

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. Ломоносова

Механико-математический факультет
Кафедра прикладной механики и управления

На правах рукописи

Смирнов Илья Александрович

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЗАНОСА АВТОМОБИЛЯ

Специальность 01.02.01 – теоретическая механика

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва 2011

Работа выполнена на кафедре прикладной механики и управления механико-математического факультета Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова.

Научные руководители:

доктор физико-математических наук,
профессор Игорь Васильевич Новожилов

кандидат физико-математических наук,
с.н.с. Анастасия Владимировна Влахова

Официальные оппоненты:

доктор физико-математических наук,
профессор Валентин Федорович Бутузов

доктор технических наук,
в.н.с. Игорь Анатольевич Копылов

Ведущая организация:

ФГУП "Центральный аэрогидродинамический институт им. профессора Н.Е. Жуковского"

Защита диссертации состоится 3 июня 2011 года в 16:30 на заседании диссертационного совета Д 501.001.22 при Московском государственном университете имени М.В. Ломоносова по адресу: 119991, Москва, Ленинские горы, МГУ, механико-математический факультет, аудитория 16-10.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке механико-математического факультета МГУ.

Автореферат разослан 28 апреля 2011 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета:

кандидат физико-математических наук,
доцент Владимир Александрович Прошкин

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Разработка надежного и безопасного автомобиля предполагает построение и анализ соответствующих математических моделей на начальном этапе проектирования. Использование динамических моделей позволяет оценить влияние параметров конструкции автомобиля на его движение, разработать эффективные алгоритмы управления автомобилем и реализовать их в виде так называемых средств активной безопасности. В отличие от пассивных, средства активной безопасности контролируют движение и вмешиваются в процесс управления автомобилем, помогая снизить вероятность возникновения аварийных ситуаций и минимизировать их негативные последствия. К ним относятся антиблокировочная и антипробуксовочная системы, система курсовой устойчивости, электронная система блокировки дифференциала и проч. Динамические модели используются также при разработке программного обеспечения для различных тестовых стендов и тренажеров, позволяющих сформировать у водителей необходимые навыки управления автомобилем.

Большое число автомобильных аварий происходит вследствие потери сцепления колес с дорогой, приводящей к возникновению заноса. В диссертационной работе исследуется движение автомобиля в различных ситуациях, возникающих при разгоне, торможении, прохождении поворота. Построена динамическая модель переменной структуры, позволяющая исследовать влияние ряда параметров конструкции автомобиля, управляющих воздействий – разгонных и тормозных моментов, а также угла поворота передних колес на возникновение и начальную стадию развития заноса.

Динамика автомобиля описывается сложными нелинейными системами дифференциальных уравнений высокого порядка. В случае, когда ставятся задачи оценивания и управления в реальном масштабе времени или проводится качественное исследование, используемая модель, напротив, должна быть как можно более простой. Такие задачи решаются в ходе планирования траекторий движения автомобиля, проводимого бортовым вычислителем с применением оптимальных задач методов управления. Для формирования упрощенных моделей может быть использовано приближенное моделирование исходной системы с применением разделения движений.

В настоящей работе рассматриваются задачи динамики автомобиля, движущегося с небольшими боковыми наклонами при малых различиях характеристик сцепления правых и левых колес одной оси с дорогой, в предположении недеформируемости деталей кузова, рулевого управления, крепления колес и проч. Используемая модель контактных сил учитывает возникновение псевдоскольжения при малых скоростях точек контакта колес относительно дороги. В рамках такой постановки постоянные времени движения автомобиля могут быть разбиты на три группы:

- "медленное" время траекторных движений, имеющее порядок 1 с;

– "среднее" время боковых движений точек контакта колес с дорогой, имеющее порядок 0,1 с (характерное время увода);

– "быстрое" время продольных движений точек контакта колес с дорогой, имеющее порядок 0,01 с.

