Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова
Механико-математический факультет

На правах рукописи
УДК 519.21

Тюрин Илья Сергеевич

Эффективная аппроксимация нормированных сумм случайных слагаемых

01.01.05 —теория вероятностей и математическая статистика

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва — 2012

Работа выполнена на кафедре теории вероятностей механико-математического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова.

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук, профессор Булинский Александр Вадимович
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, профессор Лифшиц Михаил Анатольевич Санкт-Петербургский государственный университет, математико-механический факультет
	доктор физико-математических наук, профессор Ульянов Владимир Васильевич, Московский государственный университет им. М.В.Ломоносова, факультет ВМиК
Ведущая организация:	Санкт-Петербургское отделение Математического института имени В.А. Стеклова РАН

Защита диссертации состоится 27 апреля 2012 года в 16 часов 45 минут на заседании диссертационного совета Д 501.001.85 при МГУ имени М.В. Ломоносова по адресу: 119991, ГСП-1, Москва, Ленинские горы, МГУ, механико-математического факультет, аудитория 16-24.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке механико-математического факультета (Главное здание, 14 этаж).

Автореферат разослан 27 марта 2012 г.

Ученый секретарь диссертационного
совета Д 501.001.85 при МГУ,
доктор физико-математических наук,
профессор В.Н. Сорокин

Актуальность

Теория предельных теорем для сумм независимых случайных величин составляет ядро современной теории вероятностей. Выдающийся вклад в создание и развитие теории предельных теорем для систем независимых (или определенным образом зависимых) величин внесли Я. Бернулли, А. де Муавр, П.-С. Лаплас, С. Пуассон, П.Л. Чебышев, А.А. Марков, А.М. Ляпунов, А.Я. Хинчин, А.Н. Колмогоров, П. Леви, В. Феллер, Дж. Дуб, Б.В. Гнеденко, Ю.В. Прохоров, А.В. Скороход, А.А. Боровков, В. Штрассен, И.А. Ибрагимов, Ч. Стейн, Б.А. Севастьянов, В.В. Петров, В.М. Золотарев, Ж. Жакод, А.Н. Ширяев и другие ученые.

В 2013 научный мир будет отмечать 300-летие с момента публикации работы Я. Бернулли, в которой устанавливался закон больших чисел (ЗБЧ), – теорема, положившая начало современной теории вероятностей. За прошедшие годы появилось множество ветвей теории суммирования случайных слагаемых. В этой связи отметим исследование безгранично делимых и устойчивых законов, изучение сумм случайного числа случайных величин, предельные теоремы для случайных векторов[1] и величин со значениями в гильбертовых или банаховых пространствах. Кроме того, возникли такие важные направления, как принципы инвариантности в слабой или сильной формах, другие варианты обычных и функциональных предельных теорем, например, закон повторного логарифма. С начала двадцатого века активно изучаются различные модели, описываемые семействами зависимых случайных величин. Достаточно напомнить такие классы процессов и полей, как гауссовские[2,3], мартингалы, семейства обладающие положительной или отрицательной зависимостью[4] и другие. С середины шестидесятых годов прошлого века началось интенсивное исследование случайных полей (систем мультииндексированных величин). Кроме того, следует отметить научное направление, посвящен-

[1]Fujikoshi Y., Ulyanov V., Shimizu R. *Multivariate Statistics: High-Dimensional and Large-Sample Approximations.* John Wiley and Sons, 2011.

[2]Лифшиц М.А. *Гауссовские случайные функции.* ТВіМС, Киев, 1995.

[3]Lifshits M.A. *Lectures on Gaussian Processes.* Springer, 2012.

[4]Булинский А.В., Шашкин А.П. *Предельные теоремы для ассоциированных случайных полей и родственных систем.* Физматлит, Москва, 2008.

ное оценкам точности тех или иных аппроксимаций предельных распределений, возникающих при изучении различных функционалов от случайных элементов.

Долгие годы упорной работы целого ряда ученых позволили довести классическую теорию предельных теорем практически до совершенства. Многие ее результаты носят оптимальный характер. Для их получения потребовалось развитие разнообразных методов. Так, широко используются не только вероятностные методы, но и методы теории функций и функционального анализа.

В наши дни исследования ведутся преимущественно в двух направлениях. Во-первых, уточняются известные условия выполнения предельных теорем для независимых случайных величин. Во-вторых, известные классические результаты переносятся на новые классы (зависимых) случайных систем. Результаты диссертации относятся к обоим упомянутым направлениям. При этом особое внимание уделяется совершенствованию методов работы с нормированными суммами случайных слагаемых.

Цель работы

Цель настоящей диссертации состоит в решении следующих задач: распространить известные условия применимости равномерного ЗБЧ (РЗБЧ) на новые классы слабо зависимых элементов, не налагая дополнительных условий на используемое семейство функций по сравнению со случаем, когда рассматриваемая последовательность состоит из независимых случайных элементов; исследовать новые свойства преобразования нулевого смещения, играющего важную роль в доказательстве центральной предельной теоремы (ЦПТ) для независимых случайных величин или векторов; установить новые оценки скорости сходимости в теореме Ляпунова для сумм независимых случайных величин или векторов, вывести новые оценки абсолютных постоянных, фигурирующих в классической теореме Берри-Эссеена и ее обобщении на случай независимых разнораспределенных слагаемых.

