Московский государственный университет
имени М.В. Ломоносова

Механико–математический факультет

На правах рукописи
УДК 515.145.2 + 515.146.3

Онищенко Александр Юрьевич

Когомологии пространства свободных петель односвязных 4–многообразий

Специальность 01.01.04 — геометрия и топология

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико–математических наук

Москва — 2011

Работа выполнена на кафедре дифференциальной геометрии и приложений Механико–математического факультета Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова.

Научный руководитель:	кандидат физико–математических наук, доцент Попеленский Федор Юрьевич
Официальные оппоненты:	доктор физико–математических наук Ахметьев Петр Михайлович
	кандидат физико–математических наук Ершов Андрей Владимирович
Ведущая организация:	Московский педагогический государственный университет

Защита диссертации состоится 27 мая 2011 г. в 16 ч. 45 м. на заседании диссертационного совета Д.501.001.84 при Московском государственном университете имени М.В. Ломоносова по адресу: Российская Федерация, 119991, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д.1, МГУ, Механико-математический факультет, аудитория 14-08.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Механико–математического факультета МГУ (Главное здание, 14 этаж)

Автореферат разослан 27 апреля 2011 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
Д.501.001.84 при МГУ
доктор физико–математических наук,
профессор

А.О. Иванов

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Диссертационная работа относится к области алгебраической топологии. В работе исследуется пространство свободных петель X^{S^1}, где X — произвольное односвязное четырехмерное многообразие.

Пространство свободных петель (множество непрерывных отображений стандартной окружности S^1 в X в компактно–открытой топологии) давно используется в топологии, поскольку его свойства тесным образом связаны со свойствами X. Вычисление тех или иных алгебро–топологических инвариантов этого пространства позволяет устанавливать новые свойства пространства X. Так, например, Громол и Мейер[1] методами бесконечномерной теории Морса установили связь между когомологиями X^{S^1} и количеством различных замкнутых геодезических на пространстве X.

За последние 8 лет пространства свободных петель оказались в центре внимания исследователей в связи с работой Салливана[2], в которой на когомологиях X^{S^1} введена новая структура — петлевое умножение (loop product). Исследования, связанные с этой структурой, объединяются в рамках так называемой "струнной топологии"(String topology)[3] [4] — этот термин используется последние несколько лет.

Одной из первоочередных задач в исследовании свойств этой структуры является вычисление алгебры когомологий пространства X^{S^1} в явном виде. Явные вычисления $H^*(X^{S^1})$ проделаны для относительно небольшого числа примеров. Результаты для сфер, комплексных проективных пространств, а также для пространств, когомологии которых порождены одной или двумя образующими, получены в работах К. Курибаяши, Т. Ямагучи[5], а также Р. Коэна, Дж. Джонса и Дж. Яна[6]. Целью диссертационной работы является разработка методов вычисления когомологий с рациональными коэффициентами пространств свободных петель для односвязных четырехмерных многообразий, образующих достаточно широкий класс пространств.

Наш подход основан на методе минимальных моделей Салливана[7]. Напомним, что минимальной моделью односвязного пространства X называ-

[1] D. Gromoll, W. Meyer *Periodic geodesics on compact Riemannian manifolds* — J. Differential Geometry, 1969

[2] M. Chas, D. Sullivan *String topology* — preprint, arXiv:math/9911159v1, January 2004

[3] D. Sullivan *String topology: background and present state*, preprint, AT/0710.4141, October 2007

[4] R. L. Cohen, K. Hess, A. A. Voronov *String topology and cyclic homology* — Basel, Birkhauser, 2006

[5] K. Kuribayashi, T. Yamaguchi *The cohomology algebra of certain free loop spaces* — Fund. Math, 154 (1997), pp.57–73

[6] R. Cohen, J. Jones, J. Yan, *The loop homology algebra of spheres and projective spaces* — Progr. Math. 215, Birkhauser, Basel (2004) pp.77-–92

[7] D. Sullivan *Infinitesimal computations in topology* — Publications Mathe'matiques de l'IHE'S, 1977

ется свободная градуированная коммутативная алгебра ΛV над $\mathbb{Q}$ с дифференциалом d, обладающая рядом свойств. Отметим, что минимальная модель X единственна в естественном смысле, причем ее когомологии $H^*(\Lambda V, d)$ совпадают с $H^*(X, \mathbb{Q})$.

