МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

На правах рукописи
УДК. 515.12

Осипов Евгений Вячеславович

Некоторые вопросы теории слабо бесконечномерных пространств

01.01.04 — геометрия и топология

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва — 2011

Работа выполнена на кафедре общей топологии и геометрии Механико-математического факультета Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова.

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук, профессор Федорчук Виталий Витальевич.
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, профессор Агеев Сергей Михайлович.
	кандидат физико-математических наук Редкозубов Вадим Витальевич.
Ведущая организация:	Московский городской педагогический университет.

Защита диссертации состоится 10 июня 2011 г. в 16 ч. 45 м. на заседании диссертационного совета Д.501.001.84 при Московском государственном университете имени М.В. Ломоносова по адресу: Российская Федерация, 119991, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, дом 1, МГУ им М.В.Ломоносова, Механико-математический факультет, аудитория 14-08.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Механико-математического факультета МГУ (Главное здание, 14 этаж)

Автореферат разослан 27 апреля 2011 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
Д501.001.84 при МГУ
доктор физико-математических наук,
профессор

А.О. Иванов

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы.

Размерность является одним из важнейших инвариантом топологических пространств. Диссертация посвящена изучению различных подклассов класса слабо бесконечномерных пространств и размерностей определенных для этих классов.

Теория размерности конечномерных пространств как раздел общей топологии в целом сформировался к концу 30-х годов. Вспомним замечательную теорему о перегородках. Она утверждает, что нормальное пространство X имеет размерность $\dim X \leq n$, если для любой последовательности из $n+1$ пар замкнутых непересекающихся множеств существую такие перегородки P_i с $\bigcap_{i=1}^{n+1} P_i = \emptyset$. Данная теорема послужила основой для создании теории слабо бесконечномерных пространств.

Понятие слабого бесконечномерного пространства впервые было рассмотрено П. С. Александровым [1] в 1948 г.

Нормальное пространство называется *слабо бесконечномерным*, если для любой последовательности $\{F_i^1, F_i^2\}_{i=1}^{\infty}$ дизъюнктных пар замкнутых в X множеств существуют перегородки P_i между F_i^1 и F_i^2 с $\bigcap_{i=1}^{\infty} P_i = \emptyset$. Пространство, не являющееся слабо бесконечномерным пространством, называется *сильно бесконечномерным.*

Несколько лет спустя Ю. М. Смирнов предложил другое определение слабой бесконечномерности. В нем требуется, чтобы пересечение конечного числа перегородок P_i было пусто. Такие пространства стали называть *S-слабо бесконечномерными.* В классе компактов понятия слабой и S-слабой бесконечномерности совпадают.

Начало исследований в этом направлении было положено в 1959 г. работами Б. Т. Левшенко[2] и Е. Г. Скляренко[3].

Стало понятно, что слабо бесконечномерные пространства занимают важное место в классе бесконечномерных пространств. Была создана стройная внутренняя теория слабо бесконечномерных пространств и найдены соотношения с другими классами бесконечномерных пространств.

Важной и до сих пор нерешенной проблемой остается ответ на вопрос, поставленный в 70-ых годах, Б. А. Пасынковым:

Проблема 1. Будет ли слабо бесконечномерно произведение двух слабо бесконечномерных компактов.

---

[1] П. С. Александров. Предисловие к русскому переводу. В кн. В. Гуревич, В. Волмен, Теория размерности. Москва. 1948.

[2] Б. Т. Левшенко. О сильно бесконечномерных пространствах. // Вестник МГУ,сер. матем. — 1959. — No 5. — pp. 219-228.

[3] Е. Г. Скляренко. О размерностных свойствах бесконечномерных пространств. // Изв. Ан СССР, сер. матем. — 1959. — v. 23. — pp. 197-212.