При движении со скольжением (потерей сцепления) колес обеих осей с дорогой "быстрым" является характерное время осевого вращения колес, имеющее порядок 0,1 с.

Методы фракционного анализа, объединяющие методы теории размерности и подобия и методы теории возмущений, позволяют упростить исходную математическую модель автомобиля, составленную в соответствии с законами классической механики. При помощи нормализации исходная, размерная, система приводится к возмущенной форме с малыми параметрами, отражающими сильное разнесение малых и больших постоянных времени, на которых развиваются движения исследуемой системы. Методы теории сингулярных возмущений позволяют, далее, разделить "быстрые" и "медленные" движения автомобиля, т.е. построить приближенные модели его движения на каждом из временных интервалов, и оценить погрешность и область применимости указанных моделей. Порядок дифференциальных уравнений приближенных моделей является более низким по сравнению с порядком уравнений исходной системы. Их интегрирование может быть проведено в реальном времени. В ряде случаев приближенные модели допускают аналитическое исследование.

Цель работы. Одна из основных задач работы состояла в создании алгоритмов упрощения математических моделей движения колесных систем и исследования пределов применимости классических неголономных моделей механики с применением подходов фракционного анализа, разработанных И.В. Новожиловым. Алгоритмы приближенного моделирования, позволяющие разделить быстрые и медленные движения, отрабатывались для "велосипедной" модели автомобиля, движущегося как в режиме псевдоскольжения колес, так и в режиме потери сцепления передней, задней и обеих осей с дорогой. Приближенные модели должны быть пригодны для исследования класса медленных траекторных движений, включающих разгон, торможение и начальную стадию заноса автомобиля, а также для описания быстрых движений точек контакта колес с дорогой.

Научная новизна. В работе предложены методика введения в уравнения движения автомобиля иерархической структуры малых параметров и способ исследования корректности предельных переходов по малым параметрам. Построена динамическая модель переменной структуры, образованная набором приближенных математических моделей медленных и быстрых составляющих движения автомобиля на начальной стадии заноса при различных вариантах потери сцепления колес с дорогой. Основные результаты диссертации являются новыми.

Достоверность результатов. Результаты работы получены для широко используемой в практических задачах "велосипедной" модели движения автомобиля. Для исследования применимости этой модели к рассматриваемым в диссертации задачам начальной стадии заноса проведено ее численное сравнение с четырехколесной моделью автомобиля, достоверность которой подтверждена испытаниями реального автомобиля. При построении приближенных моделей движения "велосипедной" модели в работе использованы подходы, основанные на строгих математических методах.

Теоретическая и практическая ценность результатов. Теоретическая ценность работы заключается в развитии подходов фракционного анализа, ориентированных на создание упрощенных математических моделей движения колесных транспортных средств и исследование пределов применимости классических моделей механики. Разработана методика введения в уравнения движения колесных транспортных средств иерархической структуры малых параметров. Сформирован набор приближенных моделей более низкого порядка, позволяющих в реальном времени описывать движения автомобиля в режиме псевдоскольжения и на начальной стадии потери сцепления колес с дорогой. Построенные в диссертационной работе приближенные модели могут быть использованы для формирования алгоритмов, используемых в программном обеспечении тренажерных комплексов водителя и средств активной безопасности автомобиля, работающих в режиме реального времени и способствующих предотвращению заноса или минимизации его отрицательных последствий.

