МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ М. В. ЛОМОНОСОВА

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

На правах рукописи
УДК 519.714

Дагаев Дмитрий Александрович

О СЛОЖНОСТИ ФУНКЦИЙ МНОГОЗНАЧНОЙ ЛОГИКИ, ПРИНИМАЮЩИХ ДВА ЗНАЧЕНИЯ

01.01.09 — дискретная математика и математическая кибернетика

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва — 2011

Работа выполнена на кафедре дискретной математики Механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова.

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук, профессор А. Б. Угольников.
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, профессор В. Б. Алексеев; кандидат физико-математических наук, доцент В. А. Стеценко.
Ведущая организация:	Казанский (Приволжский) федеральный университет.

Защита диссертации состоится 27 мая 2011 г. в 16 ч. 45 мин. на заседании диссертационного совета Д.501.001.84 при Московском государственном университете имени М. В. Ломоносова по адресу: Российская Федерация, 119991, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д. 1, МГУ, Механико-математический факультет, аудитория 14-08.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Механико-математического факультета МГУ (Главное здание, 14 этаж).

Автореферат разослан 27 апреля 2011 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
Д.501.001.84 при МГУ
доктор физико-математических наук,
профессор А. О. Иванов

Общая характеристика работы

Актуальность темы

Диссертация относится к теории синтеза и сложности управляющих систем — одному из основных разделов дискретной математики и математической кибернетики. В ней рассматривается задача о сложности реализации функций многозначной логики формулами над конечными системами.

Задача синтеза и сложности управляющих систем[1] в общем случае формулируется следующим образом. Дан набор G базисных элементов некоторого типа (например, функциональные элементы или формулы), каждому из которых приписано некоторое положительное число — вес элемента. С помощью этих элементов по заданным правилам строятся более сложные объекты — схемы. Каждой схеме $\mathcal{S}$ ставится в соответствие некоторая функция f и число $L(\mathcal{S})$, равное сумме весов всех входящих в нее элементов; при этом говорят, что функция f реализуется схемой $\mathcal{S}$ со сложностью $L(\mathcal{S})$. Сложностью функции f называется величина $L_G(f) = \min L(\mathcal{S})$, где минимум берется по всем схемам $\mathcal{S}$ над G, реализующим функцию f. Для каждой функции f требуется найти минимальную схему $\mathcal{S}$ над G, реализующую f (то есть такую схему $\mathcal{S}$, реализующую f, сложность которой удовлетворяет равенству $L(\mathcal{S}) = L_G(f)$). При изучении функций из заданного конечного множества H рассматривается величина $L_G(H) = \max L_G(f)$, где максимум берется по всем функциям f из H. Функция $L_G(H)$ называется функцией Шеннона. Она характеризует сложность реализации в рассматриваемом классе управляющих систем самых сложных функций из множества H. Эта функция была введена в работах К. Шеннона[2], там же были получены первые значительные результаты о ее поведении.

Формулы и схемы из функциональных элементов (называемые далее схемами), реализующие дискретные функции, являются одними из основных модельных классов управляющих систем. Множество P_k всех функций k-значной логики, $k \geqslant 2$, является важным примером класса дискретных функций, представляющим большой интерес как с теорети-

[1]См.: *Яблонский С. В.* Основные понятия кибернетики // Проблемы кибернетики. 1959. Вып. 2. С. 7–38.

[2]*Shannon C. E.* The synthesis of two-terminal switching circuits. Bell Syst. Techn. Journ. 1949. **28**. №1. P. 59–98 (русский перевод: *Шеннон К.* Работы по теории информации и кибернетике. М.: ИЛ, 1963. С. 59–101.).

ческой, так и с прикладной точек зрения. Одной из наиболее изученных классификаций функций k-значной логики являются классы функций, замкнутые относительно операции суперпозиции[3]. В связи с этим возникает задача о реализации функций k-значной логики из замкнутых классов формулами (или схемами) над конечными системами. В этой задаче можно выделить два направления исследований: синтез схем и формул в полных базисах и синтез схем и формул в неполных базисах.

В задаче о сложности реализации булевых функций основополагающие результаты были получены О. Б. Лупановым, предложившим асимптотически оптимальные методы синтеза для ряда классов управляющих систем. В частности, для произвольного полного конечного базиса G булевых функций он показал[4] справедливость следующих соотношений[5]:

$$L_G^{\text{СФЭ}}(P_2(n)) \sim \rho \frac{2^n}{n},$$

$$L_G^{\Phi}(P_2(n)) \sim \rho \frac{2^n}{\log_2 n},$$

где $L_G^{\text{СФЭ}}(P_2(n))$ и $L_G^{\Phi}(P_2(n))$ — функции Шеннона при реализации функций схемами и формулами соответственно, а ρ — константа (минимальный приведенный вес элементов базиса), однозначно определяемая по базису G. Оценки высокой степени точности для функций Шеннона при реализации булевых функций формулами и схемами в полных базисах получены в работах С. А. Ложкина[6].