Важным подклассом класса слабо бесконечномерных пространств является класс C-пространств. Свойство C для метрических пространств в 1973 г. ввел Хэйвер [4], доказавший, что локально стягиваемое пространство, представимое в виде объединения счетного числа C-пространств является ANR-пространством. В 1978 г. Аддис и Грэшем [5] предложили топологическую версию свойства C.

Нормальное пространство X называется C-пространством, если для любой последовательности $\{u_i\}_{i=1}^{\infty}$ его открытых покрытий существует последовательность $\{v_i\}_{i=1}^{\infty}$ дизъюнктных открытых семейств пространства X, такая что v_i вписано в u_i для $\forall i \in \mathbb{N}$, и $X = \bigcup\{\bigcup v_i : i \in \mathbb{N}\}$.

В последующие годы выяснилось, что C-пространства играют большую роль в различных разделах топологии. Так, Ансел[6] доказал, что клеточноподобное отображение компакта на C-компакт является наследственной шэйповой эквивалентностью. Отсюда вытекает, что бесконечномерный C-компакт имеет имеет бесконечную когомологическую размерность $\text{c-dim}_{\mathbb{Z}}$

А. Н. Дранишников[7] определил стабильную когомотопическую размерность c-dim_S и при помощи вышеупомянутой теоремой Ансела вывел равенство $\text{c-dim}_S X = \dim X$, для произвольного компакта X в предположении положительного решения следующей проблемы.

Проблема 2. Всякий ли слабо бесконечномерный компакт является C-пространством?

Отметим, что из положительного ответа на вторую проблему следует положительное решение первой.

В работах В. В. Успенского[8], Валова и Гутева[9] показано, что C-пространства играют большую роль в теории селекций многозначных отображений. А именно, известная G_δ-проблема Э. Майкла имеет положительное решение в тех и только тех случаях, когда область определения селекции есть C-пространство.

В работах В. В. Федорчука [10, 11, 12] для каждого $m = 2, 3, ..., \infty$ а так-

---

[4] W. E. Haver. A covering properties for metric spaces.// Topology Conference at Virginia Polytechnic Institute, 1973, Lecture Notes in Nath, V. 375, pp. 108–113, 1974.

[5] D. F. Addis and J. H. Gresham. A class of infinite-dimensional spaces. I. Dimension theory and Alexandroff'es problem. // Fund. Math. — 1978. — v. 101, No 3. — pp. 195-205.

[6] F. D. Ancel. The role of countable dimensionality in the theory of cell-like relations. // Trans. Amer. Math. Soc. — 1985. — v. 287, No 1. — 1-40.

[7] A. N. Dranishnikov. Generalized cohomological dimension of compact metric spaces. // Tsukuba J. Math. — 1990. — v.14 — 247-262.

[8] V. V. Uspenskii. A selection theorem for C-spaces.// Topol. and Appl. — 1998 — v.85 — 351-374.

[9] V. Gutev, V. Valov. Continuos selections and C-spaces. // Proc. Amer. Math. Soc. — 2002 — v.130 — 233-242.

[10] V.V.Fedorchuk. Questions on weakly infinite-dimensional spaces. Open Problems in Topology II (E.M.Pearl, ed).// Elsevier, Amsterdam. — 2007. — pp. 637-645.

[11] V.V.Fedorchuk. Weakly infinite-dimensional spaces.// Russian Math. Surveys. — 2007. — v. 42, No 2. — pp. 1-52.

[12] V.V.Fedorchuk. Finite dimension modulo simplicial complexes and ANR-compacta.// Математический

же для класса симплициальных комплексов $\mathfrak{R}$ определены w-m-C, m-C-пространства и $\mathfrak{R}$-wid-пространства (соотв. S-w-m-C, S-m-C-пространства и S-$\mathfrak{R}$-wid-пространства). Данные классы расположены между классами C и wid-пространств. Оказалось (см. также[13, 14, 15]), что по своим структурным свойствам данные классы пространств похожи на слабо бесконечномерные пространства. Так, для них имеют место теоремы счетной и локально конечной суммы и теоремы типа Даукера. Данная работа посвящена дальнейшему изучению этих классов пространств.