Апробация работы. Результаты работы докладывались и обсуждались на следующих научных семинарах и конференциях:

- Конференция молодых ученых механико-математического факультета МГУ им. М.В.Ломоносова (2003, 2004 годы, Москва, МГУ).
- 49-ая международная научно-техническая конференция ААИ "Приоритеты развития отечественного автотракторостроения и подготовки инженерных и научных кадров" (2005 год, Москва, МАМИ).
- Международный научно-технический семинар "Современные технологии в задачах управления, автоматизации и обработки информации" (2003, 2005, 2006 годы, Украина, Алушта).
- Научный семинар им. акад. А.Ю. Ишлинского по прикладной механике и управлению (2006, 2007, 2009, 2011 годы, Москва, МГУ).
- Научный семинар "Асимптотические методы" под руководством проф. А.Б. Васильевой и проф. В.Ф. Бутузова (2007, 2010 годы, Москва, МГУ).
- Научный семинар "Динамика относительного движения" под руководством чл.-корр. РАН, проф. В.В. Белецкого, проф. Ю.Ф. Голубева, доц. К.Е. Якимовой, доц. Е.В. Мелкумовой (2010 год, Москва, МГУ).

- Семинар кафедры теоретической механики и мехатроники Московского энергетического института (технического университета) (2010 год, Москва, МЭИ (ТУ)).

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты № 04–01–00759, 06–01–00517) и аналитической ведомственной целевой программы "Развитие научного потенциала высшей школы 2006–2008 г."

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в печатных работах, список которых приведен в конце автореферата.

Структура работы. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы, содержащего 80 наименований. В работе 167 страниц и 46 рисунков.

Краткое содержание диссертации

Во введении разобраны вопросы, связанные с актуальностью темы, целью работы, методикой исследований, достоверностью результатов, научной новизной диссертации, ее теоретической и практической ценностью. Охарактеризованы объем и структура диссертации. Приведены краткий обзор подходов к математическому и численному моделированию движения автомобиля (§ 1) и основные положения используемого в работе аппарата фракционного анализа (§ 2).

В диссертационной работе занос определяется следующим образом. *Рассмотрим движение автомобиля на конечных интервалах времени $T \sim T_0$, в течение которых развиваются процессы разгона, торможения, поворота. Зададимся программным, невозмущенным, движением, например, движением по средней линии дорожной полосы с требуемой путевой (продольной) скоростью. Будем предполагать, что соответствующие программные значения угла поворота передних колес, разгонных и тормозных моментов не превосходят ограничений, определяемых нормами безопасности движения. Зададимся начальными отклонениями δ_0 параметров бокового движения автомобиля от их невозмущенных, программных, значений. Если за рассматриваемое конечное время T_0 эти отклонения возрастают до неприемлемых по требованиям безопасности движения значений ε_0 , то будем называть режим движения заносом.*

В § 1.1 **первой главы** проводится описание исследуемой системы. Движение автомобиля в диссертационной работе изучается с использованием "велосипедной" модели. В рамках этой модели передние колеса автомобиля заменяются одним эквивалентным передним колесом, задние – одним задним. Движением переднего колеса управляет водитель или адаптивная система управления, ось вращения заднего колеса фиксирована в корпусе. Переднее колесо связано с корпусом через механизм рулевого управления.

Предполагается, что корпус, механизм рулевого управления и колеса модели являются абсолютно жесткими и она не имеет боковых наклонов.

"Велосипедная" модель широко используется в литературе при описании движений колесных транспортных средств с малыми боковыми наклонами в ситуациях, когда можно пренебречь различиями между характеристиками сцепления правых и левых колес одной оси с дорогой.

Начиная с 1940-х годов эта модель применялась для описания траекторных движений, оценки качественного влияния продольной и боковой эластичности шин на параметры движения, исследования управляемости и устойчивости против заноса и моделирования начального этапа заноса автомобиля [4, 8, 11, 13, 15]. С середины 1990-х годов "велосипедная" схема используется в алгоритмах работы систем безопасности для прогнозирования движения и построения законов управления автомобилем. К ним относятся как системы управления рулем для автомобилей, рассчитанных на водителя с невысоким уровнем мастерства, так и системы курсовой устойчивости для автомобилей спорт-класса, которые обеспечивают устойчивость автомобиля против заноса при точном следовании курсу, задаваемому поворотом руля, и поддерживают необходимую водителю скорость движения путем изменения угловой скорости осевого вращения колес [12, 14]. "Велосипедная" модель применялась также при формировании алгоритмов, составляющих основу программного обеспечения тренажерного комплекса водителя, позволяющего имитировать движение как в режиме движения с малыми проскальзываниями колес, так и в режиме управляемого заноса [7].