Стандартное применение метода минимальных моделей состоит в следующем. По алгебре когомологий пространства строится минимальная модель, которая используется для получения информации о рациональном гомотопическом типе исходного пространства.

Если же минимальная модель пространства известна, то ее можно использовать для вычисления когомологий самого пространства.

В нашем случае минимальная модель пространства X^{S^1} может быть явно выражена через минимальную модель многообразия X с использованием работ Д. Салливана, М. Вигю–Пуарье, Д. Бургелеа[8] [9], а также И. Фели и Ж.К. Тома [10].

Минимальная модель многообразия X для нашего случая неявным образом описана в работах И.К. Бабенко[11] и Дж. Нейзендорфера[12].

Непосредственные вычисления когомологий $H^n(X^{S^1})$ с помощью минимальной модели X^{S^1} при $b_2 = 0, 1, 2$ проводятся несложно (и уже известны), а при $b_2 > 2$ требуют огромного объема вычислений уже для малых n. В самом деле, лишь при $b_2 = 0, 1, 2$ минимальная модель X^{S^1} имеет конечное число мультипликативных образующих. С другой стороны, при $b_2 > 2$ число образующих минимальной модели в размерности n растет экспоненциально по n. В диссертационной работе разработан и применен метод, позволяющий вычислить $H^n(X^{S^1})$ в явном виде (в виде формулы, зависящей от n и характеристик пространства X).

Цель работы. Вычисление в явном виде размерностей пространств когомологий $H^*(X^{S^1}; \mathbb{Q})$ для произвольных односвязных четырехмерных многообразий.

Научная новизна. Основные результаты диссертации являются новыми и состоят в следующем:

1. Решена задача вычисления размерностей пространств $H^n(X^{S^1}; \mathbb{Q})$ для

[8] M. Vigué-Poirrier, D. Sullivan *The homology theory of the closed geodesic problem* — J. Differential Geom. Vol. 11, N **4**, 1976

[9] M. Vigué-Poirrier, D. Burghelea, *A model for cyclic homology and algebraic K-theory of 1-connected topological spaces* — J. Differential Geom. Vol. 22, N **2**, 1985 pp.243–253.

[10] Y. Félix, J.C. Thomas, M. Vigué-Poirrier *The Hochschild cohomology of a closed manifold* , Publications Mathe'matiques de L'IHE'S, 99 (2004), pp.235–252

[11] I. Babenko, *On real homotopy properties of complete intersections.* — Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. 43 (1979), 1004–1024

[12] J. Neisendorfer *The rational homotopy groups of complete intersections.* — Illinois Journal of Mathematics, Vol. 23, No. 2 (Jun., 1979), pp.175–182

произвольного n и произвольного односвязного четырехмерного многообразия X со вторым числом Бетти $b_2 > 2$.

2. Построена спектральная последовательность для вычисления $H^*(X^{S^1};\mathbb{Q})$ в комплексе минимальной модели Салливана. Доказано, что данная спектральная последовательность изоморфна, начиная с члена E_2, классической спектральной последовательности Лере–Серра расслоения $X^{S^1} \xrightarrow{\Omega X} X$.

3. Решена задача вычисления центра $Z(UL_X) \cong Z(H_*(\Omega X, \mathbb{Q}), \times)$ алгебры гомологий пространства петель произвольного односвязного четырехмерного многообразия X относительно умножения Понтрягина.

Методы исследований. В работе используются методы теории минимальных моделей, аппарат спектральных последовательностей, теория базисов Гребнера.

Теоретическая и практическая ценность работы. Работа имеет теоретический характер. Результаты диссертации могут быть полезны в исследованиях, относящихся к струнной топологии, теории гладких односвязных четырехмерных многообразий.

