Московский государственный университет
имени М.В. Ломоносова

Механико-математический факультет

На правах рукописи
УДК 512.543.52+512.544.7

Едынак Владимир Васильевич

Порядковые аппроксимации в свободных конструкциях

01.01.06 — математическая логика, алгебра и теория чисел

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва — 2011

Работа выполнена на кафедре высшей алгебры Механико-математического факультета Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова.

Научный руководитель:	кандидат физико-математических наук, доцент Клячко Антон Александрович
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, профессор Романовский Николай Семенович
	кандидат физико-математических наук Куликова Ольга Викторовна
Ведущая организация:	Математический институт имени В. А. Стеклова РАН

Защита диссертации состоится 14 октября 2011 г. в 16 ч. 45 м. на заседании диссертационного совета Д.501.001.84 при Московском государственном университете имени М.В. Ломоносова по адресу: Российская Федерация, 119991, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д.1, МГУ, Механико-математический факультет, аудитория 14-08.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Механико-математического факультета МГУ (Главное здание, 14 этаж)

Автореферат разослан 14 сентября 2011 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
Д.501.001.84 при МГУ
доктор физико-математических наук,
профессор

А.О. Иванов

Общая характеристика работы

Актуальность темы

Диссертация посвящена изучению некоторых типов финитных аппроксимируемостей такого типа алгебраических структур как группы. Одним из центральных понятий при изучении аппроксимаций групп является понятие финитной аппроксимируемости. Автор диссертации рассматривает некоторые обобщения данного свойства, касающиеся величины порядков образов элементов группы при ее гомоморфизме. Порядковые аппроксимации изучаются с начала 70-х годов прошлого века. Так например в работе Стиба в 1971 году была доказана потентность свободной группы[1,]. При этом сам термин "потентная группа" к тому моменту еще не был введен. Доказанное утверждение использовалось для изучения финитных аппроксимируемостей относительно вхождения в подгруппы. И в последующих исследованиях порядковые аппроксимации находили применение при изучении финитных аппроксимируемостей. Мы опишем тематику исследований работы.

Изучение порядковых аппроксимаций началось с изучения групп, обладающих регулярными факторами. Так называют группы, элементы которых могут быть отображены гомомофризмом на конечную группу в элементы, порядки которых равны произвольному члену некоторой арифметической прогрессии. Данное понятие возникло в результате исследований финитных аппроксимируемостей относительно вхождения некоторых типов свободных конструкций. Позже данные группы стали именоваться квазипотентными и слабо потентными. Первоначально было показано, что регулярными факторами обладают свободные группы, а также конечно порожденные нильпотентные группы без кручения[2,]. Как и в работе Стиба для доказательства этих фактов использовались свойства нильпотентных групп. Позднее в работе Armando Martino и Burillo Hose этим утверждениям было дано простое доказательство, опирающееся на свойства конечных p-групп. При изучении порядковых аппроксимаций всегда представляют интерес вопросы о наследовании данных свойств различными типами свободных конструкций. Так было показано наследование квазипотентности свободными произведениями. Позднее этот результат был обобщен, и

[1] Stebe P.., *Conjugacy separability of certain free products with amalgamation.*, Trans. Amer. Math. Soc., 156:119–129, 1971

[2] Evans B., *Cyclic amalgamations of residually finite groups.*, Pacific Journal of Mathematics 55 (1974), 371–379.

было доказано, что квазипотентной будет также свободное произведение квазипотентных групп с объединенной почти циклической подгруппой[3]. Кроме того в этой же работе были найдены некоторые достаточные условия квазипотентности расширения квазипотентной группы с помощью квазипотентной. Поскольку давно было известно, что почти квазипотентная группа является квазипотентной, то для доказательства упомянутых выше результатов о квазипотентности тех или иных свободных конструкций осуществлялся поиск гомоморфизма из фундаментальной группы соответствующего графа групп в фундаментальную группу графа конечных групп, при котором бы не происходили сокращения в приведенной записи фиксированного элемента группы. При этом поиск такого гомоморфизма оказался более сложным в случае HNN-расширения по сравнению со свободными произведениями. Поэтому изучение квазипотентости HNN-расширений ограничилось рассмотрением частного случая, когда связанные подгруппы HNN-расширения являются циклическими и имеют нетривиальное пересечение[4]. В этой же работе, используя представление группы с одним соотношением с кручением как фундаментальной группы графа циклических групп была показана ее квазипотентность.