Научная новизна

Все результаты диссертации являются новыми. Перечислим основные из них:

1. Доказаны равномерные законы больших чисел для последовательностей случайных элементов, удовлетворяющих свойствам перемешивания, обобщающим перемешивание по Ибрагимову и абсолютную регулярность.

2. Выведены неулучшаемые неравенства, характеризующие близость распределения случайной величины и его преобразования нулевого смещения. Аналогичный результат получен и для распределения случайного вектора.

3. Установлены оптимальные оценки (использующие идеальные метрики) скорости сходимости в теореме Ляпунова как для независимых случайных величин, так и для случайных векторов.

4. С помощью нового метода улучшены известные оценки абсолютных констант в классической теореме Берри-Эссеена, а также ее обобщении на случай разнораспределенных независимых слагаемых.

Результаты диссертации обоснованы в виде строгих математических доказательств и получены автором самостоятельно. Точные формулировки установленных автором утверждений приведены ниже.

Методы исследования

Доказательство установленных результатов основано на предложенном диссертантом новом подходе, сочетающем технику Стейна и квазивыпуклый анализ, а также аппарат характеристических функций. Кроме того, используются некоторые результаты теории вероятностных метрик и техника преобразования исходных распределений.

Теоретическая и практическая ценность

Диссертация носит теоретический характер. Равномерные законы больших чисел, которым посвящена первая глава диссертации, лежат в основе теории машинного обучения. Кроме того, результаты, полученные в третьей главе, полезны для непараметрической статистики. В частности, они играют важную роль при доверительном оценивании.

Апробация работы

По теме диссертации были сделаны доклады на следующих семинарах:

— Большом кафедральном семинаре кафедры теории вероятностей под рук. академика РАН А.Н.Ширяева (мехмат МГУ, 2009 и 2011 гг.),

— Городском семинаре по теории вероятностей под рук. академика РАН И.А.Ибрагимова (ПОМИ РАН, 2012 г.),

— семинаре «Асимптотический анализ случайных процессов и полей» под рук. профессора А.В.Булинского и доцента А.П.Шашкина (мехмат МГУ, 2010-2012 гг.).

Результаты диссертации докладывались на следующих международных конференциях: «Ломоносов–2009» и «Ломоносов–2010» (Москва, 2009–2010), «Стохастическая геометрия, пространственная статистика и случайные поля» (Кляйнвальзерталь, Австрия, 2009), 10-й Международной Вильнюсской конференции по теории вероятностей и математической статистике (Вильнюс, Литва, 2010), международном симпозиуме «Стохастика и ее видение» (Москва, 2010), третьем северном треугольном семинаре (Санкт-Петербург, 2011).

Работа автора поддержана грантом РФФИ 10-01-00397а.

Публикации

Результаты диссертации опубликованы в 11 работах автора (в том числе 5 статей в журналах из перечня ВАК), список которых приведен в конце автореферата. Все работы написаны без соавторов.

Структура диссертации

Диссертация состоит из введения, трех глав и списка литературы, насчитывающего 126 наименований. Общий объем диссертации составляет 109 страниц.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Перейдем к описанию содержания диссертации. Во введении дается обзор исследований, относящихся к ЗБЧ, оценкам скорости сходимости в ЦПТ для независимых случайных величин или случайных векторов, а также описывается взаимосвязь различных глав.

Глава 1 посвящена изучению условий применимости РЗБЧ по отношению к последовательностям слабо зависимых случайных элементов. Предельные теоремы такого типа обобщают законы больших чисел и являются ключевыми при решении задач распознавания образов и восстановления зависимостей по эмпирическим данным (см. книгу В.Н. Вапника[5]). Как показал А. Нобель[6], классические критерии применимости РЗБЧ не могут быть перенесены на случай произвольных строго стационарных эргодических последовательностей. В то же время такое обобщение возможно для некоторых специальных классов зависимых структур. При доказательстве соответствующих результатов важную роль играет техника реконструкции, заключающаяся в приближении данного случайного вектора с зависимыми компонентами его дезинтеграцией, т.е. некоторым вектором, компоненты которого независимы, а маргинальные распределения совпадают с соответствующими маргинальными распределениями исходного вектора. В первой части главы 1 получено усовершенствование техники реконструкции, позволяющее изучать последовательности, удовлетворяющие свойствам перемешивания, обобщающим перемешивание по Ибрагимову и абсолютную регулярность. Во второй части главы 1 для этих последовательностей установлены РЗБЧ при тех же предположениях относительно используемого класса функций, что и в случае, когда рассматриваемая случайная последовательность состоит из независимых случайных элементов. Для точных формулировок введем ряд обозначений.

Пусть $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ – две σ-алгебры, состоящие из некоторых событий. Для

[5] Vapnik V.N. *Statistical Learning Theory.* Wiley, New York, 1998.

[6] Nobel A. A counterexample concerning uniform ergodic theorems for a class of functions. *Statist. Probab. Letters*, 1995, 24:165–168.