Апробация результатов. Результаты диссертации докладывались:

- на семинаре кафедры дифференциальной геометрии и приложений МГУ под руководством А.Т. Фоменко в 2010,
- на семинаре «Некоммутативная геометрия и топология» МГУ под руководством А.С. Мищенко в 2006–2008 (неоднократно),
- на международной научной конференции молодых ученых «Ломоносов–2010», МГУ, Москва, 2010,
- на международной научной конференции «Современные проблемы математики, механики, и их приложений», МГУ, Москва, 2009,
- на международной научной конференции «K–Theory, C^*–Algebras and Index Theory», г.Геттинген, Германия, 2010
- на семинаре по топологии под руководством проф. Лаурес и проф. Книппера, университет г.Бохум, Германия, 2010.

Публикации. Результаты диссертации опубликованы в трех работах автора, список которых приведен в конце автореферата [1–3].

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, пяти глав и списка литературы. Полный объем диссертации — 106 страниц, Библиография содержит 38 наименований.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении обоснована актуальность диссертационной работы, сформулирована цель исследования и приведен краткий обзор результатов и методов, имеющих отношение к теме диссертации. Также во введении формулируются основные результаты диссертации и описывается ее содержание.

В первой главе формулируются основные определения, приводится обзор уже известных методов и результатов, а также вводятся необходимые дополнительные конструкции и вспомогательные результаты, необходимые для решения поставленной в диссертации задачи.

В §1 приводится определение минимальной модели многообразия, а также приводятся известные теоремы и вычисления из работ И.К. Бабенко[13], позволяющие описать минимальную модель 4–мерного многообразия. Приводятся также результаты о свойствах минимальной модели 4–многообразий (в частности, результат о коформальности 4–многообразий Дж. Нейзендорфера)[14].

В §2 описаны известные результаты М. Вигю–Пуарье, Д. Салливана[15], И. Фели, Ж.К. Тома[16], Д. Бургелеа[17] , позволяющие строить минимальную модель пространства свободных петель X^{S^1} по минимальной модели пространства X. Приводится описание минимальной модели в виде $M = (\Lambda V \otimes \Lambda \overline{V}, \delta)$.

В §3 исследуется возможность разложения минимальной модели пространства X^{S^1} в прямую сумму. Устанавливается вспомогательный результат о том, что если пространство X — коформально, то минимальная модель пространства X^{S^1} может быть разложена в прямую сумму определенным способом.

В §4 вводится спектральная последовательность минимальной модели пространства X^{S^1} , задаваемая фильтрацией $F^n_{hor}(\Lambda V \otimes \Lambda \overline{V}) = \bigoplus\limits_{k\geq n} \Lambda V^k \otimes \Lambda \overline{V}$.

---

[13] I. Babenko, *On real homotopy properties of complete intersections.* — Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. 43 (1979), 1004–1024

[14] J. Neisendorfer *The rational homotopy groups of complete intersections.* — Illinois Journal of Mathematics, Vol. 23, No. 2 (Jun., 1979), pp.175–182

[15] M. Vigué-Poirrier, D. Sullivan *The homology theory of the closed geodesic problem* — J. Differential Geom. Vol. 11, N **4**, 1976

[16] Y. Félix, J.C. Thomas, M. Vigué-Poirrier *The Hochschild cohomology of a closed manifold* , Publications Mathe'matiques de L'IHE'S, 99 (2004), pp.235–252

[17] M. Vigué-Poirrier, D. Burghelea, *A model for cyclic homology and algebraic K-theory of 1-connected topological spaces* — J. Differential Geom. Vol. 22, N **2**, 1985 pp.243–253.

Данная спектральная последовательность будет активно использоваться впоследствии для вычисления когомологий $H^*(X^{S^1})$.

В §5 формулируется результат о стабилизации в члене E_3 (а не в члене E_5, как могло бы следовать из соображений размерности) введенной в предыдущем параграфе спектральной последовательности. Этот результат является основной теоремой первой главы и формулируется в виде:

Теорема. *Пусть X — односвязное четырехмерное многообразие, такое что второе число Бетти $b_2(X) \geq 2$. Тогда в когомологической спектральной последовательности Лере расслоения $X^{S^1} \xrightarrow{\Omega X} X$ дифференциал d_4 равен нулю.*

Во второй главе проведено исследование связи построенной спектральной последовательности минимальной модели и канонической спектральной последовательности Лере. Спектральная последовательность, построенная в первой главе обобщается до спектральной модели минимальной модели произвольного расслоения Серра $E \xrightarrow{F} B$ над компактным односвязным многообразием B. Следующая теорема является основным результатом главы 2.