В своей работе Борст [16] при помощи разработанного им метода, определил трансфинитную размерность $\dim_2$ для всех S-слабо бесконечномерных пространств. Данный метод оказался универсальным, и можно размерность определять для S-m-C и S-w-m-C-пространств, а также для S-K-wid-пространств[15]. В данной работе работе продолжено изучение свойств вышеуказанных размерностей.

Для лебеговой размерности dim хорошо известна теорема суммы, доказанная еще в 1921-1922 г. Менгером и Урысоном независимо (см., например, [17]). Она утверждает, что если пространство X представляется в виде объединения счетного числа замкнутых множеств, размерность которых $\leqslant n$, то и $\dim X \leqslant n$. Пример, построенный Левшенко [18], показывает, что такая теорема суммы не выполняется для трансфинитного случая. Именно, пространство Смирнова S^{ω_0+1} можно разложить в сумму двух замкнутых подпространств, таких, что их большая трансфинитная размерность размерность равна, а значит и размерность Борста равна ω_0, в то время как $\dim_2 S^{\omega_0+1} = \operatorname{Ind} S^{\omega_0+1} = \omega_0 + 1$.

Борст для трансфинитной размерности $\dim_2$ доказал теорему конечной суммы. Данная теорема утверждает, что если пространство $X = X_1 \cup X_2$, где X_1 и X_2 замкнуты в X, то

$$\dim_2 X \leqslant \max\{\dim_2 X_1\ ,\ \dim_2 X_2\} \oplus (\dim_2(X_1 \cap X_2) + 1).$$

Вопрос рассматриваемый в данной работе касается теорем суммы для размерностей $\dim_m$ и tr-K-dim, где K симплициальный комплекс.

вестник. — 2009. — No 61. — pp. 25-52.

[13] V.V.Fedorchuk, Questions on dimensions modulo simplicial complexes. I. Infinite-dimensional spaces // Questions Answers Gen. Topology — 2010. — v.28, No 2.

[14] V.V.Fedorchuk, Questions on dimensions modulo simplicial complexes. II. Infinite-dimensional spaces // Questions Answers Gen. Topology — 2010. — v.28, No 1.

[15] V.V.Fedorchuk, Questions on dimensions modulo simplicial complexes. III. Infinite-dimensional spaces // Questions Answers Gen. Topology — 2010. — v.28, No 1.

[16] P.Borst. Classification of weakly infinite-dimensional spaces. I. A transfinite extension of covering dimension. // Fund. Math. — 1988. — v. 130, No 5. — pp. 1-25.

[17] П.С.Александров. Б.А. Пасынков. Теория размерности. Москва. "Наука". 1973

[18] Б.Т.Левшенко. О бесконечномерных пространствах. // ДАН СССР — 1961. — т. 139, No 5. — pp. 286-289.

Хорошо известен классический результат о Лебеговой размерности произведения компактных конечномерных пространств. Размерность произведения не превосходит суммы размерностей множителей (см.[20]). Для трансфинитой размерности $\dim_2$ Борст доказал, что $\dim_2(X \times C) = \dim_2 X$, где X компактное пространство, а C канторово совершенное множество.

В данной работе рассматривается аналогичное равенство для размерности tr-K-dim.

Еще одна затрагиваемая тема — вопрос о существовании универсальных пространств для данной размерности и веса (и в данном классе пространств). В теории размерности важен вопрос о существовании таких пространств.