них коэффициент абсолютной регулярности задается формулой

$$\beta(\mathcal{A},\mathcal{B}) = \frac{1}{2}\sup\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{l}\left|\mathsf{P}(A_iB_j) - \mathsf{P}(A_i)\mathsf{P}(B_j)\right|,$$

где верхняя грань берется по всем конечным разбиениям $\{A_1,\ldots,A_k\}$ и $\{B_1,\ldots,B_l\}$ вероятностного пространства множествами $A_i \in \mathcal{A}$, $B_j \in \mathcal{B}$, $(1 \leqslant i \leqslant k,\ \ 1 \leqslant j \leqslant l)$.

Для $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ коэффициент равномерно сильного перемешивания (или коэффициент перемешивания по Ибрагимову) определяется, как $\varphi(\mathcal{A},\mathcal{B}) = \sup\{\mathsf{P}(B \mid A) - \mathsf{P}(B) : \mathsf{P}(A) \neq 0, A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}\}$.

Пусть (S,d) – польское пространство, $(X_j)_{j\geqslant 1}$ – последовательность случайных элементов, заданных на вероятностном пространстве $(\Omega,\mathcal{G},\mathsf{P})$ и принимающих значения в S, причем $X_j \in \mathcal{G}|\mathcal{B}(S)$, где $\mathcal{B}(S)$ – σ-алгебра борелевских подмножеств S. Обозначим

$$\mathcal{F}_n^m := \sigma\{X_n,\ldots,X_m\} \text{ и } \mathcal{F}_n^\infty := \sigma\{X_j, j \geqslant n\},\ \ n \leqslant m,\ \ m,n \in \mathbb{N}.$$

Классические коэффициенты β_k и φ_k вводятся следующим образом[7]

$$\beta_k = \sup_{m\geqslant 1}\beta\,(\mathcal{F}_1^m,\mathcal{F}_{m+k}^\infty),\quad \varphi_k = \sup_{m\geqslant 1}\varphi\,(\mathcal{F}_1^m,\mathcal{F}_{m+k}^\infty),\quad k \in \mathbb{N}.$$

Для $k \in \mathbb{N}$ положим

$$\widetilde{\beta}_k := \sup_{m\geqslant 1}\beta\left(\mathcal{F}_1^m,\mathcal{F}_{m+k}^{m+k}\right),\quad \widetilde{\varphi}_k = \sup_{m\geqslant 1}\varphi\left(\mathcal{F}_1^m,\mathcal{F}_{m+k}^{m+k}\right).$$

Последовательность $(X_j)_{j\geqslant 1}$ называется $\widetilde{\beta}$-, β-, $\widetilde{\varphi}$- или φ- перемешивающейся, если соответственно $\widetilde{\beta}_k$, β_k, $\widetilde{\varphi}_k$ или φ_k стремится к 0 при $k \to \infty$.

Для $m > k$ определим $\varphi_k^{(m)} := \varphi(\mathcal{F}_1^{m-k},\mathcal{F}_m^m)$. Если $m \leqslant k$, то $\varphi_k^{(m)} := 0$. Введем новые коэффициенты

$$\widehat{\varphi}_k := \limsup_{m\to\infty}\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\varphi_k^{(i)},\qquad k \in \mathbb{N}.$$

Последовательность $(X_j)_{j\geqslant 1}$ будем называть $\widehat{\varphi}$-перемешивающейся, если $\widehat{\varphi}_k$ стремится к 0 при $k \to \infty$. Как показано в диссертации, из

[7] Ибрагимов И.А., Линник Ю.В. *Независимые и стационарно связанные случайные величины.* Наука, Москва, 1965.

φ-, β- или $\widetilde{\varphi}$- перемешивания следует $\widetilde{\beta}$-перемешивание и, кроме того, $\widetilde{\varphi}$-перемешивание влечет $\widehat{\varphi}$-перемешивание.

Основной результат первой части главы 1 содержит

ТЕОРЕМА 1.1.2. *Пусть* $(X_j)_{j\geqslant 1}$ *– строго стационарная последовательность случайных элементов со значениями в польском пространстве* S. *Тогда на некотором вероятностном пространстве существуют последовательность* $(\widetilde{X}_j)_{j\geqslant 1}$, *совпадающая по распределению с данной, а также последовательность независимых случайных элементов* $(\widetilde{Y}_j)_{j\geqslant 1}$ *таких, что*

а) $\mathrm{Law}(\widetilde{X}_j) = \mathrm{Law}(\widetilde{Y}_j)$ *при всех* $j \in \mathbb{N}$,

б) $\mathsf{P}(\widetilde{X}_j \neq \widetilde{Y}_j) \leqslant \widetilde{\beta}_1$ *для каждого* $j \in \mathbb{N}$,

в) последовательность $(I_j := \mathbf{1}\{\widetilde{X}_j \neq \widetilde{Y}_j\})_{j\geqslant 1}$ *строго стационарна.*

Для строго стационарных последовательностей данный результат представляет собой уточнение аппроксимационной теоремы В. Брика[8].

