МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

Механико-математический факультет

На правах рукописи

УДК 519.713; 519.171.4

Лашева Мария Игоревна

ПЕРЕКЛЮЧАТЕЛЬНЫЕ АЛГОРИТМЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ГРАФОВ

01.01.09 — дискретная математика и математическая кибернетика

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва — 2011

Работа выполнена на кафедре Математической теории интеллектуальных систем Механико-математического факультета Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова.

Научный руководитель — кандидат физико-математических наук, доцент
Часовских Анатолий Александрович

Официальные оппоненты:
доктор физико-математических наук, профессор
Гашков Сергей Борисович
кандидат физико-математических наук, доцент
Карташов Сергей Иванович

Ведущая организация — Московский энергетический институт
(Технический университет)

Защита диссертации состоится "27" мая 2011 г. в 16 ч. 45 м. на заседании диссертационного совета Д.501.001.84 при Московском государственном университете имени М.В. Ломоносова по адресу: Российская Федерация, 119991, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д.1, Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Механико-математический факультет, аудитория 14-08.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Механико-математического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова (Главное здание, 14 этаж).

Автореферат разослан "27" апреля 2011 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
Д.501.001.84 при МГУ
доктор физ.-мат. наук, профессор

А.О. Иванов

Общая характеристика работы

Актуальность темы

Диссертационная работа является исследованием в области дискретной математики и математической кибернетики. В работе исследуются переключательные алгоритмы преобразования графов с сохранением степенной последовательности.

Цель работы - формализовать понятие переключательного алгоритма для преобразования основных графовых структур (неориентированных графов, ориентированных графов, гиперграфов), а также построить соответствующие переключательные алгоритмы и оптимизировать их сложностные характеристики.

Степенной последовательностью неориентированного графа называется набор степеней всех его вершин, упорядоченный по невозрастанию[1]. В общем случае существует несколько неизоморфных графов, обладающих заданной степенной последовательностью. Связь между ними можно установить с помощью подходящей цепочки операций переключения ребер, сохраняющих степенную последовательность. При этом для преобразования графов с большим числом вершин и ребер эффективный алгоритм нахождения такой цепочки должен использовать информацию только о локальных свойствах графов, исключая знание их глобальных характеристик.

Задача преобразования графов с сохранением степенной последовательности возникает при перечислении всех графических реализаций заданной степенной последовательности. Подобные задачи появились одними из первых в теории графов. Так, например, в 1875 г. А. Кэли, изучая проблему построения изомеров насыщенных углеводородов по их формуле, перечислял различные возможные деревья со степенями вершин 1 и 4[2].

Для произвольного конечного набора натуральных чисел, упорядоченных по невозрастанию, можно определить, существует ли графическая реализация со степенной последовательностью, совпадающей с этим набором[3]. При этом в качестве графических реализаций рассматриваются различные графовые структуры: неориентированные графы, орграфы, мультиграфы, псевдографы. Такой выбор типа изучаемых графов обусловлен их приложениями в решении теоретических задач органической химии, так как многие свойства моделируемых органических молекул часто объясняются структурными

[1] Емеличев В. А., Мельников О. И., Сарванов В. И., Тышкевич Р. И. *Лекции по теории графов.* М.: Изд-во Наука, 1990.

[2] A. Cayley. Brit. Assoc. Adv. Sci. Reports, p. 275, 1875.

[3] R. B. Eggleton, D. A. Holton. *Graphic sequences.* Lecture Notes in Mathematics, vol. 748, Springer, Berlin, p. 1-10, 1978.

свойствами соответствующих графов. Исторически, в первую очередь исследуются способы определения возможных псевдографических реализаций[4] заданной степенной последовательности. Для этого в своей работе 1951 г. при построении конструктивных доказательств Дж. Сениор определяет и использует операцию «передачи» ребер, сохраняющую степенную последовательность псевдографа. Затем в 1962 г. С. Хакими формулирует задачу построения всех мультиграфов с заданной степенной последовательностью[5] как различных возможных структурных моделей данной органической молекулы, восстанавливаемых по ее формуле. Он описывает способ восстановления мультиграфа по степенной последовательности и использует операцию «d-элементарного преобразования» ребер для дальнейшего преобразования этого мультиграфа к любому другому с той же степенной последовательностью. При этом несколько ранее, в 1955 г., В. Гавел решает теоретическую задачу построения всех возможных неориентированных графов по заданной степенной последовательности и описывает алгоритм, при помощи которого можно восстановить неориентированный граф по его степенной последовательности, а затем, используя операцию переключения ребер, получить любой другой неориентированный граф с той же степенной последовательностью[6]. Процедура восстановления графа получила в литературе название процедуры Гавела-Хакими, а алгоритм преобразования от одного графа с заданной степенной последовательностью к любому другому с той же степенной пследовательностью стал называться *алгоритмом В. Гавела*. Итак, алгоритм В. Гавела осуществляет преобразования неориентированных графов без петель и кратных ребер путем последовательного выполнения операций переключения ребер, не допускающих возникновения кратных ребер и петель. Важно, что существенным ограничением этого алгоритма является необходимость знания глобальных характеристик задаваемых графов, а следовательно, расширения либо оперативной, либо внешней памяти алгоритма.

