А. С. Городецкий предложили[2] стратегию, позволяющую обнаруживать новые эффекты в пространстве динамических систем, если эти эффекты уже обнаружены в пространстве *случайных* динамических систем. Эта стратегия уже была использована в нескольких работах[3 4 5]. В 2010 году Ю. С. Ильяшенко и А. Негут получили результат[6], существенно расширяющий круг применения этой стратегии. Стратегия Ильяшенко–Городецкого–Негута описана в пункте автореферата «Краткое содержание диссертации».

В **первой главе** данной диссертации при помощи стратегии Ильяшенко–Городецкого–Негута построено открытое множество в пространстве диффеоморфизмов трёхмерного тора, такое что аттрактор каждого из диффеоморфизмов этого множества имеет новый тип геометрической структуры. Аттракторы такого вида названы *костлявыми*, или *костистыми*. Таким образом, результат работы является продвижением в решении одного из основных вопросов теории динамических систем.

Вторая глава диссертации посвящена периодическим траекториям в математических бильярдах на плоскости с кусочно-гладкой границей. Математический бильярд — это динамическая система, описывающая

---

2 *Городецкий, А. С.* Некоторые свойства косых произведений над подковой и соленоидом / А. С. Городецкий, Ю. С. Ильяшенко // *Тр. МИАН* — **231** (2000) — 96–118

3 *Yu. Ilyashenko* Openness of the set of boundary preserving maps of an annulus with intermingled attracting basins / Yu. Ilyashenko, V. Kleptsyn, P. Saltykov // *Journal of Fixed Point Theory and Applications* — **3** (2000) — 449–463

4 *В. А. Клепцын* Сближение орбит в случайных динамических системах на окружности / В. А. Клепцын, М. Б. Нальский // *Функц. анализ и его прил.*, **38**:4 (2004), 36–54

5 *А. В. Осипов* Неплотность орбитального свойства отслеживания относительно C^1-топологии // *Алгебра и анализ*, **22**:2 (2010), 127–163

6 *Negut A.* Hölder properties of perturbed skew products and Fubini regained / Negut A., Ilyashenko Yu. // *Arxiv.org*, http://arxiv.org/abs/1005.0173

движение «идеального» точечного шара на плоском бильярдном столе; граница бильярдного стола может быть произвольной кусочно-гладкой кривой. Шар движется по отрезку прямой внутри бильярдного стола, и отражается от границ бильярда по стандартному закону: угол падения равен углу отражения.

Хотя математические бильярды — очень специальный класс динамических систем, они возникают как естественные модели в различных прикладных задачах. Например, в комнате с зеркальными стенами, потолком и полом луч света будет двигаться вдоль траекторий математического бильярда. Другая известная модель, приводящая к математическому бильярду — модель идеального газа Больцмана: движение N шаров, соударяющихся абсолютно упруго, описывается бильярдной траекторией в некоторой области в пространстве $\mathbb{R}^{3N}$.

В 1980 году В. Я. Иврий в связи с исследованием спектра оператора Лапласа сформулировал следующую гипотезу.

Гипотеза 2 (В. Я. Иврий, 1980) *Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ — область с бесконечно гладкой границей. Тогда множество периодических траекторий соответствующего бильярда имеет меру нуль в пространстве всех траекторий этого бильярда.*

Очевидно, утверждение гипотезы Иврия следует из того, что для каждого $k \in \mathbb{N}$ множество k-угольных траекторий имеет меру нуль. Для $k = 2$ это утверждение тривиально. Для $k = 3$ оно было доказано М. Р. Рыхликом[7] для бильярдов на плоскости. Позже Я. Б. Воробец обобщил[8] этот результат на случай многомерных бильярдов. За последующие 15 лет было анонсировано несколько неправильных доказательств гипотезы Иврия, но даже случай $k = 4$ не был доказан.

Во второй главе диссертации утверждение гипотезы Иврия доказано для $k = 4$, $N = 2$, то есть для четырёхугольных периодических орбит

---

7 *Rychlik, M. R.* Periodic points of the billiard ball map in a convex domain // *J. Diff. Geom.* — **30** (1989) — pp. 191–205.