Теорема. *Пусть $\pi : E \xrightarrow{F} B$ — расслоение в смысле Серра, над гладким многообразием B. Тогда спектральные последовательности комплексов, $F_{hor}(\Lambda V \otimes \Lambda W, d)$ и каноническая спектральная последовательность Лере–Серра естественно изоморфны, начиная со второго члена.*

Доказательство этого факта само по себе нетривиально и создает несколько вопросов о совпадении различных конструкций спектральной последовательности Лере–Серра. Во второй главе эти вопросы разбираются подробно. В частности, строится еще ряд конструкций спектральных последовательностей, относительно которых будет показано, что все они изоморфны между собой, начиная с члена E_2.

Такими конструкциями будут фильтрация $F_{hor}\Omega^*(E)$ на комплексе гладких форм гладкого расслоения $E \xrightarrow{F} B$, фильтрации F_{hor} и F_{Cech} комплекса Чеха–де Рама $C^*(V; \Omega^*)$ того же расслоения. А также будут рассмотрены спектральная последовательность минимальной модели и спектральная последовательность комплекса Чеха сингулярных форм $F_{Cech}C^*(U, S^*(\pi^{-1}U))$.

В §1 построен пример двух спектральных последовательностей, у которых члены E_2 и E_∞ изоморфны, для которых, однако, не существует изоморфизмов во всех членах $E_k, k > 2$. Таким образом показывается, что вопрос о совпадении различных конструкция спектральных последовательностей нетривиален даже при одинаковом члене E_2.

Во §2 формулируются вспомогательные результаты и леммы, имеющие характер общих замечаний о спектральных последовательностях, необходимые для доказательств результатов второй главы.

В §3 доказывается теорема о совпадении, начиная с члена E_2, спектральных последовательностей комплексов $F_{hor}\Omega^*(E)$ и $F_{Cech}C^*(V;\Omega^*)$ в случае гладкого расслоения. Этот случай можно рассматривать как модельный, поскольку результаты для него формулируются наиболее просто, а основная схема доказательства может быть использована и в более сложных случаях. В дальнейшем в доказательстве заменяются привычные леммы (например, Лемма Пуанкаре) на более технически трудные.

В §4 доказывается теорема о совпадении, начиная с члена E_2, спектральных последовательностей минимальной модели и комплекса $F_{Cech}C^*(U, S^*(\pi^{-1}U))$ для произвольного расслоения Серра. Из результатов четвертого параграфа вытекают основные результаты второй главы.

В §5 устанавливается, что все четыре последовательности, когда они определены, совпадают с канонической последовательностью Лере–Серра, начиная со второго члена. В качестве доказательства устанавливается связь последовательности $F_{Cech}C^*(U, S^*(\pi^{-1}U))$ и канонической спектральной последовательности.

В §6 второй главы содержится доказательство одной технической леммы, доказательство которой в литературе обычно не приводится, или приводится в сокращенном виде.

В третьей главе исследуется связь спектральной последовательности минимальной модели с геометрией расслоения. Основным результатом главы 3 является теорема о том, что для произвольного односвязного многообразия X, где $dimX = n$, фильтрация F_* спектральной последовательности расслоения удовлетворяет условию $AnnF_n = KerI_*$, где I_* — отображение пересечения со слоем.

Этот результат позволяет при известном ImI_* делать выводы о изучаемой спектральной последовательности. Также описываются известные результаты И. Фели, Ж.К. Тома и М. Вигю–Пуарье[18], позволяющие вычислять ImI_* через центр алгебры когомологий $H_*(\Omega X)$ относительно умножения Понтрягина.