Пусть дана размерностная функция d и заданы кардинальное число $\tau \geqslant \omega_0$, а также целое неотрицательное число n. Существует ли пространство Π_τ^n веса τ и размерности n, такое что любое пространство X размерности $dX \leqslant n$ и веса τ вкладывается в Π_τ^n? Данный вопрос тесно связан с факторизационными теоремами. Факторизационные теоремы утверждают, что в определенных условиях для отображения $f : X \to Y$ существуют: такое пространство Y и такие отображения $g : X \to Y$, $h : Y \to Z$, что $f = gh$, $dY \leqslant dX$, $\omega(Y) \leqslant \omega(Z)$, и если Z принадлежит некоторому классу пространств $\Im$, то и $Y \in \Im$.

Большая индуктивная трансфинитная размерность Ind впервые была определена Смирновым[19]. Факторизационную теорему для нее доказал Пасынков[20]. Далее в 2007 году Федорчук рассмотрел индуктивную размерность Ind_m, являющуюся обобщением размерности $\mathrm{Ind} = \mathrm{Ind}_2$, и для нее также доказал факторизационную теорему. Затем для любого класса, состоящего из симплициальных комплексов $\Re$, в частности для симплициального комплекса K, Федорчук определил трансфинитную размерность tr-K-Ind. Данная размерность обобщает большую трансфинитную размерность и при $K = S^0$ tr-K-Ind = Ind.

Естественно встает вопрос, поставленный В.В. Федорчуком, об существовании универсальных пространств для размерности tr-K-Ind.

[19]Ю.М.Смирнов. Об универсальных пространствах для некоторых классов пространств. // ИАН СССР — 1959. — т. 23, No 5. — pp. 185-196.

[20]Б.А.Пасынков. О размерности нормальных пространств. // ДАН СССР — 1971. — т. 201, No 5. — pp. 1049-1052.

Цель работы.

1) изучить различные подклассы класса слабо бесконечномерных пространств;

2) изучить трансфинитную размерность по модулю заданного класса систем множеств;

3) изучить большую трансфинитную размерность по модулю заданного класса систем множеств.

Научная новизна.

В диссертации получены следующие новые результаты:

1. Доказывается совпадение классов w-m-C-пространств (соотв. S-w-m-C-пространства) с классом слабо бесконечномерных пространств в смысле Алексндрова (соответственно в смысле Смирнова)

2. Для симплициального комплекса K и целого m ($m > 2$) доказывается теорема суммы для размерности tr-K-dim и $\dim_m$.

3. Для произвольного компакта X доказывается равенство $\text{tr-K-dim}\, X = \text{tr-K-dim}(X \times C)$, где C — канторово совершенное множество.

4. Доказывается факторизационная теорема для размерности tr-K-Ind.

5. Положительно решается вопрос о существовании универсального компакта и компактном расширении для данного веса и данной размерности.

Основные методы исследования.

В работе используются топологические методы, методы теории обратных спектров, методы теории размерности. Также используется арифметика кардинальных чисел и метод апроксимации топологических пространств симплициальными комплексами (нервами покрытий этих тополгических пространств).

Теоретическая и практическая ценность работы.

Техника диссертации имеет теоретический характер. Изложенные в диссертации подходы и полученные результаты могут представлять интерес для специалистов в теории бесконечномерных пространств и теории размерности.

Апробация работы.

Результаты диссертации докладывались на следующих научно-исследовательских семинарах и конференциях:

- Международная конференция по Дифференциальным уравнениям и топологии, посвященная 100-летию со дня рождения Л.С. Понтрягина (Москва, 2008).
- Научно-исследовательский семинар по общей топологии им. П.С. Александрова под руководством профессоров В.В. Федорчука, Б.А. Пасынкова, В.И. Пономарева и В.В. Филиппова (Москва, 2007, 2009).
- Международная конференция Topology and it‘s applications в Греции (Nafpaktos, 26-30 июня 2010 г.)

Публикации.

Основное содержание диссертации было опубликовано в 5 работах, список которых приведен в конце автореферата [1]—[5].

Структура и объем диссертации.