Однако это ограничение преодолимо: если для вычисления необходимой цепочки операций переключения ребер использовать конечный автомат[7], блуждающий по графу, ту же задачу можно решать алгоритмом специального вида с фиксированной оперативной и внешней памятью. Такие алгоритмы названы в диссертации переключательными. Использование переключательного алгоритма, в отличие от алгоритма В. Гавела, не потребует изучения глобальных характеристик графов, а только лишь знания их локальных свойств [1]. Более того, переключательный алгоритм для решения задачи преобразования неориентированных графов без петель и кратных ребер с n вершинами, степень

[4] Senior J. K. *Partitions and their Representative Graphs.* Amer. Jour. Math., vol.73, p. 663 - 689, 1951.

[5] Hakimi S. L. *On realizability of a set of integers as degrees of the vertices of a linear graphs.* I. J. Soc. Indust. Appl. Math. 1962. **10**, N 3., p. 496 - 506.

[6] Гавел В. *Заметка о существовании конечных графов.* Čas. Pest. Mat. 1955. **80**, N 4., p. 477 - 481.

[7] Кудрявцев В. Б., Алешин С. В., Подколзин А. С. *Введение в теорию автоматов.* М.:Наука. 1985.

каждой из которых не превосходит k, дает возможность осуществить указанный переход за время не более $O(k^2n^2)$. При фиксированном k эта оценка лучше, чем оценка $O(n^2\log_2 n)$, вытекающая из описания алгоритма В. Гавела [2].

Такой подход позволил автору решить подобные задачи построения переключательных алгоритмов преобразования ориентированных графов и гиперграфов[8] [1]. При этом под степенной последовательностью для ориентированных графов понимается конечная последовательность пар полустепеней входящих и исходящих ребер, лексикографически упорядоченная по невозрастанию. Отметим, что в 1957 г. Г. Райзер рассматривал операцию замены, при которой в орграфе без кратных ориентированных ребер возможно переключение ребер с сохранением степенной последовательности, допуская при этом возникновение ориентированных петель. Он доказал, что, используя эту операцию, любой орграф без кратных ориентированных ребер может быть переведен в любой другой такой орграф, имеющий ту же степенную последовательность[9]. В диссертации введена операция переключения для орграфов, не допускающая образования петель и кратных ориентированных ребер. Используя введенную операцию переключения, построен переключательный алгоритм, который для орграфов без петель и кратных ребер с n вершинами, сумма полустепеней по входящим и исходящим ребрам каждой из которых не превосходит k, дает возможность осуществить переход от одного ориентированного графа с к другому с сохранением степенной последовательности за время не более $O(k^2n^2)$. Затем введено обобщение операции переключения гиперребер в гиперграфе и построен переключательный алгоритм, который для гиперграфов с n вершинами, степень каждой из которых не больше k, и гиперребрами, каждое из которых содержит не более m вершин, по порядку не превосходит $O((max(k,m))^2 2^{2n})$. Таким образом, переключательные алгоритмы могут быть использованы для оптимизации свойств компьютерных сетей с заданным множеством провайдеров и ограничениями на коммутационные возможности каждого из них, и их использование не потребует изучения глобальных характеристик всей сети, а только лишь знания ее локальных свойств.

В 1978 г. Р. Эгглтоном и Д. Холтоном[10] введено понятие графа реализаций степенной последовательности $d(n) = (d_1, ..., d_n), d_1 \geq ... \geq d_n > 0$. Граф реализаций $\mathfrak{R}(d(n))$ - непустой неориентированный граф, имеющий своими вершинами различные отмеченные графические реализации, при этом ребро между двумя вершинами существует тогда и только тогда, когда существует операция переключения ребер, переводящая одну вершину (т. е.

[8] А. А. Зыков. *Гиперграфы.* Успехи математических наук, 6, 180, 1972.

[9] Ryser H. J. *Combinatorial Properties of Matrices of Zeros and Ones.* Canadian Journal of Mathematics, 9, p. 371 – 377, 1957.

[10] R. B. Eggleton, D. A. Holton. *Graphic sequences.* Lecture Notes in Mathematics, vol. 748, Springer, Berlin, p. 1-10, 1978.

отмеченный граф) в другую. Из результатов, полученных В. Гавелом, вытекает связность графа реализаций для любого n. В приложениях теории графов, как правило, изучаются статистические характеристики множества всех графических реализаций заданной степенной последовательности[11]. В диссертации автором исследованы некоторые метрические характеристики графа реализаций, такие как порядок роста диаметра графа[12] и максимальной степени вершины [1]. А именно, построены последовательности степенных последовательностей $d(4), d(5), ..., d(n), ...$, графы реализаций $R(d(n))$ которых имеют диаметр, равный $C_1 n^2$ для некоторого C_1, а также построены последовательности степенных последовательностей $d'(4), d'(5), ..., d'(n), ...$, графы реализаций $R(d'(n))$ которых имеют максимальную степень вершин, равную $C_2 n^4$ для некоторого C_2.

При изучении расположения графических реализаций в графе реализаций в зависимости от их свойств возникает задача определения переключательно-полных свойств графов[13]. А именно, пусть P есть некоторое непустое графовое свойство. Обозначим $\mathfrak{R}(d(n), P)$ порожденный подграф[14] графа реализаций $\mathfrak{R}(d(n))$, образованный всеми вершинами со свойством P. Свойство P, для которого граф $\mathfrak{R}(d(n), P)$ связен, называется переключательно-полным.