Задача о поведении функций Шеннона для множества всех булевых функций тесно связана с задачей о поведении функций Шеннона, соответствующих замкнутым классам булевых функций при реализации функций схемами и формулами в полных конечных базисах. Полное описание множества всех замкнутых классов булевых функций получено

---

[3] *Яблонский С. В.* Функциональные построения в k-значной логике // Труды матем. ин-та АН СССР им. Стеклова. 1958. 51. С. 5–142.

[4] *Лупанов О. Б.* Об одном методе синтеза схем // Известия вузов, Радиофизика I. 1958. С. 120–140.

Лупанов О. Б. О сложности реализации функций алгебры логики формулами // Проблемы кибернетики. 1960. Вып. 3. С. 61–80.

Лупанов О. Б. Об одном подходе к синтезу управляющих систем – принципе локального кодирования // Проблемы кибернетики. 1965. Вып. 14. С. 31–110.

[5] Здесь и далее всякий раз, когда речь идет об асимптотических оценках, подразумевается, что эти оценки имеют место при $n \to \infty$.

[6] *Ложкин С. А.* Новые, более точные оценки функций Шеннона для сложности управляющих систем // Дискретный анализ и исследование операций. 1995. Т. 2, № 3. С. 77–78.

Ложкин С. А. Оценки высокой степени точности для сложности управляющих систем из некоторых классов // Математические вопросы кибернетики. Вып. 6. М.: Наука, 1996. С. 190–214.

Э. Л. Постом[7]. Он показал, что это множество счетно, причем каждый замкнутый класс имеет конечный базис. При реализации функций схемами для каждого замкнутого класса булевых функций, не содержащегося в множестве[8] $L \cup K \cup D$, и любого полного конечного базиса А. Б. Угольниковым[9] получена асимптотически точная формула для соответствующей функции Шеннона. При реализации функций формулами для всех замкнутых классов булевых функций, не содержащихся в множестве[10] $S \cup L \cup K \cup D$, и любого конечного полного базиса асимптотически точные формулы для соответствующих функций Шеннона получены А. Е. Андреевым[11].

Следует отметить, что упомянутые выше методы синтеза схем и формул существенным образом используют полноту базисов. Поэтому задача о синтезе схем и формул в неполных базисах требует разработки других методов синтеза. Отметим некоторые результаты, полученные в задаче о сложности реализации булевых функций из замкнутых классов схемами и формулами в неполных базисах. При реализации функций схемами для замкнутых классов функций, сохраняющих константы, и любых конечных систем, порождающих эти классы, асимптотически точные формулы для соответствующих функций Шеннона были получены Э. И. Нечипоруком[12]. Аналогичные утверждения справедливы также для ряда других замкнутых классов[13]. В задаче о сложности реализации функций форму-

---

[7] *Post E. L.* Introduction to a general theory of elementary propositions // Amer. J. Math. 1921. 43, № 3. P. 163–185.

Post E. L. The two-valued iterative systems of mathematical logic // Annals of Math. Studies. 1941. № 5. Princeton Univ. Press.

[8] Через L, K и D обозначаются множества всех линейных функций, конъюнкций и дизъюнкций соответственно.

[9] *Угольников А. Б.* О реализации функций из замкнутых классов схемами из функциональных элементов в полном базисе // Доклады АН СССР. 1983. Т. 271. № 1. С. 49–51.

[10] Через S обозначается множество всех самодвойственных функций.

[11] *Андреев А. Е.* Метод бесповторной редукции синтеза самокорректирующихся схем // Доклады АН СССР. Т. 283, № 2. 1985. С. 265–269.

Андреев А. Е. О синтезе функциональных сетей. Докт. диссертация. М.: МГУ им. М. В. Ломоносова, 1985.

[12] *Нечипорук Э. И.* О синтезе логических сетей в неполных и вырожденных базисах // Докл. АН СССР. 1964. Т. 155. № 2. С. 299–301.

Нечипорук Э. И. О синтезе логических сетей в неполных и вырожденных базисах // Проблемы киберенетики. Вып. 14. М.: Наука, 1965. С. 111–160.

[13] *Угольников А. Б.* Синтез схем и формул в неполных базисах. ДАН СССР, 1979. Т. 249, № 1. С. 60–62.

Угольников А. Б. О реализации булевых функций из некоторых замкнутых классов схемами из функциональных элементов в неполных базисах // Вестник Московского университета. Сер. 1, Математика. Механика. М.: Изд-во МГУ, 1985. № 3. С. 87–89.

Андреев А. Е. О синтезе схем из функциональных элементов в полных монотонных базисах //

лами известно[14], что для любого замкнутого класса B и любой конечной системы, порождающей класс B, сложность реализации формулами каждой функции из B имеет не более чем экспоненциальный порядок роста от числа переменных. Для некоторых замкнутых классов («близких» к множеству P_2) и любых конечных систем, порождающих эти классы, получены асимптотически точные формулы для соответствующих функций Шеннона[15]. Получен также ряд других результатов о верхних оценках сложности схем и формул (в неполных базисах), реализующих функции из некоторых замкнутых классов.