8 *Vorobets, Ya. B.* On the measure of the set of periodic points of a billiard // *Math. Notes* — **55** (1994) — pp. 455–460

в плоском бильярде. Этот результат получен совместно с А. Глуцюком. Кроме того, в той же главе диссертации показано, что в гипотезе Иврия достаточно рассматривать бильярды с кусочно-аналитической границей. Этот результат, а также метод, разработанный при доказательстве первого результата, могут быть применены при рассмотрении других случаев в гипотезе Иврия.

Таким образом, исследования, проведённые в работе, открывают новый тип геометрической структуры аттракторов типичных динамических систем, а также являются важным шагом в доказательстве гипотезы Иврия о периодических орбитах в математических бильярдах. Это обстоятельство относит диссертацию к кругу актуальных исследований по теории динамических систем.

Цель работы

Целью работы является построение нового типа аттракторов типичных динамических систем и всестороннее изучение аттракторов нового типа: исследование их геометрической структуры, получение оценок хаусдорфовой размерности таких аттракторов; а также исследование возможной структуры множества периодических траекторий динамических бильярдов.

Методы исследования

В работе применяются различные методы теории динамических систем и качественной теории дифференциальных уравнений. Существенную роль в исследовании играет теория частично гиперболических отображений и косых произведений над гиперболическими диффеоморфизмами. При этом используется стратегия Городецкого–Ильяшенко–Негута, в основе которой лежит глубокая связь между теорией косых произведений над сдвигом Маркова, с одной стороны, и теорией частично гиперболических отображений, с другой стороны. Ключевыми результатами, на которые опирается стратегия Городецкого–Ильяшенко–Негута, являются теоремы Хирша–Пью–Шуба[9], Городецкого–Ильяшенко[2] и Ильяшенко–Негута[6]. Во второй главе используется теория пфаффовых форм, а именно теорема Картана–Рашевского–Курaниси, и теория аналитических функций.

Научная новизна работы

Все результаты работы являются новыми, и заключаются в следующем.

1. Построено открытое множество в пространстве динамических систем на трёхмерном торе, такое что аттрактор каждой системы этого множества имеет новый тип геометрической структуры, и подробно изучены свойства таких аттракторов. Аттракторы этого типа названы *костлявыми*.
2. Доказано, что при доказательстве гипотезы Иврия о том, что множество периодических орбит бильярда имеет меру нуль, достаточно ограничиться случаем бильярда с кусочно–аналитической границей.
3. Доказано, что в любом бильярде на плоскости с достаточно гладкой границей множество четырёхугольных периодических орбит имеет меру нуль.

Теоретическая и практическая ценность

Работа носит теоретический характер. Полученные результаты и техника, разработанная в диссертации, могут быть полезны специалистам по теории динамических систем и теории дифференциальных уравнений. В работе обнаружен новый тип геометрической структуры аттрактора типичной динамической системы и исследованы свойства такого

[9] *Hirsch M.* Invariant manifolds / Hirsch M., Pugh C., Shub M. // *Lecture Notes in Math.*, **583** (1977)

аттрактора. Кроме того, гипотеза В. Я. Иврия о периодических орбитах бильярда сведена к частному случаю кусочно-аналитической границы, а затем доказана для случая четырёхугольных периодических орбит. Методы, применённые для получения этого результата, открывают новый геометрический подход к гипотезе Иврия.

Апробация работы

Основные результаты диссертации докладывались автором на следующих семинарах и конференциях:

1. семинар механико-математического факультета МГУ им М. В. Ломоносова «Динамические системы» под руководством профессора Ю. С. Ильяшенко (неоднократно, 2007–2010).
2. международная конференция «Топология, геометрия и динамика», посвящённая памяти В. А. Рохлина (Санкт-Петербург, 11–16 января 2010).
3. общий семинар математической лаборатории Высшей Нормальной Школы города Лиона «Sém'In» UMPA ÉNS Lyon, (Лион, Франция, февраль 2010).
4. семинар отдела дифференциальных уравнений МИАН им. Стеклова под руководством академика РАН Д. В. Аносова (март 2010).
5. международная конференция «Séminaire Atlantique de Géometrie Ergodique» («Атлантический семинар по эргодической геометрии»), (Бильбао, Испания, май 2010).
6. международная конференция «Algebraic Methods in Dynamical Systems» («Алгебраические методы в динамических системах»), посвящённая 60-летию M. Singer (Познань, Польша, май 2010).
7. международная миниконференции «Качественная теория дифференциальных уравнений и приложения» (Москва, МЭСИ, июнь 2010).