Другим важным результатом первой части главы 1 является

ТЕОРЕМА 1.1.4. *Пусть* $(X_j)_{j\geqslant 1}$ *– последовательность* S*-значных случайных элементов, где* S *– польское пространство. Тогда эту последовательность можно переопределить на новом вероятностном пространстве, на котором существует последовательность* $(\widetilde{X}_j)_{j\geqslant 1}$, *совпадающая по распределению с исходной, а также последовательность независимых случайных элементов* $(\widetilde{Y}_j)_{j\geqslant 1}$ *таких, что выполнены следующие условия:*

а) $\mathrm{Law}(\widetilde{X}_j) = \mathrm{Law}(\widetilde{Y}_j)$ *для всех* $j \in \mathbb{N}$,

б) $\mathsf{P}\left(\bigcap_{j=1}^m \{\widetilde{X}_{i_j} \neq \widetilde{Y}_{i_j}\}\right) \leqslant \prod_{j=1}^m \varphi_1^{(i_j)}, \quad 1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_m.$

Эта теорема обобщает аналогичный результат М. Пелиград.

Для новых классов зависимых последовательностей во второй части главы 1 получены РЗБЧ для тех же семейств действительных функций, для которых эти законы выполнялись при рассмотрении независимых последовательностей.

[8]Bryc W. On the approximation theorem of Berkes and Philipp. *Demonstratio Matematica*, 1982, 15(3):807–816.

Рассмотрим последовательность $(X_j)_{j\geqslant 1}$, состоящую из одинаково распределенных случайных элементов со значениями в польском пространстве S, а также некоторый класс $\mathcal{F}$ действительных функций, заданных на S. Говорят, что для класса $\mathcal{F}$ выполнен РЗБЧ по отношению к последовательности случайных элементов $(X_j)_{j\geqslant 1}$, если

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{f\in\mathcal{F}}\frac{1}{n}\left|\sum_{k=1}^{n}(f(X_k)-\mathsf{E}f(X_k))\right|=0 \quad \text{п.н.} \tag{1}$$

Тогда соответствующий класс $\mathcal{F}$ называют классом Гливенко-Кантелли. При этом во избежание проблем с измеримостью верхней грани, фигурирующей в (1), принято рассматривать только допустимые классы функций, т.е. удовлетворяющие определенным условиям регулярности. Эти условия (см. книгу Д.Полларда[9]) приведены в параграфе 1.2.1. Всюду далее предполагаем, что для исследуемых классов $\mathcal{F}$ упомянутые требования выполнены. Введем несколько определений.

Оболочкой класса функций $\mathcal{F}$ называется любая такая функция $F: S\to\mathbb{R}_+$, что $|f(x)|\leqslant F(x),\ f\in\mathcal{F},\ x\in S$. Класс функций равномерно ограничен, если существует константа C, являющаяся его оболочкой. Кроме того, будем говорить, что оболочка F класса функций $\mathcal{F}$ интегрируема, если $\mathsf{E}F(X_1)<\infty$.

Необходимые и достаточные условия выполнения (1) для допустимого класса функций по отношению к последовательности независимых случайных величин изучены в работах В.Н. Вапника, А.Я. Червоненкиса[10] и М. Талаграна[11, 12]. А. Нобель и А. Дембо [13] показали, что упомянутые условия выполнения РЗБЧ могут быть применены к исследованию строго стационарных абсолютно регулярных последовательностей. М. Пелиград[14] получила аналогичное обощение для стационарных в узком смысле последовательностей с $\widetilde{\varphi}$-перемешиванием – свойством,

[9]Pollard D. *Convergence of stochastic processes.* Springer, New York, 1984.

[10]Вапник В.Н., Червоненкис А.Я. Необходимые и достаточные условия равномерной сходимости средних к математическим ожиданиям и *Теор. вероят. и примен.*, 1981, 26(3):543–563.

[11]Talagrand M. The Glivenko-Cantelli problem. *Ann. Probab.*, 1986, 15:837–870.

[12]Talagrand M. The Glivenko-Cantelli problem, ten years later. *J. Theor. Probab.*, 1996, 9:371–384.

[13]Nobel A., Dembo A. A note on uniform laws of averages for dependent processes. *Statist. Probab. Letters*, 1993, 17:169–172.

[14]Peligrad M. A note on the uniform laws for dependent processes via coupling. *J. Theor. Probab.*, 2001, 14(4):979–988.

несколько более слабым, чем перемешивание по Ибрагимову.

Основным результатом второй части главы 1 является
ТЕОРЕМА 1.2.1. *Если для допустимого класса функций $\mathcal{F}$, обладающего интегрируемой оболочкой F, выполнен РЗБЧ по отношению к последовательности независимых одинаково распределенных (н.о.р.) случайных элементов $(Y_j)_{j\geqslant 1}$, то он верен также по отношению к любой стационарной в узком смысле $\widetilde{\beta}$-перемешивающейся последовательности элементов $(X_j)_{j\geqslant 1}$ таких, что* $\mathrm{Law}(X_k) = \mathrm{Law}(Y_1)$, $k \geqslant 1$.