Приведем примеры некоторых переключательно-полных свойств. В 1977 г. Ч. Колборн показал переключательную полноту свойства быть деревом[15]. В 1982 г. М. Сислоу построил алгоритм перехода от одного уницикла к любому другому с сохранением степенной последовательности и свойства уницикличности[16]. В те же годы Р. Тэйлор доказал, что свойства связности и вершинной двусвязности графов являются переключательно-полными[17,18]. Отметим, что для описанных переключательно-полных свойств существуют алгоритмы восстановления графа по степенной последовательности с заданным свойством[19]. В перечисленных работах доказательства переключательной полноты основаны на построении алгоритмов, осуществляющих переход с помощью операции переключения ребер от произвольного графа с заданным свойством к любому другому графу с таким свойством, причем применение операции переключения сохраняет заданное свойство. Алгоритмы эти, как

[11] A. Sinclair. *Algorithms for Random Generation and Counting.* A Markov Chain Approach. Birkhauser Boston, 1993.

[12] О. Оре. *Теория графов.* М., Изд-во Наука, 1980.

[13] А. А. Черняк. Переключательно-полные свойства графов. Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук., N 1, стр. 29 - 35, 1985.

[14] А. А. Зыков. *Основы теории графов.* М., Изд-во Наука, 1987.

[15] Colbourn C. J. Research Report Cc-77-37, University of Waterloo, p. 200, 1977.

[16] Syslo M. M. *On tree and unicyclic realizations of degree sequences.* Demonstratio Mathematica, v.15, N4, 1982. Warsaw Technical University Institute of Mathematics.

[17] Taylor R. *Constrained switchings in graphs.* Mathematics Research Report, N **27**, 1980. Department of Mathematics, University of Melbourne.

[18] Taylor R. *Switchings Constrained to 2-Connectivity in Simple Graphs.* SIAM J. Algebraic Discrete Methods, **3**, N 1, p. $114 - 121, 1982$.

[19] D. L. Wang, D. J. Kleitman. *On the existence of n-connected graphs with prescribed degrees.* The journal of mathematics and physics, v.55, N1, 1976.

и алгоритм В. Гавела, обладают ограничением: для их работы необходимо знание глобальных характеристик задаваемых графов, а следовательно, расширение либо оперативной, либо внешней памяти алгоритмов. В диссертации решена задача построения соответствующих переключательных алгоритмов, преобразующих графы с сохранением заданного переключательно-полного свойства и степенной последовательности. Вопросы переключательной полноты различных свойств, касающихся связности графов, могут быть применимы в теории надежности сложных систем[20].

Известно, что существуют свойства графов, не являющиеся переключательно-полными[21]. Поскольку некоторые органические молекулы могут быть представлены как плоские графы[22], в диссертации был исследован вопрос переключательной полноты свойства планарности. Автором показано, что свойство планарности переключательно-полным не является.

Цель работы

1. Рассмотреть с точки зрения теории конечных автоматов задачу преобразования графов с сохранением степенной последовательности с помощью операции переключения ребер. Формализовать понятие переключательного алгоритма.

   Разработать аппарат исследования существования переключательного алгоритма, решающего задачу преобразования графов с сохранением степенной последовательности. Построить переключательный алгоритм для преобразования неориентированных графов с сохранением степенной последовательности и оптимизировать его сложностные характеристики по сравнению с алгоритмом В. Гавела.

2. Обобщить полученные результаты и построить переключательные алгоритмы для решения задач преобразования ориентированных графов и гиперграфов с сохранением степенной последовательности.

3. Исследовать с точки зрения теории конечных автоматов задачу преобразования неориентированных графов с сохранением степенной последовательности и переключательно-полного свойства.

   Построить переключательные алгоритмы преобразования неориентированных графов с сохранением степенной последовательности

[20] А. А. Черняк. *Связность графов с предписанным степенным множеством и порядком.* ДАН БССР, N 5, 29, 1984.

[21] Colbourn C. J. Research Report Cc-77-37, University of Waterloo, p. 200, 1977.

[22] Р. Басакер, Т. Саати. *Конечные графы и сети.* М.: Изд-во Наука, 1974.

и заданного свойства для следующих переключательно-полных свойств: свойства «быть деревом», свойства унициличности, а также свойств связности и двусвязности.

Структура и объем диссертации

Диссертационная работа изложена на 93 страницах и состоит из введения и 3 глав, разделенных на параграфы. Библиография включает 30 наименований.

Научная новизна

1. Построен переключательный алгоритм для преобразования неориентированных графов с сохранением степенной последовательности. Доказано, что такой алгоритм при естественном ограничении на степень вершины имеет более оптимальные временные характеристики и характеристики памяти по сравнению с ранее известным алгоритмом В. Гавела.

2. Решена задача преобразования ориентированных графов и гиперграфов с сохранением степенной последовательности с помощью переключательных алгоритмов.

3. Исследован порядок роста диаметра и максимальной степени вершин графа реализаций, описывающего связь между различными графическими реализациями степенной последовательности с помощью операции переключения ребер.

4. Решены задачи построения переключательных алгоритмов для преобразования неориентированных графов с сохранением степенной последовательности и заданного переключательно-полного свойства для следующих свойств: свойства «быть деревом», свойства уницикличности, свойства связности и двусвязности. Исследовано свойство планарности на переключательную полноту.