Более сильным условием чем квазипотентность является понятие потентности. В частности, если определение потентности выполнено для одного элемента h, то такая группа называется h-потентной, то есть элемент h может быть переведен в элемент произвольного порядка при некотором гомоморфизме в конечную группу. Понятие h-потентности было применено для получения достаточного условия финитной аппроксимируемости свободного произведения групп с объединенной циклической подгруппой[5]. Еще раньше было известно, что почти h-потентная группа является h-потентной.Кроме свободных групп и конечно порожденных нильпотентных групп без кручения были найдены и другие классы потентных групп. Например было показано, что класс конечных потентных групп является конечным многообразием и формацией. Данный класс содержит конечные нильпотентные и метабелевы группы, знакопеременную группу степени 5[6]. В середине 80-х годов прошлого

[3] J. Burillo., A. Martino *Quasi-potency and cyclic subgroup separability.*, Journal of Algebra, (2006), 188–207

[4] Wong P. C., Tang C. K., Gan H. W. *Weak Potency of Fundamental Groups of Graph of Groups.*, J. Pure Appl. Algebra 27 (1983) 163–172.

[5] Allenby R. B. J. T., Tang C. Y., *The residual finiteness of some one-relator groups with torsion.*, J. Algebra, 132–140, 1995.

[6] Poland J., *Finite potent groups.*, Bulletin of the Australian Mathematical Society, 111–120, 1980.

века было доказано, что свободное произведение двух свободных групп с объединенными циклическими подгруппами является потентным[7]. А также свободное произведение конечного числа изоморфных копий потентной группы, с амальгамированными подгруппами-копиями, финитно отделимыми в соответствующих свободных множителях, потентно[8].

Еще одним обобщением квазипотентности является понятие омнипотентности. Омнипотентной называют группу, произвольное конечное множество попарно независимых элементов которой можно отобразить конечным гомоморфизмом на элементы, порядки которых равны произвольным кратным некоторого числа, зависящего от данного набора элементов. В 2000-ом году Дэниэлом Вайзом было доказано, что свободные группы являются омнипотентными. Эта теорема использовалась для изучения финитной отделимости конечно порожденных подгрупп фундаментальной группы конечного графа свободных групп с циклическими реберными подгруппами[9]. Эта работа является, по-видимому, первой, в которой для изучения порядковых отделимостей использовались геометрические методы. До этого момента все доказанные результаты в этой области опирались на комбинаторные рассуждения, а также на свойства нильпотентных групп. Вайз для доказательства омнипотентности свободной группы применил накрытия графов. Позже, в 2006-ом году ученик Вайза доказал, что фундаментальная группа гиперболической поверхности является омнипотентной. В 2008-ом году это утверждение было заново доказано Генри Уилтоном, применившим для этого топологические методы и конструкцию сплетений. Кроме того, Уилтон доказал, что омнипотентыми будут также фуксовы группы без кручения первого типа[10].

Другое свойство, которое относится к порядковым аппроксимациям, автор предлагает называть n-порядковой отделимостью. Данное свойство изучалось в работе Клячко, где было показано, что свободная группа является 2-порядково отделимой[11]. Позже Эндимиони показал, что

[7] Allenby R. J. B. T., *The potency of cyclically pinched one-relator groups.*, Archiv der Mathematik, 204–210, 1981.

[8] Wong P. C., Koay H. L., *Generalized free products of isomorphic potent groups.*, The Bulletin of the Malaysian Mathematical Society, vol. 2, 35–38, 1989.

[9] Wise D. T., *Subgroup separability of graphs of free groups with cyclic edge subgroups.*, Q. J. Math 51, (2000), 107–129.

[10] Henry W., *Virtual retractions, conjugacy separability and omnipotence.*, J. Algebra. 323 (2010), 323–335.

[11] Klyachko A. A., *Equations over groups, quasivatieties, and a residual property of a free group.*, J. Group Theory, 1999.

конечно порожденная метабелева группа является 2-порядково отделимой тогда и только тогда, когда для любых элементов u и v из этой группы из того, что нормальные замыкания u и v в группе совпадают, следует, что u сопряжен с v или с (v^{-1})[12]. Позже результат Клячко был обобщен для случая свободных произведений [1]. Кроме того, удалось найти достаточные условия n-порядковой отделимости свободных произведений при $n > 2$ [2].

Цель работы

Тематику исследований работы можно разбить на три направления.