Таким образом, в задаче о сложности реализации булевых функций схемами и формулами в конечных базисах с положительными весами всех входящих в них элементов получен ряд существенных результатов. Получение аналогичных результатов для функций многозначной логики наталкивается на значительные трудности. Это связано с принципиальными отличиями многозначных логик от двухзначной. Одним из основных отличий является континуальность[16] множества всех замкнутых классов функций k-значной логики при $k \geqslant 3$. В связи с этим важным направлением исследований является изучение свойств отдельных семейств замкнутых классов. Среди таких семейств одно из центральных мест занимает семейство всех предполных классов, изучению свойств которого посвящено значительное число публикаций. Полное описание множества всех предполных классов при всех $k \geqslant 3$ получено И. Розенбергом[17]. К числу наиболее изученных семейств замкнутых классов функций k-значной логики относится также семейство всех замкнутых классов функций из $P_{k,l}$ — множества всех функций k-значной логики, принимающих значения только из множества $\{0, 1, ..., l-1\}$, $k > l \geqslant 2$. Некоторые свойства этих классов изучены в работах Г. Буроша[18] и дру-

---

Математические вопросы кибернетики, 1988. №1. С. 114–139.

[14] *Угольников А. Б.* О глубине и сложности формул, реализующих функции из замкнутых классов // Доклады АН СССР. 1988. Т. 298. №6. С. 1341–1344.

[15] *Угольников А. Б.* Синтез схем и формул в неполных базисах. Препринт ИПМ АН СССР. М. 1980. №112.

[16] См.: *Янов Ю. И., Мучник А. А.* О существовании k-значных замкнутых классов, не имеющих конечного базиса // ДАН СССР. 1959. 127. №1. С. 44–46.

[17] *Rosenberg I. G.* La structure des fonctions de plusieurs variables sur un ensemble fini. Comptes Rendus, de l'Academ. Paris. **260**. 1965. P. 3817–3819.

Rosenberg I. G. Über die funktionale Vollständigkeit in den mehrwertigen Logiken // Rozpr. ČSAV Řada Mat. Přiv. Věd., Praha. 1970. **80**. P. 3–93.

[18] *Burosch G.* Über die Ordnung der prëvollständigen Klassen in Algebren von Prädikaten. Preprint, WPU Rostock. 1973.

гих авторов[19]. В работах Д. Лау[20] и Н. Грюнвальда[21] изучены некоторые свойства замкнутых классов функций из множества $P_{3,2}$. В этих работах рассматривается отображение (называемое проекцией) функций из множества $P_{3,2}$ в множество P_2. На основе этого отображения для каждого множества $F \subseteq P_{3,2}$ определяется множество $prF = \cup prf$, где prf — проекция функции f, а объединение берется по всем функциям $f \in F$. В результате каждому замкнутому классу B булевых функций сопоставляется семейство $\mathfrak{N}(B)$ всех замкнутых классов F функций из $P_{3,2}$, таких, что $prF = B$. Для каждого замкнутого класса B булевых функций найдена мощность множества $\mathfrak{N}(B)$ и приведено описание этого множества для тех случаев, когда мощность $\mathfrak{N}(B)$ конечна или счетна.

Отметим некоторые результаты, полученные в задаче о сложности реализации функций многозначной логики. В. А. Орлов[22] ввел понятие оптимального полного базиса (конечный полный в P_k базис является оптимальным, если асимптотическое поведение соответствующей функции Шеннона определяется минимальным приведенным весом элементов базиса) функций k-значной логики, $k \geqslant 3$, и для каждого такого базиса предложил асимптотически наилучший метод синтеза схем из функциональных элементов. Он показал также, что почти любой конечный полный в P_k базис является оптимальным. При реализации функций схемами для любого полного конечного базиса асимптотически точная оценка соответствующей функции Шеннона анонсирована в работе С. А. Ложкина[23]. При реализации функций формулами для некоторых полных в P_k

[19] *Lau D.* Prävollständige Klassen von $P_{k,l}$ // Elektron. Informationsverarb. Kybernet. EIK, **11**. 1975. P. 10–12, 624–626.

Burosh G., Dassow J., Harnau W., Lau D. On subalgebras of an algebra of predicates // J. Inf. Process Cybern. 1985. EIK 21, 1/2. P. 9–22.

Lau D. Über abgeschlossene Teilmengen von $P_{k,2}$ // J. Inf. Process. Cybern. 1988. EIK 24, 10. P. 495–513.

[20] *Lau D.* Über abgeschlossene Teilmengen von $P_{3,2}$ // J. Inf. Process. Cybern. 1988. EIK 24, 11/12. P. 561–572.

[21] *Grünwald N.* Bestimmung sämtlischer abgeschlossenen Mengen aus $P_{3,2}$, deren Projektion F_8^n ist // Rostock. Math. Kolloq. 1983. 23. P. 5–26.

Grünwald N. Beschreibung aller abgeschlossenen Mengen aus $P_{3,2}$, deren Projektion F_8^n ist, mit Hilfe von Relationen // 1983. Rostock. Math. Kolloq. 23. P. 27–34.