В задачах робототехники "велосипедная" модель использовалась при решении задач стабилизации многоприводного двухосного четырехколесного автономного робота, движущегося как с малыми проскальзываниями, так и с полным проскальзыванием типа блокировки или пробуксовки колес, а также бокового заноса и юза [1, 10].

В работе выведены полные уравнения движения модели. Для этого в работе вводятся следующие системы координат. С опорной плоскостью, моделирующей дорогу, связывается неподвижный трехгранник $O_0x_0y_0z_0$, с корпусом – трехгранники $C_x x_w y_w z_w$, $C_b x_b y_b z_b$, с механизмом рулевого управления – трехгранник $C_w x_w y_w z_w$, с колесами – трехгранники $A_1 x_1 y_1 z_1$ и $A_2 x_2 y_2 z_2$. Здесь C – центр масс системы в целом, C_b – центр масс корпуса; C_w – центр масс механизма рулевого управления, точки A_1 и A_2 лежат на пересечении продольных плоскостей симметрии переднего и заднего колес с их осями вращения; оси O_0z_0 , Cz , $C_b z_b$, $C_w z_w$, $A_1 z_1$, $A_2 z_2$ ориентированы по вертикали; оси Cx , $C_b x_b$, $C_w x_w$, $A_1 x_1$, $A_2 x_2$ лежат в плоскостях продольной симметрии корпуса и колес соответственно и направлены вперед по ходу движения (рис. 1). Положение модели задается координатами X_b , Y_b центра масс корпуса в системе координат $O_0x_0y_0z_0$, углом Ψ курса корпуса, углами φ_1 , φ_2 поворота колес вокруг осей $A_1 y_1$, $A_2 y_2$ и углом Δ поворота механизма

рулевого управления и переднего колеса относительно корпуса вокруг оси A_1z_1 . Для автомобиля величина Δ не превышает 0,5 рад.