Диссертация состоит из введения, 5 глав и списка литературы. Объем диссертации — 59 страниц, библиография включает 30 наименований.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во **«введении»** содержится сводка результатов, связанных с темой диссертации, дается постановка задачи, дается краткое изложение основных результатов полученных в диссертации.

В **первой главе** «Предварительные сведения» мы формулируем основные определения и факты из общей топологии и теории размерности необходимые нам для дальнейшей работы. Напомним конструкцию Борста.

Пусть L - произвольное непустое множество. Обозначим семейство всех непустых конечных подмножеств L через $\operatorname{Fin} L$.

Пусть $M \subset \operatorname{Fin} L$. Для $\sigma \in \{\emptyset\} \cup \operatorname{Fin} L$. Полагаем

$$M^\sigma = \{\tau \in \operatorname{Fin} L \text{ и } \sigma \cup \tau \in M : \sigma \cap \tau = \emptyset\}.$$

Для $a \in L$ множество $M^{\{a\}}$ будем обозначать M^a.

Определим порядковое число $\operatorname{Ord} M$ по индукции.

1) $\operatorname{Ord} M = 0$, если $M = \emptyset$.

2) $\operatorname{Ord} M \leqslant \alpha$, если $\operatorname{Ord} M^a < \alpha$ для любого $a \in L$.

3) $\operatorname{Ord} M = \alpha$, если $\operatorname{Ord} M \leqslant \alpha$ и неравенство $\operatorname{Ord} M < \alpha$ не выполняется.

3) $\operatorname{Ord} M = \infty$, если $\operatorname{Ord} M > \alpha$, для любого α.

Напомним определение нижней суммы ординалов. Пусть α, β ординалы. Представим их в виде $\alpha = \alpha' + p$ и $\beta = \beta' + q$, где α', β' предельные ординалы, а p и q целые положительные числа, тогда нижняя сумма ординалов α и β равна:

$$\alpha \oplus \beta = \begin{cases} \alpha & \text{если } \alpha' > \beta', \\ \alpha + q = \beta + p & \text{если } \alpha' = \beta', \\ \beta & \text{если } \alpha' < \beta'. \end{cases}$$

Во **второй главе** «Слабо бесконечномерные пространства и размерность $\dim_{wm}$» определяются w-m-C и S-w-m-C-пространства. Именно, пусть X — топологическое пространство и m — целое число $\geqslant 2$ или $m = \infty$.

Семейство, состоящее из попарно-непересекающихся замкнутых множеств числом не более m, будем называть m-системой. Семейство, состоящее из конечного числа замкнутых попарно-непересекающихся замкнутых множеств, будем называть ∞-системой. Определим

$$\varphi_m(X) = \{\Phi : \Phi \text{ является } m - \text{системой в } X\}.$$

В дальнейшем будем предполагать, что m целое $\geqslant 2$ или $m = \infty$.

Если $\Phi = \{F_1, ..., F_m\}$ является m-системой в X, то *окрестностью* $O\Phi$ системы Φ мы называем любое семейство $\{OF_1, ..., OF_m\}$ попарно-непересекающихся окрестностей OF_j множеств F_j. Множество

$$P = X \setminus \bigcup_{i=1}^{m} OF_i$$

будем называть *перегородкой* системы Φ в X.

Говорят, что семейство $\varphi = \{\Phi_\alpha : \alpha \in A\} \subseteq \varphi_\infty$ *несущественно* , если существуют такие окрестности $O\Phi_\alpha$, $\alpha \in A$, что $\bigcup_{\alpha \in A} O\Phi_\alpha = X$. В противном случае семейство φ мы будем называть *существенной.*

Нормальное пространство X называется *w-m-C-простраством* (или кратко $X \in$ w-m-C), если любое бесконечное семейство $\varphi \subset \varphi_m(X)$ несущественно. Если любое бесконечное семейство $\varphi \subset \varphi_m$ содержит конечное несущественное подсемейство $\varphi_0 \subset \varphi$, то X мы называем *S-w-m-C-простраством* (или кратко $X \in$ S-w-m-C). Очевидны включения:

(a) S-w-m-C $\subseteq$ w-m-C;

(b) S-C $\subset$ S-∞-C $\subset$ ... $\subset$ S-w-3-C $\subset$ S-w-2-C $=$ s-wid;

$(c) C \subset$ S-∞-C $\subset$ ... $\subset$ w-3-C $\subset$ w-2-C $=$ wid .