[22] *Орлов В. А.* Реализация функций из P_k схемами в произвольном базисе из функциональных элементов // Докл. РАН. 1998. Т. 359, № 3. С. 308–309.

Орлов В. А. Об оптимальности почти всех базисов из P_k // Докл. РАН. 1998. Т. 363, № 5. С. 602–603.

[23] *Ложкин С. А.* Об асимптотическом поведении функции Шеннона для сложности схем из функциональных элементов в k-значной логике // Труды IV Международной конференции «Дискретные модели в теории управляющих систем» (Красновидово, 19-25 июня 2000 г.). М.: МАКС Пресс, 2000. С. 64–67.

($k \geqslant 3$) базисов асимптотически точные формулы для соответствующих функций Шеннона получены в работах Е. Ю. Захаровой[24], С. Б. Гашкова[25] и других авторов. Примеры последовательностей функций многозначной логики, сложности которых в классе формул над некоторыми конечными неполными системами имеют сверхэкспоненциальный порядок роста от числа переменных, приведены в работах А. Б. Угольникова[26]. Экспоненциальные нижние оценки для сложности реализации функций k-значной логики ($k \geqslant 3$) схемами из функциональных элементов в неполных базисах получены Г. А. Ткачевым[27].

Цель работы

Целью работы является получение верхних и нижних оценок сложности реализации формулами над конечными системами функций трехзначной логики, принимающих значения из множества $\{0, 1\}$.

Основные методы исследования

В диссертации используются методы дискретной математики и математической кибернетики, в частности, методы теории синтеза и сложности управляющих систем и теории функциональных систем.

Научная новизна

Все результаты работы являются новыми. В диссертации получены следующие основные результаты.

1. Для каждого конечно-порожденного замкнутого класса F функций из $P_{3,2}$, отличного от множества всех псевдолинейных функций и

[24] *Захарова Е. Ю.* Реализация функций из P_k формулами // Матем. заметки. 1972. Т. 11, №1. С. 99–108.

[25] *Гашков С. Б.* О параллельном вычислении некоторых классов многочленов с растущим числом переменных // Вестник Московского университета. Сер. 1, Математика. Механика. М.: Изд-во МГУ, 1990. № 2. С. 88–92.

[26] *Угольников А. Б.* О сложности реализации формулами одной последовательности функций многозначной логики // Математические вопросы кибернетики. М.: Наука, 1989. № 2. С. 174–176.

Угольников А. Б. О сложности реализации формулами одной последовательности функций 4-значной логики // Вестник Московского университета. Сер. 1, Математика. Механика. М.: Изд-во МГУ, 2004. № 3. С. 52–55.

[27] *Ткачев Г. А.* О сложности реализации одной последовательности функций k-значной логики // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 15. Вычисл. матем. и кибернетика. 1977. №1. С. 45–57.

такого, что проекция F совпадает с множеством всех линейных булевых функций, и некоторой конечной системы, порождающей класс F, найдены точные формулы для соответствующих функций Шеннона. Приведены также примеры самых сложных функций для всех таких классов.

2. Для каждого конечно-порожденного максимального замкнутого класса F функций из $P_{3,2}$ и некоторой конечной системы, порождающей класс F, получены верхние и нижние оценки для соответствующих функций Шеннона. На основе этих оценок получены асимптотически точные формулы для функций Шеннона, соответствующих некоторым максимальным замкнутым классам.

3. Выделено некоторое счетное семейство $\mathcal{B}$ замкнутых классов булевых функций и показано, что для каждого замкнутого класса F функций из $P_{3,2}$, проекция которого принадлежит семейству $\mathcal{B}$, и любой конечной системы, порождающей класс F, функция Шеннона по глубине, соответствующая классу F, имеет линейный порядок роста.

Теоретическая и практическая ценность

Диссертация имеет теоретический характер. Результаты диссертации могут найти применение в исследованиях в теории синтеза и сложности управляющих систем.

Апробация результатов

Результаты диссертации неоднократно докладывались на семинаре «Функции многозначной логики и смежные вопросы» под руководством проф. С. Б. Гашкова, проф. Р. М. Колпакова и проф. А. Б. Угольникова (2008 – 2010 гг.), на семинаре «Синтез и сложность управляющих систем» под руководством проф. О. М. Касим-Заде (2010 г.), на семинаре «Математические вопросы кибернетики» под руководством проф. О. М. Касим-Заде (2010 г.), на IX Межд. семинаре «Дискретная математика и ее приложения» (Москва, 18–23 июня 2007 г.), на VIII Межд. конференции «Дискретные модели в теории управляющих систем» (Москва, 6–9 апреля 2009 г.), на VII молодежной научной школе по дискретной математике и ее приложениям (Москва, 18–22 мая 2009 г.), на XVIII Межд.

школе-семинаре «Синтез и сложность управляющих систем» им. академика О. Б. Лупанова (Пенза, 28 сентября – 3 октября 2009 г.), на X Межд. семинаре «Дискретная математика и ее приложения» (Москва, 1–6 февраля 2010 г.), на Межд. научной конференции «Ломоносов-2010» (Москва, 12–15 апреля 2010 г.).