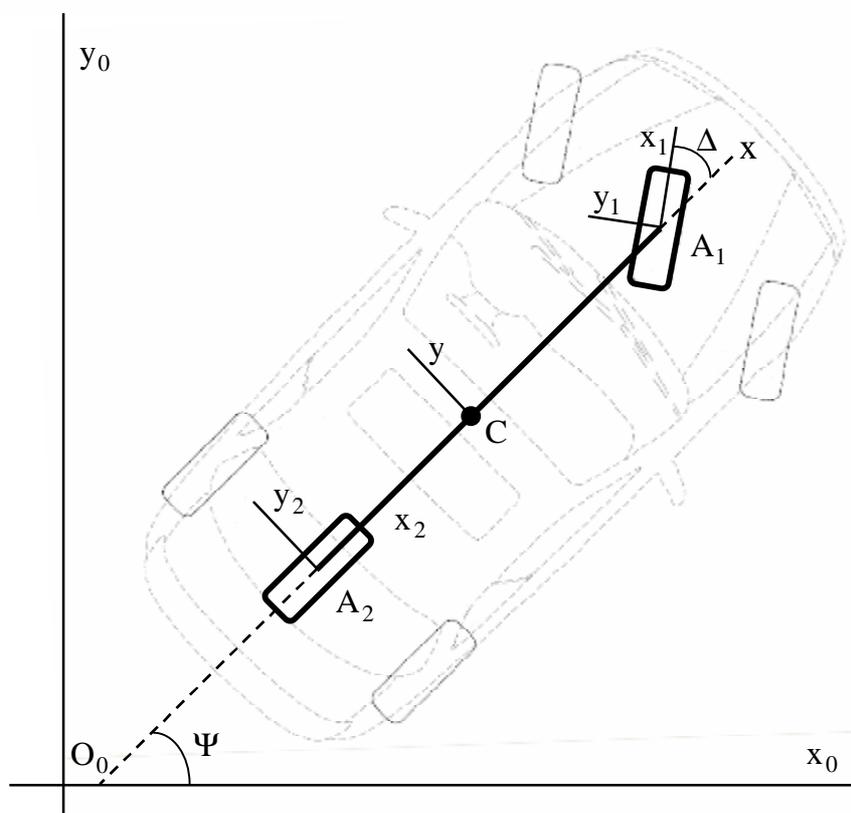
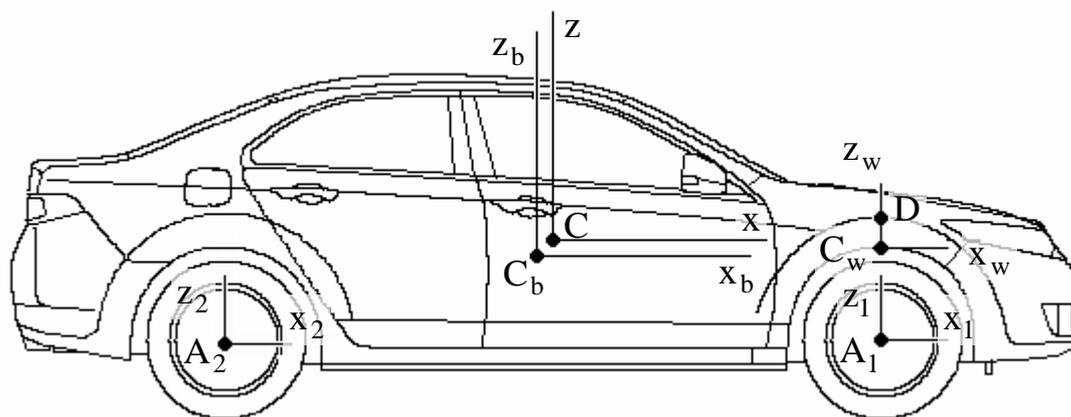


Рис. 1. Системы координат "велосипедной" модели автомобиля

Уравнения движения модели составлены из уравнений изменения количества движения и кинетического момента корпуса автомобиля, механизма рулевого управления и колес относительно их центров масс в проекциях на оси трехгранников $C_b x_b y_b z_b$, $C_w x_w y_w z_w$, $A_1 x_1 y_1 z_1$ и $A_2 x_2 y_2 z_2$ соответственно и необходимых кинематических соотношений.

После исключения неизвестных реакций связей и пренебрежения проекциями кинетических моментов колес и механизма рулевого управления, а также изменением геометрии масс системы при их повороте в работе была получена модель, совпадающая с моделью И.В. Новожилова [4, 8]:

$$\begin{aligned}
M \frac{dV_x}{dT} &= P_{x1} \cos \Delta - P_{y1} \sin \Delta + P_{x2} + MV_y \Omega_z + F_x, \\
M \frac{dV_y}{dT} &= P_{x1} \sin \Delta + P_{y1} \cos \Delta + P_{y2} - MV_x \Omega_z + F_y, \\
0 &= N_1 + N_2 - Mg, \\
0 &= -AN_1 + BN_2 - (P_{x1} \cos \Delta - P_{y1} \sin \Delta + P_{x2})H, \\
I_z \frac{d\Omega_z}{dT} &= (P_{x1} \sin \Delta + P_{y1} \cos \Delta)A - P_{y2}B + M_z, \\
I \frac{d\Omega_1}{dT} &= -P_{x1}R + L_1, \quad I \frac{d\Omega_2}{dT} = -P_{x2}R + L_2, \\
I_{z1} \frac{d\Omega_\Delta}{dT} &= M_\Delta - I_{z1} \frac{d\Omega_z}{dT}, \quad \frac{d\Psi}{dT} = \Omega_z, \quad \frac{d\Delta}{dT} = \Omega_\Delta, \\
\frac{dX}{dT} &= V_x \cos \Psi - V_y \sin \Psi, \quad \frac{dY}{dT} = V_x \sin \Psi + V_y \cos \Psi.
\end{aligned} \tag{1}$$