Пусть $\operatorname{Fin}\varphi_m(X)$ множество всех конечных подмножеств множества $\varphi_m(X)$ и

$$M_m(X) = \{\sigma \in Fin\varphi_m(X) : \sigma \text{ существенно}\} \subset \operatorname{Fin}\varphi_m(X).$$

Воспользуемся конструкцией Борста и для нормального пространства X полагаем

$$\dim_{\omega m} X = \operatorname{Ord} M_m(X).$$

Заметим, что $\dim_{\omega 2} X$ совпадает с размерностью Борста $\dim_2 X$.

Федорчук доказал, что $\dim_{\omega m} X$ определена тогда и только тогда, когда $X \in$ S-w-m-C.

В силу включение (a)—(c) можно было бы предположить что все классы перечисленные в (a)—(c) различны, и отсюда следовал бы отрицательный ответ на проблему 2.

Однако, в диссертации доказывается следующий результат.

Теорема 1. Для каждого m имеем:

(1) w-m-C = wid;

(2) S-w-m-C = swid .

Из леммы и Теоремы 1 следует, что размерности $\dim_{\omega m}$ определены для любого слабо бесконечномерного пространства.

Следующий основной результат:

Теорема 2. Пусть X - S-слабо бесконечномерное пространство. Тогда все размерности $\dim_{\omega m} X$, $m = 2, ...\infty$ определены и

$$\dim_{\omega 2} X = \dim_{\omega m} X.$$

Похожим способом, в классе коллективно-нормальных пространств определяется понятие w-C-пространством, а также размерность $\dim_d$.

Для них можно показать анологичные теореме 1 и 2 результаты, именно:

Лемма 6. Для каждого коллективно-нормального пространства X имеем:

(1) $X \in$ w-C тогда и только тогда, когда $X \in$ wid;

(2) $X \in$ S-w-C тогда и только тогда, когда $X \in$ swid .

Теорема 3. Пусть X коллективно-нормальноое S-слабо бесконечномерное пространство. Тогда все размерности $\dim_d X$ определены и

$$\dim_{\omega 2} X = \dim_d X.$$

Третья глава «Теорема суммы для размерностей $\dim_m$ и tr-K-dim» посвящена теоремам суммы для для размерностей $\dim_m$ и tr-K-dim, где K симплициальный комплекс.

Открытое покрытие $u = \{U_1, ..., U_k\}$, пространства X будем называть *m-покрытием* , если u состоит из не более, чем m элементов. Через $\mathrm{cov}_m(X)$ будем обозначать семейство всех m-покрытий пространства X.

Последовательность покрытий $\{u_i\}_{i\in\omega}$ будем называть *несущественной*, если существует такая последовательность $\{v_i\}_{i\in\omega}$ дизъюнктных открытых в X семейств, что v_i вписано в u_i для любого $i \in \omega$ и выполнено следующее условие: $\cup_{i\in\omega}(\cup v_i) = X$, в противном случае такую последовательность будем называть *существенной* .

Нормальное пространство X называется m-C-*пространством* (соотв. S-m-C-*пространством*), если всякая последовательность $\{u_i\}_{i=1}^{\infty}$ его m-покрытий несущественна (соотв. существует такое N, что последовательность $\{u_i\}_{i=1}^{N}$ несущественна).