Порядковая отделимость :

- Получение критериев и достаточных условий 2-порядковой отделимости некоторых свободных конструкциий.
- Получение достаточных условий n-порядковой отделимости свободного произведения групп.
- Изучение величины отношения порядков образов нескольких элементов свободной группы при гомоморфизме из свободной группы в конечную.

Квазипотентность :

- Обобщение свойства квазипотентности свободных произведений с объединенной подгруппой.

Омнипотентность :

- Изучение свойства омнипотентности свободных произведений финитно аппроксимируемых групп.

Взаимно простые порядки :

- Получение достаточных условий на пары элементов свободных групп, для которых существует гомоморфизм из свободной группы в конечную группу, переводящий их в элементы неединичных взаимно простых порядков.

[12] Gerard Endimioni., *Elements with the Same Normal Closure in a Metabelian Group.*, The Quarterly Journal of Mathematics (2006).

Научная новизна

Результаты диссертации являются новыми и состоят в следующем. Решены задачи:

1. Доказана n-порядковая отделимость некоторых классов фундаментальных групп графов групп при произвольном n.
2. Доказано, что конечные независимые наборы элементов свободного произведения конечных групп удовлетворяют условию омнипотентности.
3. Доказано, что элемент свободного произведения изоморфных квазипотентных групп с объединенными подгруппами может быть переведен в элемент, порядок которого равен произвольному члену некоторой арифметической прогрессии.

Основные методы исследования

В начале работы приводятся известные сведения из теории графов, на основании которых вводится определение графа действия. Понятие графа действия, по-видимому, впервые использовалось в работе Клячко, где была доказана 2-порядковая отделимость свободных групп. Автор диссертации развивает идею применения подобных графов для различных типов свободных конструкций. При этом вводятся алгоритмы, позволяющие из одних графов действия строить новые графы, на вершинах которых осуществляется действие изучаемой группы. Во второй части работы помимо графов действия вводится понятие близости вершин цикла в графе с помощью которого удается изучать свойство омнипотентности. Исходя из некоторых алгебраических свойств гомоморфизмов делаются геометрические выводы о структуре соответствующих графов Кэли. В первых двух частях работы, связанных с изучением порядковых аппроксимаций, в качестве графов действия использовались графы Кэли групп, а также графы, построенные из нескольких копий графов Кэли. При изучении проблемы взаимно простых порядков применяется другой подход состоящий в том, что графы действия строятся автором самостоятельно без использования гомоморфизмов. Причина этого состоит в том, если для поиска гомоморфизмов, переводящих некоторый элемент u в элемент фиксированного порядка, используется граф действия, то необходимо уделять внимание каждой орбите данного графа при действии

$< u >$. Поэтому проще проконтролировать мощности данных орбит и их количество, если используется не граф Кэли, а некоторый граф, структура которого известна заранее.

Теоретическая и практическая ценность работы

Работа имеет теоретический характер. Методы раздела о порядковой отделимости нашли применение при изучении внешних автоморфизмов относительно гиперболических групп в работе Осина и Минасяна. Изучение свойства омнипотентности свободных произведений может быть использовано при изучении аппроксимационных свойств фундаментальных групп графов групп, у которых реберные подгруппы являются циклическими. Поскольку омнипотентность свободных произведений позволяет найти гомоморфизм свободного произведения вершинных групп, который может быть продолжен на гомоморфизм фундаментальной группы.

Получены новые методы для изучения аппроксимационных свойств групп с применением геометрических соображений.

Апробация работы

Результаты диссертации докладывались:

- на семинаре «Теория групп» кафедры высшей алгебры МГУ, неоднократно в 2007–2010 г.
- на научно-исследовательском семинаре кафедры высшей алгебры МГУ, в 2009–2010 г.
- студенческая конференция “Algebraic groups”, Germany, Gottingen, 2005 г.
- научная конференция по теории групп, МИРАН В. А. Стеклова, г. Москва, 2008 г.
- международная алгебраическая конференция памяти А. Г. Куроша, г. Москва, 2008 г..

Публикации

По теме диссертации опубликовано 3 работы. Список работ приводится в конце автореферата [1-3].

Структура и объем диссертации

Работа состоит из введения, трех глав. Библиография содержит 22 наименования. Общий объем диссертации составляет 63 страницы.

Краткое содержание работы

В **первой главе** приводятся стандартные определения из теории графов, а также вводится понятие графа действия.