Публикации

Основные результаты диссертации опубликованы в 7 работах, список которых приведен в конце автореферата [1 – 7].

Структура и объем диссертации

Диссертация состоит из введения, четырех глав и списка литературы. Полный объем диссертации — 106 страниц, список литературы содержит 112 наименований.

Содержание работы

В диссертации рассматривается задача о сложности реализации функций из $P_{3,2}$ (множества всех функций трехзначной логики, принимающих значения из множества $\{0, 1\}$) формулами над конечными системами. Для ряда конечных систем получены верхние и нижние оценки сложности реализации функций из замкнутых классов, порожденных этими системами.

Дадим необходимые определения. Пусть $E_k = \{0, 1, ..., k-1\}$, $k \geqslant 2$. Обозначим через E_k^n множество всех наборов $\widetilde{\alpha} = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$, таких, что $\alpha_1, ..., \alpha_n \in E_k$, $n \geqslant 1$. Множество всех функций k-значной логики обозначим через P_k, а множество всех функций из P_k, принимающих значения только из множества E_2, — через $P_{k,2}$.

Будем придерживаться следующих обозначений[28] замкнутых классов булевых функций: S — множество всех самодвойственных функций; T_i — множество всех функций, сохраняющих константу i, $i = 0, 1$; M — множество всех монотонных функций; L — множество всех линейных функций; O^m — множество всех функций, удовлетворяющих условию

[28] См.: *Угольников А. Б.* Классы Поста. М.: Изд-во ЦПИ при механико-математическом факультете МГУ, 2008.

$< 0^m >$, $m = 2, 3, ..., \infty$; I^m — множество всех функций, удовлетворяющих условию $< 1^m >$, $m = 2, 3, ..., \infty$; K — множество всех конъюнкций; D — множество всех дизъюнкций; U — множество всех функций, существенно зависящих не более чем от одной переменной; C — множество всех функций, не имеющих существенных переменных.

Пусть $i \in E_2$, $m = 2, ..., \infty$. Положим

$$L_i = L \cap T_i, M_i = M \cap T_i, K_i = K \cap T_i, D_i = D \cap T_i, U_i = U \cap T_i, C_i = C \cap T_i;$$

$$T_{01} = T_0 \cap T_1, M_{01} = M_0 \cap M_1, L_{01} = L_0 \cap L_1, K_{01} = K_0 \cap K_1, D_{01} = D_0 \cap D_1;$$

$$U_{01} = U_0 \cap U_1, S_{01} = S \cap T_{01}, SM = S \cap M, SL = S \cap L;$$

$$SU = S \cap U, MU = M \cap U, O_0^m = T_0 \cap O^m, I_1^m = T_1 \cap I^m;$$

$$MO^m = M \cap O^m, MI^m = M \cap I^m, MO_0^m = M \cap O_0^m, MI_1^m = M \cap I_1^m.$$

Определим семейства N_1, N_2, N_3 замкнутых классов булевых функций следующим образом. Положим

$$N_1 = \{P_2, T_0, T_1, T_{01}, M, M_0, M_1, M_{01}, S, S_{01}, SM,$$

$$O^m, O_0^m, MO^m, MO_0^m, I^m, I_1^m, MI^m, MI_1^m, \quad 2 \leqslant m < \infty\},$$

$$N_2 = \{L, L_0, L_1, LS, L_{01}\},$$

$$N_3 = \{O^\infty, I^\infty, MO^\infty, MI^\infty, O_0^\infty, I_1^\infty, MO_0^\infty, MI_1^\infty,$$

$$K, K_0, K_1, K_{01}, D, D_0, D_1, D_{01}, U, U_0, U_1, U_{01}, MU, SU, C, C_0, C_1\}.$$

Из результатов Э. Л. Поста следует, что $N_1 \cup N_2 \cup N_3$ — это множество всех замкнутых классов булевых функций.

Пусть $f(x_1, ..., x_n) \in P_{3,2}$. Проекцией функции $f(x_1, ..., x_n)$ называется такая булева функция $(prf)(x_1, ..., x_n)$, значение которой на произвольном наборе $\widetilde{\alpha} \in E_2^n$ определяется равенством $(prf)(\widetilde{\alpha}) = f(\widetilde{\alpha})$. Таким образом, каждой функции $f \in P_{3,2}$ поставлена в соответствие функция $prf \in P_2$. В дальнейшем функцию $(prf)(x_1, ..., x_n)$ будем обозначать через $prf(x_1, ..., x_n)$. Проекцией prF множества функций $F \subseteq P_{3,2}$ называется множество $\bigcup \{prf\}$, где объединение берется по всем функциям $f \in F$.