Кроме того, в диссертации показано, что теорема 1.2.1 остается в силе, если не налагать требование существования интегрируемой оболочки рассматриваемого класса функций. Тем самым получено обобщение работ В.Н. Вапника, А.Я. Червоненкиса, М. Талаграна, А. Нобеля, А. Дембо и М. Пелиград. В диссертации изучаются также РЗБЧ по отношению к нестационарным последовательностям. Следующий вариант РЗБЧ обобщает часть результатов, полученных в статье М. Пелиград.
ТЕОРЕМА 1.2.2. *Если для допустимого равномерно ограниченного класса функций $\mathcal{F}$ выполнен РЗБЧ по отношению к последовательности н.о.р. случайных элементов $(Y_j)_{j\geqslant 1}$, то этот закон верен также по отношению к любой $\widehat{\varphi}$-перемешивающейся последовательности элементов $(X_j)_{j\geqslant 1}$ таких, что* $\mathrm{Law}(X_k) = \mathrm{Law}(Y_1)$, $k \geqslant 1$.

Во второй главе исследуются новые свойства преобразования нулевого смещения. Ключевую роль при доказательстве соответствующих результатов играет техника редукции, позволяющая изучать экстремумы различных функционалов, определенных на множестве распределений. В первой части главы 2 получено усовершенствование упомянутой техники. Для дальнейшего нам потребуется следующее
ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Функция $g : G \to \mathbb{R}$, где G – выпуклое множество, называется квази-выпуклой, если для любых $x, y \in G$ и $\alpha \in (0,1)$ имеем

$$g(\alpha x + (1-\alpha)y) \leqslant \max\{g(x), g(y)\}.$$

Пусть заданы $h_1, \ldots, h_m$ – некоторые действительные функции на S. Рассмотрим множество

$$K := \{\mu \in D : \langle h_i, \mu\rangle = 0,\ i = 1, \ldots, m\},\ \text{ где } \langle f, \mu\rangle := \int_S f d\mu.$$

Тогда K – выпуклое множество. Кроме того, обозначим K_j – множество мер $\mu \in K$, сосредоточенных на не более чем j точках ($j \in \mathbb{N}$).

Сформулируем первый результат главы 2, обобщающий аналогичный результат работы В. Хеффдинга[15].

ТЕОРЕМА 2.1.1. *Для произвольной квази-выпуклой функции $g : K \to \mathbb{R}$ справедливо соотношение*

$$\sup_{\mu \in K} g(\mu) = \sup_{\mu \in K_{m+1}} g(\mu).$$

В последнем выражении верхнюю грань по пустому множеству считаем равной нулю.

Во второй части главы 2 установлены неулучшаемые неравенства, характеризующие близость распределения случайной величины и его преобразования нулевого смещения.

Пусть W – случайная величина с нулевым средним и дисперсией $\sigma^2 > 0$. Говорят, что случайная величина W^* имеет распределение W-нулевого смещения, если

$$\mathsf{E} W f(W) = \sigma^2 \mathsf{E} f'(W^*) \tag{2}$$

для каждой дифференцируемой функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, для которой левая часть (2) определена. Как показали Л. Гольдштейн и Г. Рейнерт[16], W^* существует для любой описанной выше W.

Пусть $\psi(u) : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ – неубывающая вогнутая функция такая, что $\psi(+0) = 0$. Всюду далее рассматриваются только такие функции ψ. Обозначим $\mathcal{F}(\psi)$ множество всех функций $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, удовлетворяющих условию $|f(x) - f(y)| \le \psi(|x - y|)$, $x, y \in \mathbb{R}$.

Для случайных величин X_1 и X_2, определенных на некотором вероятностном пространстве, положим

$$\zeta(X_1, X_2, \psi) := \sup\{|\mathsf{E}\{f(X_1) - f(X_2)\}| : f \in \mathcal{F}(\psi)\}. \tag{3}$$

Если $\mathsf{E}\psi(|X_i|) < \infty$ при $i = 1, 2$, то формула (3) задает простую вероятностную метрику, т.е. вероятностную метрику, зависящую только от маргинальных распределений рассматриваемых случайных величин.

[15] Hoeffding W. The extrema of the expected value of a function of independent random variables. *Ann. Math. Statist.*, 1955, 26(2):268–275.

[16] Goldstein L., Reinert G. Stein's method and the zero bias transformation with application to simple random sampling. *Ann. Appl. Probab.*, 1997, 7(4):935–952.

Предположим, что $r = k + \alpha$, где $k \in \mathbb{Z}_+$ и $\alpha \in (0, 1]$. Для функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ определим

$$M_r(f) := \begin{cases} \sup\limits_{x \neq y} \frac{|f^{(k)}(x) - f^{(k)}(y)|}{|x-y|^\alpha}, & \text{если } f \in C^{(k)}(\mathbb{R}); \\ \infty & \text{иначе.} \end{cases} \tag{4}$$

Здесь, как обычно, $C^{(0)}(\mathbb{R}) = C(\mathbb{R})$. Обозначим $\mathcal{F}_r = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : M_r(f) \leqslant 1\}$, $r > 0$. Пусть X_1, X_2 – случайные величины, заданные на некотором вероятностном пространстве. Определим

$$\zeta_r(X_1, X_2) := \sup\{|\mathsf{E}\{f(X_1) - f(X_2)\}| : f \in \mathcal{F}_r\}. \tag{5}$$

Данная формула определяет простую вероятностную метрику на множестве пар X_1, X_2, для которых $\mathsf{E}|X_i|^r < \infty$, и $\mathsf{E}X_1^m = \mathsf{E}X_2^m$, $1 \leqslant m \leqslant k$. Подробнее по поводу этих и других вероятностных метрик см. книгу В.М.Золотарева[17]. Основным результатом второй части главы 2 является

ТЕОРЕМА 2.2.1. *Рассмотрим случайную величину W с нулевым средним и конечной дисперсией $\sigma^2 > 0$. Пусть случайная величина W^* имеет распределение W-нулевого смещения. Предположим, что $\mathsf{E}\psi(|W^*|) < \infty$. Тогда*

$$\zeta(W, W^*, \psi) \leq \mathsf{E}\psi(|W^*|). \tag{6}$$

Более того, неравенство (6) превращается в равенство для всякой W, имеющей двухточечное распределение.