Пусть G – группа с фиксированным порождающим множеством X. Задано действие группы G на множестве T. Этому действию можно сопоставить граф Γ следующим образом. Вершинами Γ объявляются элементы из T. Далее для каждого p из T и для каждого x из X существуют вершины q и r, такие что $p \circ x = q, p \circ x^{-1} = r$. Тогда вершины p и q соединяем ребром с меткой x, выходящим из p. Также строим ребро с меткой x, выходящее из вершины r в вершину p. Каждому такому графу можно сопоставить действие группы на множестве вершин графа действия.

При работе с графами действия, используя метки ребер, можно естественным образом определить метки путей в таких графах. Если граф действия конечен, то для некоторого элемента u можно рассмотреть замкнутые пути, метки которых лежат в $< u >$. Подмножество этих путей, элементы которого соответствуют одной орбите при действии $< u >$ на графе действия называется u-циклом.

При рассмотрении фундаментальных групп графов групп можно разработать алгоритмы, позволяющие специальным образом склеивать несколько копий одного графа действия. После подобной склейки удается построить новый граф действия, в котором орбиты при действии $< u >$ имеют большую мощность. Кроме того, появляется возможность проконтролировать сотношение мощностей орбит при действии нескольких циклических подгрупп.

При осуществлении склеек графов действия важное значение имеет отсутствие близких вершин в u-циклах. Графы действия, удовлетворяющие таким условиям находятся среди графов Кэли гомоморфных образов рассматриваемых групп, где гомоморфизмы удовлетворяют специальным свойствам.

Определение 1. Пусть $S = e_1 ... e_n$ – путь в некотором графе Γ. Зафиксируем неотрицательное число l. Будем говорить, что цикл S не имеет l-близких вершин, если для любых $i, j, 0 < i < l < n + 1$ расстояние между ребрами началом ребра e_i и началом ребра e_j не меньше чем $\min(|i-j|, n-|i-j|, l+1)$.

Приведенное выше определение обобщает понятие простого цикла, то есть цикла без самопересечений. Отметим, что у циклов, не имеющих l-близких вершин, все подпути, длина которых не превышает l являются геодезическими в графе.

Используется следующая лемма.

Лемма 2.1 *Если в группе G циклическая подгруппа $< u >$ финитно отделима, то существует гомоморфизм из G в конечную группу, такой что в графе Кэли гомоморфного образа u-циклы не имеют близких вершин.*

Рассмотрим способы с помощью которых происходит склейка графов действия. Рассмотрим группу G, заданную своим копредставлением $G =< X|r_1 = 1, ..., r_n = 1 >$. Если Γ – некоторый граф действия группы G относительно порождающего множества X, то для любого i каждый r_i-цикл в Γ имеет метку r_i. Это свойство является необходимым и достаточных условием для того, чтобы граф, ребра которого помечены элементами из X являлся графом действия группы G. Пусть например $G = A * B =< A, B >$. Рассмотрим две копии Γ_1, Γ_2 некоторого графа действия группы G. Тогда зафиксируем 2 соответствующие друг другу вершины $p_1 \in \Gamma_1, p_2 \in \Gamma_2$. Произведем следующие действия. Для каждого ребра $e_1 \in \Gamma$ с меткой из A, инцидентного вершине p_1 зафиксируем также соответствующее ребро $e_2 \in \Gamma$. Удалим ребра p_1, p_2. Добавим новые ребра: f_1, f_2, метки которых совпадают с метками ребер e_1, e_2. Предположим, что ребро e_1 выходит из вершины p_1 в вершину q_1, а q_2 – вершина графа Γ_2, соответствующая вершине q_1. Тогда ребро f_1 выходит из вершины p_1 и входит в вершину q_2. Ориентация ребра f_2 определяется аналогично. Подобные преобразования можно определить для других типов свободных конструкций: свободных произведений с объединенными подгруппами, HNN-расширений, свободных произведений с коммутирующими подгруппами. По-видимому, такие склейки можно производить над любыми группами, для которых известен алгоритм построения их графа Кэли.

На основе описанных преобразований в работе удается найти достаточные условия порядковой отделимости свободных конструкций.

В качестве примера приведем формулировки следующих теорем.