5. Разработана специальная комбинаторная техника для исследования задачи решения и построения переключательного алгоритма, позволяющая доказать корректность построенных переключательных алгоритмов, преобразующих неориентированные графы, ориентированные графы, а также гиперграфы без знания их глобальных характеристик.

Основные методы исследования

В диссертации использованы методы теории автоматов, теории графов и теории алгоритмов.

Теоретическая и практическая ценность работы

Работа имеет теоретический характер и может быть полезна специалистам, работающим в области теории автоматов и теории графов.

Апробация работы

Результаты диссертации докладывались на конференциях и семинарах механико-математического факультета МГУ имени М. В. Ломоносова: на семинаре «Теория автоматов» под руководством академика, профессора В. Б. Кудрявцева (неоднократно в 2007-2011 гг.), на семинаре «Нейронные сети» под руководством доцента А. А. Часовских (неоднократно 2004-2011 гг.), на семинаре «Математические вопросы кибернетики» под руководством профессора О. М. Касим-Заде (2011 г.), на семинаре «Дискретный анализ» под руководством профессора В. А. Буевича и С. В. Алешина (2006 г.), на семинаре «Вопросы сложности алгоритмов поиска» под руководством профессора Э. Э. Гасанова (2006 г.). Также результаты докладывались на следующих конференциях:

IX международная конференция «Интеллектуальные системы и компьютерные науки» (Москва, МГУ имени М. В. Ломоносова, 2006 г.);

IX Международный семинар «Дискретная математика и ее приложения», посвященный 75-летию со дня рождения академика О. Б. Лупанова (Москва, МГУ имени М. В. Ломоносова, 2007 г.);

третья и четвертая научная конференция студентов и аспирантов кафедры МаТИС механико-математического факультета МГУ (Москва, МГУ имени М. В. Ломоносова, 2007 и 2008 гг.);

международная конференция «Современные проблемы математики, механики и их приложений», посвященная 70-летию ректора МГУ академика В. А. Садовничего (Москва, МГУ имени М. В. Ломоносова, 2009 г.);

научная конференция «Ломоносовские чтения» (Москва, МГУ имени М. В. Ломоносова, 2008 и 2009 гг.);

международная научная конференция «Ломоносов-2009»(Москва, МГУ имени М. В. Ломоносова, 2009 г.).

Публикации по теме диссертации

Основные результаты работы опубликованы в пяти статьях[1-5].

Краткое содержание работы

Во **введении** содержится история проблемы изучения графических реализаций степенной последовательности и их свойств, дается обзор ранее известных результатов, а также формулируются основные результаты, полученные в диссертации.

Глава 1

Первая глава посвящена использованию переключательных алгоритмов для преобразования графов, орграфов и гиперграфов с сохранением степенной последовательности.

В параграфе 1.1 даются основные определения и формулируется постановка задачи преобразования неориентированных графов без петель и кратных ребер с сохранением степенной последовательности, а также вводится операция ω следующим образом. Пусть $d(n)-$ графичная последовательность[23]. Через $\widetilde{M}(d(n))$ обозначим множество всех графов со степенной последовательностью $d(n)$. Положим $M(d(n)) = \{G :$ граф G получен нумерацией вершин некоторого графа из $\widetilde{M}(d(n))$, последовательность степеней вершин которого, выписанная в порядке возрастания номеров, совпадает с $d(n)\}$.

Пусть $A(d(n)) \subseteq M(d(n))$.

При $n \geq 4$ определим операцию

$$\omega(A(d(n))) = \{G' |\ \exists\, G = (V, E) \in A(d(n)),\ \exists\, v_1, v_2, v_3, v_4 \in V,$$
$$\{v_1, v_2\}, \{v_3, v_4\} \in E,\ \{v_1, v_3\}, \{v_2, v_4\} \notin E,$$
$$G' = (V, (E \cup \{\, \{v_1, v_3\}, \{v_2, v_4\}\, \}) \setminus \{\, \{v_1, v_2\}, \{v_3, v_4\}\, \})\}.$$

Операция ω не меняет степенную последовательность.

Таким образом, $\omega(A(d(n)))$ состоит из всех графов, которые могут быть получены из элементов множества $A(d(n))$ однократным применением операции переключения ребер.

Будем говорить, что операция переключения применима в графе $G = (V, E)$ к некоторой паре ребер $\{v_{i_1}, v_{i_2}\}, \{v_{j_1}, v_{j_2}\}$, если в графе G не существует ребер

[23] Емеличев В. А., Мельников О. И., Сарванов В. И., Тышкевич Р. И. *Лекции по теории графов.* М.: Изд-во Наука, 1990.

$\{v_{i_1}, v_{j_1}\}, \{v_{i_2}, v_{j_2}\}$, или если в графе G не существует ребер $\{v_{i_1}, v_{j_2}\}, \{v_{i_2}, v_{j_1}\}$. Если операция переключения применима к паре ребер $\{v_{i_1}, v_{i_2}\}, \{v_{j_1}, v_{j_2}\}$, то будем также говорить, в первом случае, что ребра $\{v_{i_1}, v_{i_2}\}, \{v_{j_1}, v_{j_2}\}$ переключаются на ребра $\{v_{i_1}, v_{j_1}\}, \{v_{i_2}, v_{j_2}\}$, или, во втором случае, на ребра $\{v_{i_1}, v_{j_2}\}, \{v_{i_2}, v_{j_1}\}$.