Семейство замкнутых множеств $\{F_1, ..., F_k\}$ будем называть *K-системой*, если нерв этой системы (как комплекс) принадлежит симплициальному комплексу K. Окрестностью K-системы $\Phi = \{F_1, ..., F_k\}$ будем называть такое открытое семейство $O\Phi = \{OF_1, ..., OF_k\}$, что $F_i \subset OF_i$ и $N(O\Phi) \subset N(\Phi)$, соответственно перегородкой K-системы Φ будем называть такое замкнутое множество P, что $X \setminus P$ есть тело некоторой K-окрестности Ψ.

Через $\mathrm{Exp}_K(X)$ будем обозначать множество всех K-систем в X.

Последовательность $\varphi = \{\Phi_1, ..., \Phi_r\}$, $\Phi_i \in \mathrm{Exp}_K(X)$, называется *несущественной* , если существуют такие перегородки P_i систем Φ_i, что $\bigcap_{i=1}^{r} P_i = \emptyset$, в противном случае такую последовательность назовем *несущественной* .

Нормальное пространство X называется K-wid-пространством (соответственно S-K-wid-пространством), если всякая последовательность $\{\Phi_i\}_{i\in\omega}$ K-систем несущественна (соответственно, существует такое N, что последовательность $\{\Phi_i\}_{i=1}^{N}$ несущественна).

Через $\mathrm{Fin}\,\mathrm{cov}_m(X)$ обозначим семейство всех конечных последовательностей m-покрытий пространства X и рассмотрим его подмножество:

$$M_m(X) = \{\sigma \in \mathrm{Fin}\,\mathrm{cov}_m(X) : \sigma \text{ существенно}\}.$$

Воспользуемся теперь конструкцией Борста, описанной выше и положим $L = \mathrm{Fin}\,\mathrm{cov}_m(X)$ и $M = M_m(X)$.

Полагаем

$$\dim_m X = \mathrm{Ord}\, M_m(X).$$

Через Fin $\mathrm{Exp}_K(X)$ обозначим семейство всех конечных последовательностей K-систем пространства X и рассмотрим его подмножество

$$T_K(X) = \{\sigma \in \text{Fin } \mathrm{Exp}_K(X) : \sigma \text{ существенно}\}.$$

Воспользуемся теперь конструкцией Борста, описанной выше и положим $L' = \text{Fin } \mathrm{Exp}_m(X)$ и $M' = T_K(X)$. Полагаем

$$\text{tr-K-}\dim X = \mathrm{Ord}\, T_K(X).$$

В диссертации доказывается

Теорема 4. Пусть $X = X_1 \cup X_2$, где X_1 и X_2 замкнуты в X и K симплициальный комплекс. Тогда:

1) $\dim_m X \leqslant \max\{\dim_m X_1\ ,\ \dim_m X_2\} \oplus (\dim_m(X_1 \cap X_2) + 1)$;

2) $\text{tr-K-dim}\, X \leqslant \max\{\text{tr-K-dim}\, X_1,\ \text{tr-K-dim}\, X_2\} \oplus (\text{tr-K-dim}(X_1 \cap X_2) + 1)$.

Как следствие, для C-пространств получаем.

Следствие 3. Если X является C-пространством и $X = X_1 \cup X_2$, где X_1 и X_2 замкнуты, то

$$\dim_c X \leqslant \max\{\dim_c X_1, dim_c X_2\} \oplus (\dim_c(X_1 \cap X_2) + 1).$$

В **четвертой главе** Доказывается монотонность по замкнутым множества размерности tr-K-dim.

Теорема 5. Пусть F замкнуто в X. Тогда

$$\text{tr-K-dim}\, F \leqslant \text{tr-K-dim}\, X.$$

Пусть C — канторово совершенное множество. Верен следующий результат.

Теорема 6. Если X компакт, то

$$\text{tr-K-dim}\, X = \text{tr-K-dim}(X \times C).$$

В **пятой главе** Мы доказываем факторизационную теорему для размерности tr-K-Ind.