Публикации

Результаты диссерации опубликованы в трёх работах автора [1–3].

Структура и объём работы

Диссертация содержит введение, две главы и список литературы. Обе главы разделены на параграфы; первая глава состоит из девяти параграфов, вторая — из четырёх. Список литературы содержит 26 наименований. Объем диссертации — 103 страницы.

Краткое содержание диссертации

Диссертация посвящена исследованию аттракторов и периодических орбит динамических систем.

Во введении изложена история проблем, исследованию которых посвящена диссертация, даются основные определения и формулируются основные результаты работы.

В **главе 1** строится открытое множество в пространстве диффеоморфизмов трёхмерного тора, обладающее новым типом аттрактора — костистым аттрактором.

Определение 1 Пусть X — компактное многообразие (с краем или без края). Будем говорить, что непрерывное отображение $G\colon X \to X$ имеет *костистый аттрактор*, если существует G-инвариантное слоение на X с гладкими одномерными слоями, для которого выполнены следующие условия.

1. Каждый слой инвариантного слоения или не пересекает аттрактор Милнора A_M, или пересекает его по одной точке, или же пересекает A_M по кривой (*кости*).
2. Объединение костей плотно в аттракторе Милнора, и множество костей континуально.
3. Пусть $Y \subset X$ — насыщение аттрактора Милнора слоями инвариантного слоения. Тогда хаусдорфова размерность $\dim_H A_M$ аттрактора строго меньше хаусдорфовой размерности множества Y,

$$\dim_H A_M < \dim_H Y. \qquad (1)$$

Часть аттрактора, являющуюся дополнением к объединению костей, мы будем называть *графиком*.

Более того, аттрактор Милнора каждого из построенных отображений — костистый без полых костей в смысле следующего определения.

Определение 2 Будем говорить, что диффеоморфизм F имеет *костистый аттрактор без полых костей*, если он имеет костистый аттрактор, и для некоторой поглощающей области U, $F(U) \Subset U$, выполнены следующие условия:

- максимальный аттрактор этой окрестности совпадает с аттрактором Милнора:

$$A_{max} := \bigcap_{n \geqslant 0} F^n(U) = A_M.$$

- график плотен в максимальном аттракторе.

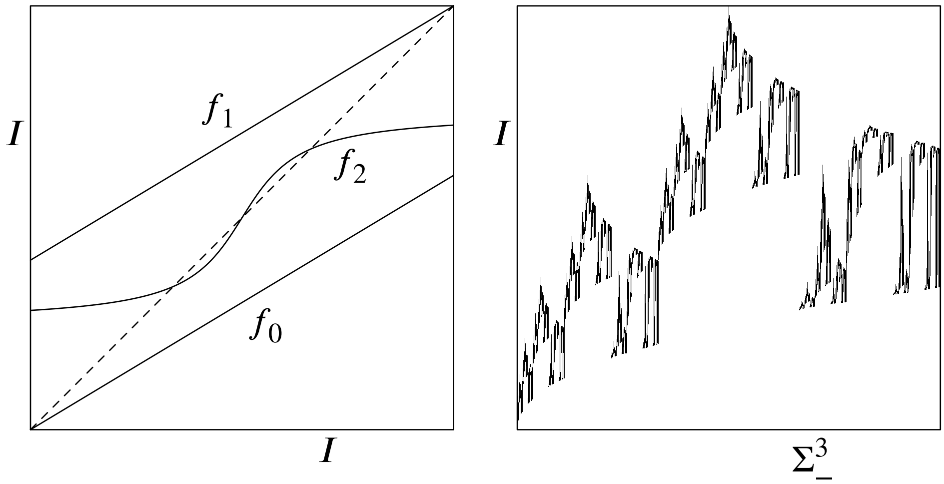
Последнее требование означает, что вблизи костей график ведёт себя как график функции $\sin \frac{1}{x}$. Важное отличие от графика функции $\sin \frac{1}{x}$ состоит в том, что в нашем случае график функции колеблется вблизи всюду плотного множества точек.

В **параграфах 1–2** даны основные определения и приведены классические результаты из теории динамических систем.