В четвертой главе решается задача вычисления центра алгебры $H_*(\Omega X)$ относительно умножения Понтрягина для односвязных 4–многообразий. Эта самостоятельная задача решается при помощи базисов Гребнера. Заме-

[18] Y. Félix, J.C. Thomas, M. Vigué-Poirrier *The Hochschild cohomology of a closed manifold* , Publications Mathe'matiques de L'IHE'S, 99 (2004), pp.235–252

тим однако, что алгебра $H_*(\Omega X)$ в рассматриваемом случае бесконечна. Ее также можно рассматривать как универсальную обвертывающую алгебру над алгеброй Ли $L(X) = \pi_*(\Omega X)$[19]. И хотя ее задание с помощью образующих и соотношений довольно просто — она отличается от свободной лишь одним соотношением — вообще говоря для таких алгебр нет общего алгоритма вычисления центра[20].

В четвертой главе эта задача решена, результат получен в виде следующей теоремы.

Теорема. *В случае $b_2 > 2$ центр алгебры $H_*(\Omega X)$ тривиален. В случае $b_2 = 2$ центр порождается элементами $[x_1, x_2]$ и $[x_1, x_1]$.*

Таким образом, результаты глав 3 и 4 позволяют произвести вычисления одного из столбцов члена E_∞ изучаемой спектральной последовательности.

В пятой главе результаты предыдущих глав объединяются для вычисления размерностей $H(X^{S^1})$. Основной результат главы, он же — главный результат диссертации выражает $H^n(X^{S^1})$ в виде явной формулы от n и b_2:

Теорема. *Ряд Гильберта $\sum x^k H^k(X^{S^1})$ для X — односвязных 4–многообразий с $b_2 > 2$ выражается в виде:*

$$(1+x)P(x) + 1 + x^2 + 2x^3 + x^4,$$

$$P(X) = \sum_{n=1}^{\infty} x^n \sum_{d|n} (-1)^{(n+1)d} \alpha_d,$$

$$\alpha_j = \frac{(-1)^j}{j} \sum_{d|n} (-1)^d \mu(\frac{j}{d}) \left(\left(\frac{2}{b_2 + \sqrt{b_2^2 - 4}} \right)^d + \left(\frac{2}{b_2 - \sqrt{b_2^2 - 4}} \right)^d \right),$$

где μ — функция Мебиуса.

В приложении приведена таблица значений $H^n(X^{S^1})$ для некоторых n и b_2.

Благодарности.

Автор выражает благодарность своему научному руководителю кандидату физико–математических наук, доценту Ф.Ю. Попеленскому за постановку задачи и постоянное внимание и помощь в работе.

[19] J. Milnor, J.C. Moore, *On the structure of Hopf algebras*, — Annals of Math. 81 (1965), pp.211–264.

[20] L.A. Bokut *Unsolvability of the equality problem and subalgebras of finitely presented Lie algebras.* — Russian Acad. Science Izv. Math. Vol. 6 (1972), pp.1153–1199

Автор глубоко благодарен академику РАН А.Т. Фоменко и всем сотрудникам кафедры дифференциальной геометрии и приложений за внимание к работе и создание творческой атмосферы.

Работы автора по теме диссертации.

1. Онищенко А.Ю. Попеленский Ф.Ю. Об эквивалентности некоторых спектральных последовательностей расслоения. Спектральная последовательность Лере в дифференциальных формах и в минимальной модели. Математический сборник, № 4, 2011, 85–110

2. Онищенко А.Ю. О центре алгебры рациональных когомологий некоторых пространств петель относительно умножения Понтрягина. Вестник Московского Университета, 2008, № 2, 28–33

3. Онищенко А.Ю. Попеленский Ф.Ю. Вычисление когомологий Хохшильда односвязных четырехмерных многообразий. Деп. в ВИНИТИ РАН 09.07.10 N 429-В2010

В работе 1 автору принадлежат теоремы 5, 6 а также леммы 5, 7 и 8.

В работе 3 автору принадлежат результаты о стабилизации спектральной последовательности минимальной модели пространства свободных петель в члене E_3, а также о вычислении ряда Гильберта пространства свободных петель через второе число Бетти исходного пространства.