Для каждого замкнутого класса булевых функций B определим множество функций

$$pr^{-1}B = \{f \in P_{3,2} \mid prf \in B\}.$$

Легко видеть, что множество $pr^{-1}B$ является замкнутым классом функций из $P_{3,2}$. Замкнутый класс $pr^{-1}B$ называется максимальным классом (соответствующим классу $B \subseteq P_2$). Таким образом, каждому замкнутому классу B булевых функций соответствует максимальный класс $pr^{-1}B \subseteq P_{3,2}$. Очевидно, что класс $pr^{-1}B$ содержит каждый замкнутый класс H из $P_{3,2}$, такой, что $prH = B$. Для каждого замкнутого класса булевых функций B определим множество замкнутых классов

$$\mathfrak{N}(B) = \{A \subseteq P_{3,2} \mid A = [A],\ prA = B\}.$$

В вышеупомянутых работах показано, что максимальный класс $pr^{-1}B$ имеет конечную порождающую систему в тех и только тех случаях, когда $B \notin \{C, C_0, C_1\}$. Показано также, что если $B \in N_1$, то семейство $\mathfrak{N}(B)$ конечно, если $B \in N_2$, то $\mathfrak{N}(B)$ счетно, если $B \in N_3$, то $\mathfrak{N}(B)$ имеет мощность континуума.

Функция f из $P_{3,2}$ называется псевдолинейной, если $prf \in L$. Известно[29] описание множества всех замкнутых классов псевдолинейных функций. Будем обозначать замкнутые классы, проекция которых совпадает с множеством L всех линейных булевых функций, через $\mathcal{L}$, $\mathcal{L}_2$, $Z_{2,0} \cap \mathcal{L}$, $Z_{2,1} \cap \mathcal{L}$, $\mathcal{L}_{2,r}$, где $r = 1, 2, ..., \infty$. Известно также, что все перечисленные классы, за исключением класса $\mathcal{L}_{2,\infty}$, являются конечно-порожденными.

Пусть Ψ — конечная система функций из P_k, $k \geqslant 2$, $[\Psi]$ — замыкание системы Ψ относительно операций суперпозиции и введения несущественной переменной. Пусть $f(x_1, ..., x_n) \in [\Psi]$, Φ — формула над Ψ, реализующая функцию f, а $F \subseteq [\Psi]$. Через $L(\Phi)$ обозначим число символов переменных, входящих в формулу Φ (сложность формулы Φ), через $L_\Psi(f)$ — сложность реализации функции $f \in F$ над системой Ψ, а через $L_\Psi(F(n))$ — функцию Шеннона по сложности для множества F. Через $D(\Phi)$ будем обозначать глубину формулы Φ, через $D_\Psi(f)$ — глубину реализации функции $f \in F$ над системой Ψ, а через $D_\Psi(F(n))$ — функцию Шеннона по глубине для множества F.

Во **введении** приводится обзор известных результатов, связанных с темой диссертации, и формулируются основные полученные в диссертации результаты.

В **главе 1** приводятся основные определения и обозначения, использующиеся в работе, а также вспомогательные утверждения. В частности, доказывается ряд свойств функций из $P_{3,2}$, находятся конечные поро-

[29] См.: *Lau D.* Function Algebras on Finite Sets. Springer-Verlag, Berlin, 2006.

ждающие системы некоторых замкнутых классов функций, приводятся известные простейшие методы синтеза.

В **главе 2** изучаются конечные системы псевдолинейных функций и замкнутые классы, порожденные этими системами. Строятся конечные порождающие системы $\mathfrak{D}_r$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{E}$ классов $\mathcal{L}_{2,r}$, $\mathcal{L}_2$, $Z_{2,0} \cap \mathcal{L}$ и $Z_{2,1} \cap \mathcal{L}$ соответственно, $1 \leqslant r < \infty$. Для функций из этих классов доказываются верхние и нижние оценки сложности.

Для каждой псевдолинейной функции f строится каноническое представление. На основе этого представления определяются специальные множества функций H_f, J_f, K_f и Y_f. Кроме того, для каждой функции f из класса $\mathcal{L}_2$ вводятся величины $A(f)$ и $B(f)$. Доказываются следующие теоремы о сложности функций из рассматриваемых классов.

Теорема 1. *Пусть $f(x_1, ..., x_n)$, $g(x_1, ..., x_n)$ и $h(x_1, ..., x_n)$ — произвольные функции из классов $\mathcal{L}_{2,r}$, $Z_{2,0} \cap \mathcal{L}$ и $Z_{2,1} \cap \mathcal{L}$ соответственно, существенно зависящие от n переменных, $n \geqslant 2$, $1 \leqslant r < \infty$. Тогда имеют место равенства*

$$L_{\mathfrak{D}_r}(f) = |J_f| + |H_f| + r|K_f|,$$

$$L_{\mathfrak{A}}(g) = |J_g| + |H_g|, \quad L_{\mathfrak{E}}(h) = |J_h| + |H_h|.$$

В этой главе также находятся точные оценки для соответствующих функций Шеннона.