В третьей части главы 2 изучаются свойства многомерных характеризаций Стейна. Рассмотрим центрированный случайный вектор $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_d)$ с ковариационной матрицей $\Sigma = (\sigma_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant d}$. Для дважды дифференцируемой функции $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ обозначим

$$f_i := \frac{\partial f}{\partial x_i}, \ \ f_i := \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}, \quad 1 \leqslant i, j \leqslant d.$$

Говорят, что набор $\mathbf{X}^* = (\mathbf{X}^*_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant d}$, состоящий из d^2 векторов, имеет распределение $\mathbf{X}$-нулевого смещения, если

$$\mathsf{E} \sum_{i=1}^{d} X_i f_i(\mathbf{X}) = \mathsf{E} \sum_{i,j=1}^{d} \sigma_{ij} f_{ij}(\mathbf{X}^*_{ij}) \tag{7}$$

[17]Золотарев В.М. *Современная теория суммирования независимых случайных величин.* Наука, Москва, 1986.

для всех дважды дифференцируемых $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ таких, что математические ожидания в (7) существуют. Как и в одномерном случае, если $\mathbf{X}$ – гауссовский случайный вектор с нулевым средним, то для всех $1 \leqslant i, j \leqslant d$ в качестве $\mathbf{X}^*_{ij}$ можно взять вектор $\mathbf{X}$.

Для произвольных векторов $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_d)$ и $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_d)$ положим $\|\mathbf{x}\|_1 := \sum_{i=1}^d |x_i|$, $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle := \sum_{i=1}^d x_i y_i$. Для $d \times d$-матрицы A введем операторную норму $\|A\|_{op} := \sup\{\langle \mathbf{x}A, \mathbf{y}\rangle : \|\mathbf{x}\|_1 = \|\mathbf{y}\|_1 = 1\}$. Кроме того, для дважды дифференцируемой функции $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ обозначим ее гессиан $\mathrm{H}f(\mathbf{x}) := (f_{ij}(\mathbf{x}))_{1 \leqslant i,j \leqslant d}$, а также определим величину

$$M_3(f) := \sup_{\mathbf{x} \neq \mathbf{y}} \frac{\|\mathrm{H}(\mathbf{x}) - \mathrm{H}(\mathbf{y})\|_{op}}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_1}. \tag{8}$$

Если f не является дважды дифференцируемой, полагаем $M_3(f) := \infty$.
ТЕОРЕМА 2.3.1. *Рассмотрим векторы*

$$\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n) \overset{\text{Law}}{=} \mathbf{Y} = (Y_1, \ldots, Y_d),$$

которые независимы, центрированы и обладают (общей) матрицей ковариаций $\Sigma = (\sigma_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant d}$. *Пусть* U *– случайная величина, равномерно распределенная на отрезке* $[0, 1]$, *такая, что* $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$ *и* U *независимы в совокупности. Тогда для любой функции* $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ *с* $M_3(f) \leqslant 1$ *имеем*

$$\left| \mathsf{E} \left(\sum_{i=1}^d X_i f_i(\mathbf{X}) - \sum_{i,j=1}^d \sigma_{ij} f_{ij}(\mathbf{X}) \right) \right| \leqslant \frac{1}{2} \mathsf{E} \|\mathbf{X} + U(\mathbf{Y} - \mathbf{X})\|_1 \|\mathbf{Y} - \mathbf{X}\|_1^2. \tag{9}$$

Преобразовав левую часть (9) и воспользовавшись определением преобразования нулевого смещения, из теоремы 2.3.1 мы выводим оптимальное неравенство (6), где $\psi(u) = u, u \geqslant 0$.

В заключительной главе диссертации исследована скорость сходимости в теореме Ляпунова для случайных величин или векторов.

В первой части главы 3 выведены оценки, использующие идеальные метрики. Пусть $X_1, \ldots, X_n$ – независимые невырожденные случайные величины с нулевыми средними и конечными абсолютными моментами порядка $2 + \delta$ для некоторого $\delta \in (0, 1]$. Положим $\sigma_k^2 := \mathrm{Var}(X_k)$, $k = 1, \ldots, n$, и обозначим нормированную сумму $S_n := (X_1 + \ldots + X_n)/\sigma(n)$, где $\sigma^2(n) := \sigma_1^2 + \ldots + \sigma_n^2$. Определим дробь Ляпунова

$$\varepsilon_n = \varepsilon_n(\delta) := \frac{1}{\sigma(n)^{2+\delta}} \sum_{k=1}^n \mathsf{E}|X_k|^{2+\delta}. \tag{10}$$