В параграфе 1.2 автором вводится понятие переключательного алгоритма, который для решения данной задачи не потребует знания глобальных характеристик преобразуемых графов, а лишь знания их локальных свойств.

Зафиксируем натуральное число P, $P \geq 4$, и рассмотрим конечное множество

$$L(P) = E_{P+1} \times E_{P+1} \times E_2 \times E_2 \times E_3.$$

Рассмотрим множество матриц

$$\mathbf{M}(P) = \bigcup_{n=4}^{\infty} \{M = (m_{ij})_{n,n}, m_{ij} \in L(P), i = \overline{1,n}, j = \overline{1,n}\}.$$

Обозначим через Γ^2 множество пар $\{G_1, G_2\}$ неориентированных графов с занумерованными вершинами, у которых совпадают степенные последовательности.

Зафиксируем n и отобразим взаимно однозначно множество пар

$$(G_1, G_2) \in \Gamma^2, G_i = (V_i, W_i), |V_i| = n, i = 1, 2,$$

в некоторое подмножество множества

$$\{M = (m_{ij})_{n,n}, m_{ij} \in L(P), i = \overline{1,n}, j = \overline{1,n}\};$$

обозначим этот образ M_n^P и зададим множество

$$\mathbf{M}^P = \bigcup_{n=4}^{\infty} M_n^P.$$

Зададим инициальный конечный автомат

$$T = (L(P), E_{100}, L(P) \times E_5, \varphi, \psi, q_0).$$

Конечный автомат T применяется к матрице $M \in M_n^P$ в следующем смысле.

1) Обозначим $M = M^{(0)} = (m_{ij}^{(0)})_{n,n}$. В момент времени 0 автомат T находится в состоянии q_0, и на вход ему поступает элемент $m_{11}^{(0)}$. Выходом является некоторый элемент из множества $L(P)$; обозначим его m'_{11}. Автомат переходит в состояние q_1.

2) Обозначим $M^{(1)} = (m_{ij}^{(1)})_{n,n}$, где $m_{11}^{(1)} = m'_{11}$ и $m_{ij}^{(1)} = m_{ij}^{(0)}$ для любых $i = 2, ..., n, j = 2, ..., n$. Автомат T в момент времени 1 находится в состоянии q_1, и на вход ему поступает некоторый элемент $m_{kl}^{(1)} \in \{m_{12}^{(1)}, m_{21}^{(1)}\}$. Выходом является

некоторый элемент из множества $L(P)$; обозначим его m'_{kl}. Автомат T переходит в состояние q_2.

3) $t \geq 2$.

Определим окрестность $N(m_{ij}^{(t)})$ элемента $m_{ij}^{(t)}$ для любого $t \geq 2$:

$N(m_{ij}^{(t)}) = \{m_{ij}^{(t)}, m_{i,j+1}^{(t)}, m_{i+1,j}^{(t)}, m_{i-1,j}^{(t)}, m_{i,j-1}^{(t)}\}$ при $1 < i < n, 1 < j < n$;
$N(m_{1j}^{(t)}) = \{m_{1j}^{(t)}, m_{2,j}^{(t)}, m_{1,j+1}^{(t)}, m_{1,j-1}^{(t)}\}$ при $1 < j < n$;
$N(m_{nj}^{(t)}) = \{m_{nj}^{(t)}, m_{n-1,j}^{(t)}, m_{n,j+1}^{(t)}, m_{n,j-1}^{(t)}\}$ при $1 < j < n$;
$N(m_{i1}^{(t)}) = \{m_{i1}^{(t)}, m_{i,2}^{(t)}, m_{i+1,1}^{(t)}, m_{i-1,1}^{(t)}\}$ при $1 < i < n$;
$N(m_{in}^{(t)}) = \{m_{in}^{(t)}, m_{i,n-1}^{(t)}, m_{i+1,n}^{(t)}, m_{i-1,n}^{(t)}\}$ при $1 < i < n$;
$N(m_{11}^{(t)}) = \{m_{11}^{(t)}, m_{12}^{(t)}, m_{21}^{(t)}\}$;
$N(m_{1n}^{(t)}) = \{m_{1n}^{(t)}, m_{1,n-1}^{(t)}, m_{2n}^{(t)}\}$;
$N(m_{n1}^{(t)}) = \{m_{n1}^{(t)}, m_{n-1,1}^{(t)}, m_{n2}^{(t)}\}$;
$N(m_{nn}^{(t)}) = \{m_{nn}^{(t)}, m_{n-1,n}^{(t)}, m_{n,n-1}^{(t)}\}$.

Положим $p = k, r = l$. Обозначим $M^{(t)} = (m_{ij}^{(t)})_{n,n}$, где $m_{ij}^{(t)} = m_{ij}^{(t-1)}$ для любых $i = 1, ..., n, i \neq p, j = 1, ..., n, j \neq r$, и $m_{pr}^{(t)} = m'_{kl}$. В момент времени t автомат T находится в некотором состоянии q_t, и на вход ему поступает элемент из окрестности $N(m_{pr}^{(t)})$; например, $m_{kl}^{(t)}$. Выходом является некоторый элемент из множества $L(P)$; обозначим его m'_{kl}. Автомат T переходит в состояние q_{t+1}.