Теорема 2. *Пусть $Q = Z_{2,0} \cap \mathcal{L}$, $U = Z_{2,1} \cap \mathcal{L}$, $r \geqslant 1$. Тогда имеют место равенства*

$$L_{\mathfrak{D}_r}(\mathcal{L}_{2,r}(n)) = 1 + n + r(C_n^1 + C_n^2 + ... + C_n^r), \quad n \geqslant r \geqslant 1; \tag{1}$$

$$L_{\mathfrak{A}}(Q(n)) = L_{\mathfrak{E}}(U(n)) = n + 1, \quad n \geqslant 2; \tag{2}$$

$$L_{\mathfrak{C}}(\mathcal{L}_2(n)) = n2^{n-1} + 2^{n+1} - 1, \quad n \geqslant 2. \tag{3}$$

Равенства (1) и (2) извлекаются непосредственно из теоремы 1. Опишем кратко схему доказательства равенства (3). Нижняя оценка в (3) доказывается следующим образом. Сначала изучаются свойства минимальных формул над системой $\mathfrak{C}$. Каждой минимальной формуле ставится в соответствие некоторое дерево. При этом все висячие вершины этого дерева разбиваются на два типа. Затем для каждого $n \geqslant 2$ определяется функция $\tau_n(x_1, ..., x_n)$, каноническое представление которой имеет специальный вид. Для минимальной формулы Φ, реализующей функцию τ_n, рассматривается дерево T, соответствующее формуле Φ. В дереве T оценивается по-отдельности число висячих вершин каждого типа. В результате получается нижняя оценка для величины $L_{\mathfrak{C}}(\tau_n)$, а, следовательно, и для величины $L_{\mathfrak{C}}(\mathcal{L}_2(n))$.

Для получения верхней оценки в (3) сначала для любой функции $f \in \mathcal{L}_2(n)$, существенно зависящей от $n \geqslant 2$ переменных, доказываются неравенства

$$|Y_f| \leqslant n2^{n-1} + 2^n, \quad B(f) \leqslant 2^n - 1.$$

Затем доказывается неравенство

$$L_{\mathfrak{C}}(f) \leqslant |Y_f| + B(f).$$

Из этих соотношений следует верхняя оценка для функции $L_{\mathfrak{C}}(\mathcal{L}_2(n))$.

В этой главе также для каждой функции f из множества $\mathcal{L}_2(n)$, существенно зависящей от $n \geqslant 2$ переменных, доказывается равенство $L_{\mathfrak{C}}(f) = |Y_f| + A(f)$. Отсюда, с учетом неравенства $A(f) \leqslant B(f)$, в частности, следуют неравенства

$$|Y_f| \leqslant L_{\mathfrak{C}}(f) \leqslant |Y_f| + B(f),$$

из которых для широкого класса последовательностей функций можно получить верхние оценки сложности, близкие к соответствующим нижним оценкам.

Кроме того, в главе 2 для максимального класса $\mathcal{L} = pr^{-1}L$ и некоторой конечной порождающей системы $\mathfrak{B}$ этого класса приведено асимптотически точное равенство для функции $L_{\mathfrak{B}}(\mathcal{L}(n))$ (доказательство которого следует из результатов главы 3).

Теорема 3. *Имеет место соотношение*

$$L_{\mathfrak{B}}(\mathcal{L}(n)) \sim \frac{3^n}{\log_2 n}.$$

В **главе 3** рассматривается задача о сложности реализации функций из конечно-порожденных максимальных замкнутых классов. Сначала с помощью градиентного алгоритма[30] строится специальное разби-

[30] См.: *Васильев Ю. Л., Глаголев В. В.* Метрические свойства дизъюнктивных нормальных форм // Дискретная математика и математические вопросы кибернетики. Т. 1. / Под ред. С. В. Яблонского и О. Б. Лупанова. М.: Наука, 1974. С. 99–148.

ение множества E_3^r, $r \geqslant 3$, на подмножества $U_0, U_1, ..., U_{T(r)}$. При этом каждое множество U_i, $i = 1, ..., T(r)$, обладает следующими свойствами:

1) U_i является подмножеством некоторого шара радиуса 1;

2) найдется $l = l(i)$, $1 \leqslant l \leqslant r$, такое, что l-я компонента в каждом наборе из U_i равна 2.

Затем оценивается мощность данного разбиения. Далее на основе этого разбиения строится представление функций из максимальных классов, аналогичное (третьему) представлению булевых функций из работы О. Б. Лупанова[31]. После этого на основе полученного представления вычисляются верхние оценки сложности реализации функций. Наконец, приводятся доказательства мощностных нижних оценок[32] для соответствующих функций Шеннона.

В этой главе для каждого замкнутого класса булевых функций B, такого, что $U_{01} \subseteq B$, определяется некоторая конечная система $G = G(B)$, которая порождает класс $pr^{-1}B$. Доказывается следующая теорема.

Теорема 4. *Пусть B — произвольный замкнутый класс булевых функций, такой, что $U_{01} \subseteq B$. Тогда выполняются соотношения*

$$\frac{3^n}{\log_2 n} \lesssim L_G(pr^{-1}B(n)) \lesssim \frac{3^n}{\log_2 n} + L_{prG}(B(n)).$$

Из этой теоремы следует, что задача о поведении функции Шеннона $L_G(pr^{-1}B(n))$ в некоторых случаях сводится к задаче о сложности реализации булевых функций в неполных базисах (то есть к задаче о поведении функции $L_{prG}(B(n))$). В частности, из теоремы 4 и известных ранее оценок сложности булевых функций извлекаются асимптотически точные формулы для функций Шеннона, соответствующих некоторым максимальным классам.