Пусть конечны абсолютные моменты третьего порядка рассматриваемых случайных величин. Будем использовать сокращенную запись $\varepsilon_n := \varepsilon_n(1)$. Первым результатом главы 3 является
ТЕОРЕМА 3.1.1. *Имеют место следующие оценки точности нормального приближения:*

$$\zeta_1(S_n, N) \leqslant \zeta_1(S_n, S_n^*) \leqslant \varepsilon_n; \tag{11}$$

$$\zeta_2(S_n, N) \leqslant \frac{\sqrt{2\pi}}{4}\zeta_1(S_n, S_n^*) \leqslant \frac{\sqrt{2\pi}}{8}\varepsilon_n; \tag{12}$$

$$\zeta_3(S_n, N) \leqslant \frac{1}{3}\zeta_1(S_n, S_n^*) \leqslant \frac{1}{6}\varepsilon_n. \tag{13}$$

Здесь N – стандартная нормальная случайная величина, а S_n^* имеет распределение S_n-нулевого смещения. Двойное неравенство (13) *оптимально, а именно, для любого $\delta > 0$ существует такая последовательность н.о.р. случайных величин $(X_k)_{k\geqslant 1}$, что*

$$\zeta_3(S_n, N) \geqslant \left(\frac{1}{6} - \delta\right)\varepsilon_n, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Эта теорема обобщает некоторые результаты М. Раича[18].

Кроме того, в первой части главы 3 установлена
ТЕОРЕМА 3.1.2. *Пусть независимые невырожденные центрированные случайные величины $X_1, \ldots, X_n$ обладают конечными абсолютными моментами порядка $2+\delta$, где $\delta \in (0,1)$. Для нормированной суммы упомянутых величин имеем*

$$\zeta_{2+\delta}(S_n, N) \leqslant \frac{1}{(2+\delta)}\zeta_\delta(S_n, S_n^*) \leqslant \frac{1}{(1+\delta)(2+\delta)}\varepsilon_n(\delta), \tag{14}$$

где N – стандартная нормальная случайная величина, S_n^* имеет распределение S_n-нулевого смещения. Для каждого $\delta \in (0,1)$ константа $c_\delta := (1+\delta)^{-1}(2+\delta)^{-1}$ в (14)*, вообще говоря, не может быть уменьшена.*

Вторая часть главы 3 посвящена оценкам скорости сходимости, использующим равномерную метрику. А. Берри и К.-Г. Эссеен показали, что существует такая наименьшая универсальная постоянная C

[18] Raič M. Normal approximation by Stein's method. *Proceedings of the Seventh Young Statisticians Meeting. Metodoloski zvezki*, 2003, 21:71–97.

($C \geqslant 0{,}409\ldots$), что для любых случайных величин $X_1, \ldots, X_n$ с конечными абсолютными моментами третьего порядка выполнено неравенство

$$\rho(S_n, N) := \sup_{x\in\mathbb{R}} \bigl|\mathsf{P}(S_n \leqslant x) - \mathsf{P}(N \leqslant x)\bigr| \leqslant C\varepsilon_n, \quad n \in \mathbb{N}. \qquad (15)$$

Оценке константы, содержащейся в (15), посвящено множество работ. Если рассматриваемая нормированная сумма состоит из н.о.р. случайных величин, то неравенство (15) носит название теоремы Берри-Эссеена. Около 70 лет тому назад К.-Г. Эссеен показал, что $C \leqslant 7{,}5$. Х. Бергстрем получил оценку $C \leqslant 4{,}8$. К. Такано установил, что в случае н.о.р. слагаемых $C \leqslant 2{,}031$. В.М. Золотарев получил новое неравенство, позволяющее оценивать близость двух сумм независимых случайных величин и с его помощью пришел последовательно к оценкам $C \leqslant 1{,}322$ и $C \leqslant 0{,}9051$, а для случая н.о.р. величин $C \leqslant 1{,}301$ и $C \leqslant 0{,}8197$. Предложенный метод был развит в работах П. ван Бика и И.С. Шиганова, которые доказали, соответственно, оценки $C \leqslant 0{,}7975$ и $C \leqslant 0{,}7915$. Для сумм н.о.р. случайных величин И.С. Шиганов вывел оценку $C \leqslant 0{,}7655$. После этого наступил более чем 20-летний перерыв, в течение которого значительных продвижений не наблюдалось. И только в 2006 году И.Г. Шевцова доказала, что в случае н.о.р. слагаемых значение искомой константы C не превосходит 0,7056. Последняя работа положила начало серии новых результатов. В июне 2009 года автором был предложен новый метод оценки скорости сходимости в центральной предельной теореме, позволивший установить, что $C \leqslant 0{,}6379$, а в случае н.о.р. слагаемых $C \leqslant 0{,}5894$. Немногим позднее В.Ю. Королевым и И.Г. Шевцовой для случая н.о.р. случайных величин была дана оценка $C \leqslant 0{,}5129$. В ноябре того же года автору удалось показать, что константа C в общем случае не превосходит 0,5606, а для случая одинаково распределенных слагаемых им было выведено неравенство $C \leqslant 0{,}4785$. Работа над уточнением оценок продолжилась и в 2010 году, когда независимо автором и В.Ю. Королевым с И.Г. Шевцовой было доказано, что $C \leqslant 0{,}5600$, а в случае одинаково распределенных случайных величин установлено неравенство $C \leqslant 0{,}4784$. Для н.о.р. бернуллиевских случайных величин оценка C дана в недавней работе С.В. Нагаева и В.И. Чеботарева[19]. В диссер-

[19]Нагаев С.В., Чеботарев В.И. Об оценке близости биномиального распределения к нормальному. *Теор. вероят. и примен.*, 2011, 56(2):248–278.