4) Работа автомата T заканчивается, когда он переходит в конечное состояние $q^* = q_s$. Полученную при этом матрицу $M^{(s-1)}$ обозначим через $T(M)$.

Определение. *Переключательный алгоритм* $\mathfrak{A}$ *- это пара* $(T, \boldsymbol{M}^P)$, *такая что для любого натурального* $n \geq 4$ *и для любой матрицы* $M \in M_n^P$ *выполнено* $T(M) \in M_n^P$.

Далее в диссертации подробно строится переключательный алгоритм $\mathfrak{A}_1$, решающий для всех неориентированных графов без петель и кратных ребер задачу их преобразования с сохранением степенной последовательности, с фиксированной оперативной памятью, внешняя память которого растет линейно относительно размера задачи.

Алгоритм $\mathfrak{A}_1$ реализует следующую идею. Вершины графов $G_i, i = 1, 2$, с одинаковыми степенными последовательностями нумеруются в порядке невозрастания их степеней. Матрица $M^{(0)} = (a_{ij}^{(0)})_{n \times n}$ определяется парой этих графов, а по элементам $a_{ij}^{(0)}$ определяется наличие ребер между i-й и j-й вершинами как в графе G_1, так и в графе G_2. Исходя из пары занумерованных графов G_1, G_2, автомат T находит два ребра, принадлежащие либо G_1, либо G_2, такие что, применив к ним операцию ω, получим пару занумерованных графов с бо́льшим числом соответствующих ребер. При этом соответствующими называем ребра занумерованных графов G_1, G_2, соединяющие вершины с одинаковыми номерами. Эта процедура продолжается до тех пор, пока автомат T не преобразует исходную матрицу к матрице, соответствующей паре изоморфных занумерованных графов. Итак, в параграфе 1.2 доказаны следующие теоремы.

Теорема 2. *Для любой пары занумерованных графов G_1, G_2 с одинаковой степенной последовательностью переключательный алгоритм $\mathfrak{A}_1$ строит пару изоморфных занумерованных графов G_1', G_2'.*

Теорема 3. *Время работы переключательного алгоритма $\mathfrak{A}_1$ для пары занумерованных графов с n вершинами, степень каждой из которых не более k, не превосходит $O(k^2n^2)$.*

При фиксированном k эта оценка лучше, чем оценка $O(n^2 \log_2 n)$ для алгоритма В. Гавела.

Размер задачи определим как количество элементов квадратной матрицы $M^{(0)} = (a_{ij}^{(0)})_{n\times n}$, т. е. n^2.

Теорема 5. *Объем внешней памяти, необходимый для работы переключательного алгоритма $\mathfrak{A}_1$, равен размеру задачи.*

В параграфе 1.3 изучается задача преобразования орграфов без петель и кратных дуг с сохранением степенной последовательности. В этом случае под степенной последовательностью понимается конечная последовательность пар входящих и исходящих ребер, лексикографически упорядоченная по не возрастанию. Вводится операция переключения для орграфов, не допускающая образования петель (в отличие от операции, ранее рассмотренной Райзером) и кратных дуг. Далее обобщается операция ω, не меняющая такую степенную последовательность, строится переключательный алгоритм $\mathfrak{A}'$ и доказываются следующие теоремы.

Теорема 7. *Для любой пары занумерованных орграфов G_1, G_2 с одинаковой степенной послеовательностью переключательный алгоритм $\mathfrak{A}_2$ строит пару изоморфных занумерованных орграфов G_1', G_2'.*

Теорема 8. *Время работы переключательного алгоритма $\mathfrak{A}_2$ для пары занумерованных графов с n вершинами, степень каждой из которых не более k, не превосходит $O(k^2n^2)$.*

Теорема 10. *Объем внешней памяти, необходимый для работы переключательного алгоритма $\mathfrak{A}_2$, равен размеру задачи.*

В параграфе 1.4 обобщается операция переключения для гиперграфов, а затем строится взаимно однозначное отображение g из множества гиперграфов в некоторое подмножество ориентированных графов следующим образом. Построим ориентированный граф $g(H) = H_g = (V_g, E_g)$ для гиперграфа $H = (V, E)$: пусть $|V| = m$, $|E| = n$, $V = \{v_1, ..., v_m\}, E = \{e_1, ..., e_n\}$, тогда $V_g = V \cup \{x_1, ..., x_n\}$, $E_g = E_1 \cup ... \cup E_n$, где $E_i = \bigsqcup\limits_{v_k \in e_i} \{x_i, v_k\}, 1 \le i \le n$.

Это позволяет обобщить предыдущие результаты и построить переключательный алгоритм $\mathfrak{A}_3$ преобразования гиперграфов с сохранением степенной последовательности. Под степенью вершины при этом понимается количество гиперребер, в которых содержится данная вершина. Таким образом, в параграфе 1.4 доказаны следующие теоремы.

Теорема 12. *Для любой пары занумерованных гиперграфов* G_1, G_2 *с одинаковой степенной послеовательностью переключательный алгоритм* $\mathfrak{A}_3$ *строит пару изоморфных занумерованных орграфов* G_1', G_2'.