Лемма 2.3 *Рассмотрим группу $G = A * B$, где A и B конечные группы, $u_1, \ldots, u_m$ циклически несократимые элементы декартовой подгруппы C, такие что любые два из них не принадлежат сопряженным циклическим* *подгруппам, конечное множество π, состоящее из простых чисел. Кроме того, $u_i = u_i'^{m_i}$, где u_i' не является истинной степенью, и, если $m_i > 1$, то для любого $m_i' \neq m_i$, такого что $m_i' \mid m_i$, элемент $u_i'^{m_i'}$ не лежит в C. Тогда существует гомоморфизм φ из G в конечную группу, такой то образы элементов $u_1, \ldots, u_m$ имеют попарно различные порядки и $p \nmid |\varphi(u_i)|$ для каждых i и p, $1 \leqslant i \leqslant m, p \in \pi$.*

Лемма 2.7 *Пусть F — свободная группа с фиксированным базисом Z, $u_1, \ldots, u_k, v \in F$ и для каждого i элементы v и u_i не лежат в сопряженных циклических подгруппах. Для любого достаточно большого простого числа p и для любого натурального числа N существует гомоморфизм φ из F в конечную p-группу, такой что $\mid \varphi(u_1) \mid = \cdots = \mid \varphi(u_n) \mid > \mid \varphi(v) \mid > 1$, и $\mid \varphi(u_1) \mid > N$.*

При изучении свойства омнипотентности важное значение приобретает условие отсутствия l-близких вершин у u-циклов графов Кэли, когда l может зависеть от длин элементов. Главным результатом автора в данной области является доказательство следующего утверждения.

Теорема 3.1. *Рассмотрим финитно аппроксимируемую группу $G = A * B$, и элементы $u_1, \ldots, u_n \in G \setminus \{ \bigcup\limits_{g \in G} (g^{-1}Ag \cup g^{-1}Bg)\}$, которые попарно не лежат в сопряженных циклических подгруппах. Тогда существует натуральное число K, такое что для любого упорядоченного набора натуральных чисел $l_1, \ldots, l_n$ существует гомоморфизм φ из G в конечную группу, такой что для любого i порядок $\varphi(u_i)$ равен Kl_i.*

При изучении взаимно простых порядков рассматривается случай свободной группы, в которой фиксируются два элемента, из которых один принадлежит коммутанту группы, а другой ему не принадлежит. Например доказывается следующая теорема.

Теорема 3.8 *Пусть F — свободная группа, для которой зафиксирован базис $x_1, \ldots, x_n$. Рассмотрим элементы u и v из F, такие что $u \in < x_1^{k_1}, \ldots, x_n^{k_n} \setminus [F, F], v \in [F, F] \setminus \{ 1\}$, при этом числа $k_1, \ldots, k_n$ больше длины элемента v в свободной группе относительно базиса $\{ x_1, \ldots, x_n\}$. Тогда существует натуральное число Q, такое что для любых натуральных чисел $M, N, N \geqslant l(v)/l_{x_1}(u)(M+2)$, существует гомоморфизм φ из F в конечную группу, такой что $|\varphi(u)| = N, M \leqslant |\varphi(v)| \leqslant (MQ)^{MQ}$. В частности, числа $|\varphi(u)|, |\varphi(v)|$ могут быть отличными от единицы и взаимно простыми.*

При изучении нормальных подгрупп относительных копредставлений рассматривается случай унимодулярного уравнения над группой без кручения. При этих условиях доказывается наличие континуального множества нормальных подгрупп для относительного копредставления. В случае, когда соотношение относительного копредставления имеет вид $w = ct\prod_{i=0}^{m}(a_i t^{-1} b_i t)$ дополнительно доказывается монолитичность группы.

Благодарности

Выражаю глубокую благодарность научному руководителю кандидату физико-математических наук, доценту Антону Александровичу Клячко за постановки задач и постоянное внимание к работе. Автор хотел бы поблагодарить профессора Альфреда Львовича Шмелькина за ценные замечания. Благодарю также всех участников семинара "Теория групп" за плодотворные беседы. Автор выражает глубокую благодарность всем сотрудникам кафедры высшей алгебры за внимание и поддержку.

Работы автора по теме диссертации

[1] Едынак В., Отделимость относительно порядка. Вестник Московского университета, вып. 3, 2005, стр. 56–58.

[2] Yedynak V., Multielement order separability. Communications in Algera, volume 38, issue 9, pages 3448-–3455 (2010).

[3] Тезисы международной алгебраической конференции памяти А. Г. Куроша, г. Москва, 2008, стр. 89–89.