тации приведены полученные автором оценки абсолютной постоянной, фигурирующей в (15), как в общем случае, так и для н.о.р. слагаемых.
ТЕОРЕМА 3.2.5. *В общем случае константа, фигурирующая в* (15)*, не превосходит* 0,5591*, а в случае н.о.р. слагаемых* $C \leqslant 0{,}4774$.

Недавно на сайте *arxiv.org* был выложен препринт статьи И.Г. Шевцовой[20], в котором для н.о.р. слагаемых получена оценка $C \leqslant 0{,}4748$, однако использованные там методы не позволяют улучшить нашу оценку, относящуюся к разнораспределенным слагаемым.

Кроме того, заметим, что ведутся исследования неравномерных и асимптотически правильных оценок скорости сходимости в ЦПТ. В этой связи укажем, например, на работы К.-Г. Эссеена, Б.А. Рогозина, Г.П. Чистякова, В.Ю. Королева и И.Г. Шевцовой.

В третьей части главы 3 изучается скорость сходимости в теореме Ляпунова в $\mathbb{R}^d$. При этом рассматриваются метрики, обобщающие ζ_3 на случай произвольной размерности. Пусть $\mathbf{X}, \mathbf{Y}$ – центрированные случайные векторы с общей матрицей ковариаций, заданные на некотором вероятностном пространстве. Определим

$$\zeta_3(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) := \sup\{\mathsf{E}|f(\mathbf{X}) - f(\mathbf{Y})| : M_3(f) \leqslant 1\}, \tag{16}$$

где $M_3(f)$ введена в (8). Справедлив следующий результат.
ТЕОРЕМА 3.3.1. *Пусть* $\mathbf{X}^1, \ldots, \mathbf{X}^n$ *– н.о.р. центрированные случайные векторы в* $\mathbb{R}^d$ *с независимыми компонентами и общей ковариационной матрицей* $\Sigma = \mathrm{diag}(\sigma_{11}, \ldots, \sigma_{dd})$. *Пусть, кроме того,* $\mathbf{N}$ *– центрированный гауссовский случайный вектор с матрицей ковариаций* Σ. *Тогда*

$$\zeta_3(\mathbf{S}_n, \mathbf{N}) \leqslant \frac{1}{6}\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{j=1}^{d} \mathsf{E}|X_j^1|^3.$$

Здесь $\mathbf{S}_n = (\mathbf{X}^1 + \ldots + \mathbf{X}^n)/\sqrt{n}$.
В частности, из данной теоремы вытекает оптимальное неравенство (13).

Автор признателен своему научному руководителю профессору Александру Вадимовичу Булинскому за неоценимую помощь и постоянное внимание, а также доценту А.П. Шашкину и ассистенту П.А. Яськову за советы и замечания.

[20] Shevtsova I. On the absolute constants in the Berry–Esseen type inequalities for identically distributed summands. 2011, arXiV:1111.6554v1.

Работы автора по теме диссертации

[1] Тюрин И.С. О точности гауссовской аппроксимации, *ДАН: Математика*, 2009, 429(3): 312–316.

[2] Тюрин И.С. Уточнение верхних оценок констант в теореме Ляпунова, *Успехи матем. наук*, 2010, 65(3): 201–202.

[3] Тюрин И.С. О скорости сходимости в теореме Ляпунова, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2010, 55(2): 250–270.

[4] Тюрин И.С. Уточнение остаточного члена в теореме Ляпунова, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2011, 56(4): 808–811.

[5] Тюрин И.С. Равномерные законы средних для последовательностей зависимых случайных элементов, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2009, 54(4): 801–809.

[6] Tyurin I.S. Some optimal bounds in CLT using zero biasing, *Statist. Probab. Letters*, 2012, 82(3): 514–518.

[7] Tyurin I.S. A new estimate of the convergence rate in CLT. *Abstracts of Int. Conf. on Stochastic Geometry, Spatial Statistics and Random Fields*, Kleinwalsertal, 2009, 56.

[8] Tyurin I.S. Some new results concerning the rate of convergence in Lyapunov's theorem, *10th Int. Vilnius Conf. on Prob. Th. and Math. Statist.*, Abstracts of Communications, TEV, Vilnius, 2010, 279.

[9] Tyurin I.S. Some new advances in estimating the rate of convergence in CLT. *Third Northern Triangular Seminar*, Abstracts, 2011, 22.

[10] Тюрин И.С. Применение выпуклого анализа к оценке близости вероятностных распределений, *Тезисы докладов секции «Математика и механика» конференции «Ломоносов-2009»*, Москва, 2009, 69–70.

[11] Тюрин И.С. О методе Стейна оценки точности гауссовской аппроксимации, *Тезисы докладов секции «Математика и механика» конференции «Ломоносов-2010»*, Москва, 2010, 1.