Теорема 13. *Время работы переключательного алгоритма* $\mathfrak{A}_3$ *для пары занумерованных графов с* n *вершинами, степень каждой из которых не более* k, *и гиперербрами, каждое из которых содержит не более* m *вершин, не превосходит* $O((max(k,m))^2 2^{2n})$.

Теорема 14. *Объем внешней памяти, необходимый для работы переключательного алгоритма* $\mathfrak{A}_3$, *равен размеру задачи.*

Глава 2

Во второй главе изучаются основные метрические свойства графа реализаций степенной последовательности $d(n)$.

Рассмотрим неориентированный граф $G = (V, E), |V| = n$, обозначим $d(n)$ степенную последовательность графа G. Занумеруем некоторым образом все его вершины и получим занумерованный граф, например G_1. Рассмотрим множество всех занумерованных графов $\{G_1, ..., G_m\}$, имеющих степенную последовательность $d(n)$.

Графом реализаций для данной степенной последовательности $d(n)$ называется непустой неориентированный граф $R(d(n)) = (V_R, E_R)$, такой что $V_R = \{G_1, ..., G_m\}, \{G_i, G_j\} \in E_R$ тогда и только тогда, когда в графе G_i существует пара ребер, к которым применима операция ω и в результате ее применения получается граф G_j.

Из результатов, полученных В. Гавелом, вытекает связность графа реализаций. В диссертации исследованы некоторые метрические характеристики графа реализаций и доказана следующая теорема.

Теорема 15. *Граф реализаций обладает следующими свойствами:*

Свойство 1. Существует последовательность степенных последовательностей

$$d(4), d(5), ..., d(n), ...,$$

таких что диаметры графов реализаций $diam(R(d(n))) \asymp n^2$.

Свойство 2. Существует последовательность степенных последовательностей $d(4), d(5), ..., d(n), ...,$ *таких что* $\max\limits_{v \in V_R} deg v \asymp n^4$.

Глава 3

При изучении расположения графических реализаций в графе реализаций в зависимости от их свойств возникает задача определения переключательно-полных свойств графов. Пусть P есть некоторое непустое графовое свойство, то есть $P \subseteq V_R$. Обозначим $\mathfrak{R}(d(n), P)$ порожденный подграф графа $\mathfrak{R}(d(n))$, образованный всеми вершинами со свойством P. Свойство P, для которого граф $\mathfrak{R}(d(n), P)$ связен, называется переключательно-полным.

В третьей главе рассматриваются задачи построения переключательных алгоритмов преобразования графов с сохранением степенной последовательности и заданного переключательно-полного свойства для известных переключательно-полных свойств.

В параграфе 3.1 дается определение перелючательно-полного свойства и приводятся примеры наиболее распространенных переключательно-полных свойств. Ранее известные доказательства переключательной полноты таких свойств, как свойства "быть деревом" , уницикличности, связности и двусвязности основаны на построении алгоритмов, преобразующих графы с сохранением степенной последовательности и заданного переключательно-полного свойства. Переход от одного графа к другому осуществляется с помощью последовательного применения операций ограниченного переключения, которые сохраняют степенную последовательность и заданное свойство графа.

Параграф 3.2 посвящен решению задачи построения переключательного алгоритма, преобразующего деревья с сохранением степенной последовательности и свойства "быть деревом". Рассмотрим некоторое подмножество $\mathbf{T}(d(n))$ множества деревьев $\mathfrak{T}(d(n))$. При $n \geq 4$ определим операцию

$$\omega^*(\mathbf{T}(d(n))) = \{T' \in \mathfrak{T}(d(n)) |\ \exists\, T = (V, E) \in \mathbf{T}(d(n)),$$

$$\exists\, v_1, v_2, v_3, v_4 \in V,\ \{v_1, v_2\}, \{v_3, v_4\} \in E,$$

$$\{v_1, v_3\}, \{v_2, v_4\} \notin E,\ T' = (V, (E \cup \{\, \{v_1, v_3\}, \{v_2, v_4\}\, \}) \setminus \{\, \{v_1, v_2\}, \{v_3, v_4\}\, \})\}.$$

Операция ω^* не меняет степенную последовательность и сохраняет свойство "быть деревом".

Будем говорить, что операция ограниченного переключения применима в дереве $T = (V, E)$ к некоторой паре ребер $\{v_{i_1}, v_{i_2}\}, \{v_{j_1}, v_{j_2}\}$, если в дереве T не существует ребер $\{v_{i_1}, v_{j_1}\}, \{v_{i_2}, v_{j_2}\}$, и граф

$$T' = (V, (E \cup \{\, \{v_{i_1}, v_{j_1}\}, \{v_{i_2}, v_{j_2}\}\, \}) \setminus \{\, \{v_{i_1}, v_{i_2}\}, \{v_{j_1}, v_{j_2}\}\, \})$$

является деревом, или если в дереве T не существует ребер $\{v_{i_1}, v_{j_2}\}, \{v_{i_2}, v_{j_1}\}$, и граф

$$T' = (V, (E \cup \{\, \{v_{i_1}, v_{j_2}\}, \{v_{i_2}, v_{j_1}\}\, \}) \setminus \{\, \{v_{i_1}, v_{i_2}\}, \{v_{j_1}, v_{j_2}\}\, \})$$

является деревом.

Далее описывается способ построения переключательного алгоритма $\mathfrak{A}_T$ и доказываются следующие теоремы.