Пусть K симплициальный комплекс. Размерность tr-K-Ind определяется следующим образом.

Для произвольного пространства X полагаем:

1) $\text{tr-K-Ind}\, X = -1$ *тогда и только тогда, когда* $X = \emptyset$*;*

2) $\text{tr-K-Ind}\, X \leqslant \alpha$*, если для любой K-системы Φ, существует перегородка P, такая, что* $\text{tr-K-Ind}\, P < \alpha$*;*

3) $\text{tr-K-Ind}\, X = \infty$*, если* $\text{tr-K-Ind}\, X > \alpha$ *для любого ординала α.*

Теорема 7. Пусть даны непрерывное отображение $f : X \to Z$ компакта X в компакт Z, а также замкнутое подмножество $F \subset X$ размерности $\text{tr-K-Ind}\, F = \alpha$. Тогда существует такой компакт Y и такие непрерывные отображения $g : X \to Y$ и $h : Y \to Z$, что:

1) $f = hg$;

2) $\omega Y \leq \omega Z$;

3) $\text{tr-K-Ind}\, g(F) \leq \alpha = \text{tr-K-Ind}\, F$.

Теорема 8. Для любого нормального пространства X размерности $\text{tr-K-Ind}\, X \leqslant n$, существует компактификация bX, такая, что

$$wbX = wX,\ \text{tr-K-Ind}\, bX \leqslant n.$$

Теорема 9. Пусть τ кардинал $\geqslant \omega_0$, K симплициальный комплекс, $n \in \omega$. Существует компакт $\Pi_K^{\tau n}$, такой, что $w\Pi_K^{\tau n} = \tau$, и $\Pi_K^{\tau n}$ топологически содержит любое нормальное пространство X, такое, что $wX \leqslant \tau$, $\operatorname{tr-K-Ind} X \leqslant n$.

Если комплекс $K * K$ нестягиваемый, то из теорем Федорчука следует, что для любого n существует m, что $\operatorname{tr-K-Ind} I^m = n$. В этом случае теорему 9 можно дополнить, написав, что размерность

$$\operatorname{tr-K-Ind} \Pi_K^{\tau n} = \operatorname{tr-K-dim} \Pi_K^{\tau n} = n.$$

Благодарности.

Автор выражает искреннюю благодарность своему научному руководителю профессору Виталию Витальевичу Федорчуку за постановку задач, постоянное внимание, многочисленные плодотворные обсуждения и помощь в работе. Автор выражает благодарность всему коллективу кафедры общей топологии и геометрии Механико-математического факультета МГУ имени М. В Ломоносова.

Список публикаций по теме диссертации.

[1] V.V. Fedorchuk, E.V. Osipov. Certain classes of weakly infinite-dimensional spaces and topological games.// Topology and its Applications —- 2008. — v.156, Issue 1. — Pages 61-69

[2] Е.В.Осипов. Теорема суммы для $\dim_m$.// Современные проблемы математики и механики — 2009. — т 3, математика, вып. 2 — pp. 164-167.

[3] Осипов Е.В. Теорема суммы для dim_m.// Дифференциальные уравнения и топология: Международной конференции Дифференциальных уравнений и топологии, посвященную 100-летию со дня рождения Л.С. Понтрягина: Тезисы докладов. – М.: Издательский отдел факультета ВМиК МГУ имени М.В. Ломоносова; МАКС Пресс, 2008, 478стр.

[4] Е.В.Осипов. Теорема суммы для $\dim_m$.// Современные проблемы математики и механики — 2009. — т 3, математика, вып. 2 — pp. 164-167.

[5] Осипов Е.В. Равенство размерности по модулю симплициальных комплексов компактного пространства X и $X \times C$.// Известия Тульского государственного университета Естественные науки. Вып. 2, 2010. с. 24-31.