Теорема 5. *Пусть B — замкнутый класс булевых функций, такой, что выполняется по крайней мере одно из следующих условий:*

1) $L_{01} \subseteq B$;

2) $M_{01} \subseteq B$;

3) $B \in \{O^\infty, O_0^\infty, I^\infty, I_1^\infty, MO^\infty, MO_0^\infty, MI^\infty, MI_1^\infty\}$;

4) $B \in \{D_{01}, D_0, D_1, D, K_{01}, K_0, K_1, K, U, SU, U_{01}, MU, U_0, U_1\}$.

[31] *Лупанов О. Б.* О синтезе некоторых классов управляющих систем // Проблемы кибернетики. Вып. 10. М.: Наука, 1963. С. 63–97.

[32] См.: *Лупанов О. Б.* Асимптотические оценки сложности управляющих систем. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1984.

Тогда выполняется соотношение

$$L_G(pr^{-1}B(n)) \sim \frac{3^n}{\log_2 n}.$$

Отметим, что из теоремы 5 непосредственно следует утверждение теоремы 3.

В **главе 4** рассматривается семейство замкнутых классов функций из $P_{3,2}$, проекция которых принадлежит определенному выше множеству N_1 замкнутых классов булевых функций. В диссертации для каждого класса $B \in N_1$, для каждого класса H из множества $\mathfrak{N}(B)$ и для произвольной конечной системы G, порождающей класс H, получено описание (с точностью до порядка) поведения функции $D_G(H(n))$.

Теорема 6. *Пусть B — произвольный замкнутый класс булевых функций из множества N_1, H — произвольный замкнутый класс функций из $P_{3,2}$, такой, что $prH = B$, а G — произвольная конечная порождающая система класса H. Тогда выполняется соотношение*

$$D_G(H(n)) \asymp n.$$

При доказательстве этой теоремы используются методы синтеза формул над неполными системами, реализующих функции алгебры логики[33].

Благодарности

Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю, доктору физико-математических наук, профессору А. Б. Угольникову за постановку задачи и постоянное внимание к работе. Автор благодарит доктора физико-математических наук, профессора Р. М. Колпакова и кандидата физико-математических наук О. С. Дудакову за ценные замечания, способствовавшие улучшению текста диссертации. Автор признателен коллективу кафедры дискретной математики механико-математического факультета МГУ имени М. В. Ломоносова за помощь и поддержку.

[33] См.: *Угольников А. Б.* О глубине формул в неполных базисах // Математические вопросы кибернетики. 1988. Вып. 1. С. 242–245.

Угольников А. Б. Глубина формул в некоторых классах k-значной логики // Вестник Московского университета. Сер. 1, Математика. Механика. М.: Изд-во МГУ, 1991. №4. С. 44–47.

Публикации автора по теме диссертации

1. *Дагаев Д. А.* О сложности псевдолинейных функций // Вестник Московского университета. Серия 1. Математика. Механика. 2010. № 2. С. 53–56.

2. *Дагаев Д. А.* О глубине формул, реализующих функции из некоторых классов трехзначной логики // Материалы IX Межд. семинара «Дискретная математика и ее приложения» (Москва, 18–23 июня 2007 г.). М.: Издательство механико-математического факультета МГУ, 2007. С. 84–87.

3. *Дагаев Д. А.* Глубина и сложность реализации формулами функций из некоторых классов трехзначной логики // Тезисы докладов XV Межд. конференции «Проблемы теоретической кибернетики» (Казань, 2–7 июня 2008 г.) Казань: Отечество, 2008. С. 24.

4. *Дагаев Д. А.* О сложности функций из некоторых классов $P_{3,2}$ // Труды VIII Межд. конференции «Дискретные модели в теории управляющих систем» (Москва, 6–9 апреля 2009 г.). М.: Макс-Пресс, 2009. С. 76–78.

5. *Дагаев Д. А.* Оценки сложности псевдолинейных функций // Материалы VII молодежной научной школы по дискретной математике и ее приложениям (Москва, 18–23 мая 2009 г.). Часть 1. С. 28–30.

6. *Дагаев Д. А.* Об одном классе псевдолинейных функций // Материалы XVIII Межд. школы-семинара «Синтез и сложность управляющих систем» имени академика О.Б. Лупанова (Пенза, 28 сентября – 3 октября 2009 г.). М.: Изд-во механико-математического факультета МГУ, 2009. С. 31–33.

7. *Дагаев Д. А.* О сложности реализации псевдолинейных функций специального вида // Материалы X Межд. семинара «Дискретная математика и ее приложения» (Москва, 1–6 февраля 2010 г.). М.: Издательство механико-математического факультета МГУ, 2010. С. 105–108.