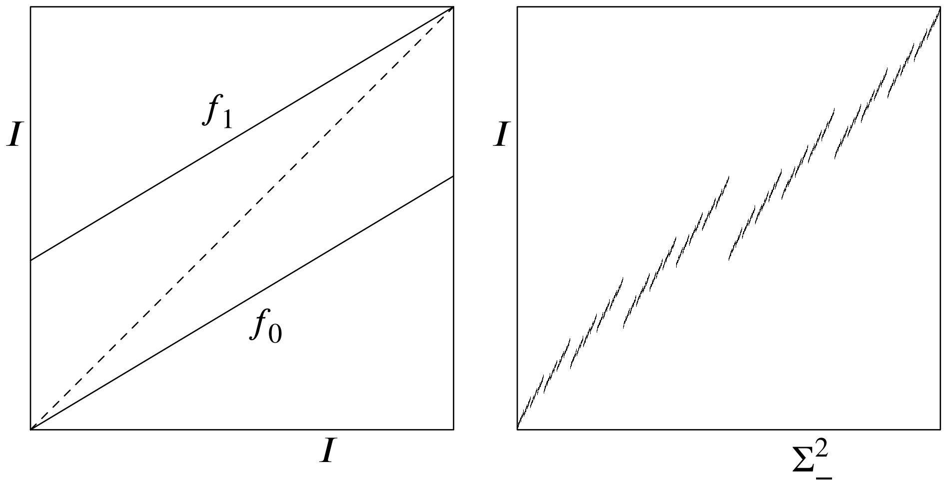
В **параграфах 3–4** описана стратегия Городецкого–Ильяшенко–Негута и приведён краткий обзор результатов, полученных другими авторами при помощи этой стратегии.

В **параграфе 5** построен один пример отображения, обладающего приведёнными свойствами. В соответствии со стратегией Городецкого-Ильяшенко-Негута, пример строится в пространстве случайных динамических систем на отрезке, или, что то же самое, в пространстве ступенчатых косых произведений со слоем отрезок над сдвигом Бернулли (левым сдвигом в пространстве последовательностей).

Рисунок 1 наглядно иллюстрирует разницу между костистым аттрактором (рис. (b)) и тонким аттрактором без костей (рис. (d)). Горизонтальная ось соответствует множеству бесконечных вправо последовательностей символов 0, 1, 2 на рисунке (b) и символов 0, 1 на рисунке (d).



(a) Послойные отображения (b) Костистый аттрактор



(c) Послойные отображения (d) Тонкий аттрактор без костей

Рисунок 1 Графики отображений и аттракторы соответствующих косых произведений

Далее в **параграфе 6** свойства построенного в параграфе 4 отображения распространены на открытое множество в пространстве ступенчатых косых произведений над сдвигом Маркова.

В **параграфе 7** описана гладкая реализация исходного примера, то есть гладкое косое произведение, аттрактор которого имеет ту же структуру, что и аттрактор исходного косого произведения. В целях упрощения конструкции в этом параграфе пример приводится в классе косых произведений надо соленоидом Смейла–Вильямса.

В следующих двух параграфах происходит переход от ступенчатых косых произведений к *гёльдеровым* (**параграф 8**), а затем к диффеоморфизмам общего вида (**параграф 9**). При этом второй переход напрямую следует из теорем Городецкого–Ильяшенко и Ильяшенко–Негута, а большинство технических трудностей приходится преодолевать в параграфе 8. В результате получается построить косое произведение со слоем окружность над диффеоморфизмом Аносова двумерного тора, такое что любой близкий к этому косому произведению диффеоморфизм трёхмерного тора имеет костистый аттрактор без полых костей.

Вторая глава диссертации посвящена гипотезе Иврия о том, что множество периодических орбит в бильярде в области евклидова пространства с достаточно гладкой границей имеет меру нуль. Основным результатом этой главы являются следующие две теоремы. **Первая теорема** получена автором самостоятельно, и позволяет свести гипотезу к случаю бильярдов с кусочно-аналитической границей.

Теорема 3 (Ю. Г. Кудряшов) *Предположим, что для любого r существует бильярд в $\mathbb{R}^m$ с кусочно C^r-гладкой границей, для которого множество* Per_k *периодических орбит периода k имеет положительную меру. Тогда существует бильярд в $\mathbb{R}^m$ с кусочно-аналитической границей, для которого* Per_k *имеет внутреннюю точку в пространстве всех орбит.*

Вторая теорема утверждает, что утверждение гипотезы Иврия выполнено для *четырёхугольных периодических орбит в плоских бильярдах*. Эта теорема получена в соавторстве с А. Глуцюком. Каждым из соавторов рассмотрено около половины возникающих при доказательстве случаев. Ю. Г. Кудряшову принадлежит также структуризация дерева случаев.