Теорема 17. *Для любой пары занумерованных деревьев T_1, T_2 с одинаковыми степенными последовательностями переключательный алгоритм $\mathfrak{A}_T$ строит пару изоморфных занумерованных деревьев T'_1, T'_2.*

Теорема 19. *Временная сложность работы переключательного алгоритма $\mathfrak{A}_T$ для пары занумерованных деревьев с n вершинами, не превосходит $O(n^2)$.*

Теорема 20. *Объем внешней внешней памяти переключательного алгоритма $\mathfrak{A}_T$ совпадает с размером задачи.*

В параграфе 3.2 рассматривается задача преобразования уницикличных графов с сохранением степенной последовательности и свойства уницикличности. Строится переключательный алгоритм $\mathfrak{A}_U$ и доказываются следующие теоремы.

Теорема 22. *Для любой пары занумерованных унициклов U_1, U_2 с одинаковыми степенными последовательностями переключательный алгоритм $\mathfrak{A}_U$ строит пару изоморфных занумерованных унициклов U'_1, U'_2.*

Теорема 24. *Временная сложность работы переключательного алгоритма $\mathfrak{A}_U$ для пары занумерованных унициклов с n вершинами, не превосходит $O(n^2)$.*

Теорема 25. *Объем внешней внешней памяти переключательного алгоритма $\mathfrak{A}_U$ совпадает с размером задачи.*

Известно, что существуют свойства графов, не являющиеся переключательно-полными. В параграфе 3.4 автором показывается, что свойство планарности также не является переключательно-полным. Для этого строится пара неизоморфных плоских триангуляций с совпадающей степенной последовательностью, таких что операция переключения, примененная к любой паре ребер каждой триангуляции, преобразует их в непланарные графы.

В параграфах 3.5-3.6 обобщаются полученные результаты и строятся переключательные алгоритмы $\mathfrak{A}_C$, $\mathfrak{A}_{BC}$, преобразующие, соответственно, связные графы и двусвязные графы с сохранением степенной последовательности и соответствующего свойства. Доказывается корректность построенных алгоритмов и исследуются их сложностные характеристики, а именно, верны следующие теоремы.

Теорема 28. *Для любой пары занумерованных связных графов C_1, C_2 с одинаковыми степенными последовательностями переключательный алгоритм $\mathfrak{A}_C$ строит пару изоморфных занумерованных связных графов C'_1, C'_2.*

Теорема 30. *Временная сложность работы переключательного алгоритма $\mathfrak{A}_C$ для пары занумерованных связных графов с n вершинами, не превосходит $O(n^2)$.*

Теорема 31. *Объем внешней памяти переключательного алгоритма $\mathfrak{A}_C$ совпадает с размером задачи.*

Теорема 33. *Для любой пары занумерованных двусвязных графов BC_1, BC_2 с одинаковыми степенными последовательностями переключательный алгоритм $\mathfrak{A}_{BC}$ строит пару изоморфных занумерованных двусвязных графов BC_1', BC_2'.*

Теорема 35. *Временная сложность работы переключательного алгоритма $\mathfrak{A}_{BC}$ для пары занумерованных двусвязных графов с n вершинами, степень каждой из которых не более k, не превосходит $O(k^2n^2)$.*

Теорема 36. *Объем внешней памяти переключательного алгоритма $\mathfrak{A}_{BC}$ совпадает с размером задачи.*

Благодарности

Автор благодарит своего научного руководителя кандидата физико-математических наук, доцента Часовских Анатолия Александровича за постановку задачи и помощь в работе. Автор выражает глубокую благодарность заведующему кафедрой академику, профессору Кудрявцеву Валерию Борисовичу, доктору физико-математических наук, профессору Буевичу Вячеславу Александровичу, доктору физико-математических наук, профессору Гасанову Эльяру Эльдаровичу, доктору физико-математических наук, профессору Подколзину Александру Сергеевичу и всем сотрудникам кафедры Математической теории интеллектуальных систем за постоянное внимание и творческую атмосферу, способствующую работе.

Работы по теме диссертации

[1] Лашева М.И. *Об алгебраических операциях на графах, сохраняющих степенную последовательность.* М., Интеллектуальные системы том 11, выпуск 1-4, 2007. Стр. 551-592.

[2] Лашева М.И. *Об алгебраических операциях на графах, сохраняющих степенную последовательность.* М., Материалы 9 Международного семинара "Дискретная математика и её приложения посвященного 75-летию со дня рождения академика О. Б. Лупанова, 2007. Стр. 331-333.

[3] Lasheva M.I. *On graph transformation algorithms keeping the same degree sequence.* Tashkent, Uzbekistan, Fifth World Conference on Intelligent Systems for Industrial Automation. November 25-27, 2008. Proceedings: 455-456.

[4] Лашева М.И. *Об алгебраических операциях на графах, сохраняющих степенную последовательность.* М., Вестн. Моск. Ун-та. Сер.1, Математика. Механика. 2009. №5, стр. 48-50.

[5] Лашева М.И. *Об алгебраических операциях на графах, сохраняющих степенную последовательность.* М., Материалы международной

конференции "Современные проблемы математики, механики и их приложений посвящённая 70-летию ректора МГУ академика В. А. Садовничего, 2009. Стр. 363-364.