Теорема 4 (А. Глуцюк, Ю. Г. Кудряшов) *Для любого бильярда на плоскости с кусочно-аналитической границей множество* Per_4 *четырёхугольных периодических орбит не имеет внутренних точек.*

Из этих двух теорем очевидным образом следует, что в любом бильярде на плоскости с достаточно гладкой границей множество четырёхугольных периодических орбит имеет меру нуль.

Первый параграф второй главы содержит краткий исторический обзор и формулировки теорем.

Второй параграф посвящён доказательству первого из двух результатов, касающихся гипотезы В. Я. Иврия, — сведению случая бильярда с кусочно-гладкой границей к случаю бильярда с кусочно-аналитической границей. В доказательстве этой теоремы ключевую роль играет теория частично интегрируемых аналитических полей плоскостей.

В **третьем параграфе** доказывается вторая из сформулированных выше теорем о бильярдах — о том, что в любом бильярде с кусочно-аналитической границей множество замкнутых четырёхугольных орбит не имеет внутренних точек. Доказательство происходит по **следующей схеме**.

Предположим, что существует бильярд с кусочно-аналитической границей, такой что множество Per_4 орбит периода 4 имеет внутреннюю точку. Пусть $ABCD$ — одна из внутренних точек множества Per_4; a, b, c, d — ростки границы бильярда в точках A, B, C, D. Заменим кривые a, …, d на их максимальные аналитические продолжения. Тогда четырёхугольники, соответствующие точкам аналитического продолжения множества Per_4, будут периодическими траекториями для четвёрки кривых a, b, c, d. Оказывается, точки границы этого аналитического продолжения должны соответствовать одному из небольшого количества типов вырождений периодической траектории. Изучив все типы вырождений периодической траектории, мы получаем, что множество точек каждого из этих типов не более чем счётно. С другой стороны, граница обязана содержать континуальное множество точек. Полученное противоречие завершает доказательство.

В **последнем параграфе** второй главы сформулированы результаты, относящиеся к гипотезе Иврия для траекторий с произвольным количеством вершин. Поскольку пока что не получается даже доказать, что $\mu\,\mathrm{Per}_5 = 0$, результаты этого параграфа приводятся без доказательства. Кроме того, в этом параграфе перечислены случаи, которые необходимо рассмотреть, чтобы завершить доказательство для пятиугольных траекторий: невозможность остальных случаев следует из рассуждений, аналогичных доказанным в тексте диссертации.

Благодарности

Я искренне благодарен моему научному руководителю профессору Юлию Сергеевичу Ильяшенко за постановку задачи и плодотворные обсуждения. Я глубоко благодарен моему научному соруководителю академику Французской Академии Наук ведущему научному сотруднику Высшей Нормальной Школы Лиона Этьену Жису (Étienne Ghys, UMPA ÉNS Lyon) за полезные обсуждения и критику предварительного текста диссертации. Я также признателен кандидату физико-математических наук Виктору Алексеевичу Клепцыну за поддержку и полезные беседы во время моего обучения на механико-математическом факультете МГУ и в аспирантуре механико-математического факультета МГУ. Я благодарю моего соавтора кандидата физико-математических наук сотрудника CNRS (ENS Lyon) Алексея Антоновича Глуцюка за плодотворное сотрудничество.

Работы автора по теме диссертации

1. Кудряшов Ю. Г. *Костистые аттракторы* // Функ. анал. и его прил., т. **44** (2010), № 3, с. 73—76.
2. Глуцюк А. А., Кудряшов Ю. Г., *Аттракторы и периодические орбиты динамических систем* // Депонировано в ВИНИТИ (2010), 80 с.

Глуцюку А. А. принадлежит разбор половины случаев в теореме о четырёхугольных периодических орбитах в бильярдах с кусочно-аналитической границей. Разбор другой половины случаев, а также остальные результаты работы принадлежат Кудряшову Ю. Г.

3. Kudryashov Yu. G. *Bony attractors in Random Dynamical Systems and smooth skew products* // Сборник тезисов конференции «Topology, Geometry and Dynamics: Rokhlin Memorial», С. Петербург (2010), с. 53–54.