Здесь T – время; V_x, V_y – проекции вектора скорости автомобиля на оси Cx и Cy ; Ω_z – вертикальная составляющая угловой скорости корпуса; $\Omega_1 = d\varphi_1/dT$, $\Omega_2 = d\varphi_2/dT$ – угловые скорости вращения колес вокруг осей A_1y_1, A_2y_2 соответственно; Ω_Δ – угловая скорость вращения механизма рулевого управления и переднего колеса относительно корпуса вокруг оси A_1z_1 ; X, Y – координаты центра масс автомобиля в целом; $I_z = Mr_z^2$ – момент инерции автомобиля относительно оси Cz , M – масса автомобиля, r_z – соответствующий радиус инерции; $I = mr^2$, $I_{z1} = m_w \rho_{zw}^2 + m \rho_{z1}^2$ – осевой момент инерции колес и суммарный момент инерции переднего колеса и механизма рулевого управления относительно оси A_1z_1 ; $m, m_w, \rho, \rho_{zw}, \rho_{z1}$ – масса колеса и соответствующие радиусы инерции; R – радиус колес; A, B – продольные расстояния от центра масс автомобиля до передней и задней осей соответственно; H – высота центра масс над опорной плоскостью; P_{xj}, P_{yj}, N_j – соответственно, проекции на оси трехгранников $A_jx_jy_jz_j$ касательных и нормальных составляющих контактных сил взаимодействия j -го колеса с опорной плоскостью ($j=1,2$); L_1, L_2 – моменты, приложенные, соответственно, к переднему и заднему колесам со стороны корпуса, которые могут быть разгонными (от двигателя) или тормозными; M_Δ – момент, приложенный к механизму рулевого привода со стороны корпуса относительно оси A_1z_1 ; F_x, F_y, M_z – соответствующие проекции возмущающих сил и моментов; g – ускорение свободного падения. Координаты φ_1, φ_2 являются циклическими и в уравнения (1) не входят. Величины L_1, L_2 и M_Δ рассматриваются в качестве управлений, изменяющихся на характерных временах $T \sim T_0$ или $T > T_0$. Современные автомобили проектируются таким

образом, что $\rho_z^2 < AB$, $H < A + B$. Для большинства автомобилей отношение массы колеса к массе автомобиля имеет порядок $\mu = m/M \sim 10^{-2} - 10^{-1}$.

Выражения для нормальных составляющих контактных сил N_1, N_2 определяются из третьего и четвертого уравнений системы (1). В работе рассматриваются движения, для которых $N_1, N_2 > 0$, т.е. колеса не отрываются от дороги.

В диссертационной работе используется модель касательных составляющих контактных сил, позволяющая описывать как явление псевдоскольжения колеса, так и его движение в случае потери сцепления с дорогой:

$$P_{xj} = -\alpha_{xj} N_j \frac{E_{xj}}{E_j} p(E_j), \quad P_{yj} = -\alpha_{yj} N_j \frac{E_{yj}}{E_j} p(E_j) \quad (j=1,2) \quad (2)$$

Здесь α_{xj}, α_{yj} – коэффициенты кулонова трения скольжения в продольном и боковом направлениях относительно плоскостей симметрии колес;

$$E_{xj} = \frac{U_{xj}}{\Omega_j R}, \quad E_{yj} = \frac{U_{yj}}{\Omega_j R} \quad (j=1,2) \quad (3)$$

– относительные проскальзывания контактирующих поверхностей колес и опорной поверхности в продольном и боковом направлениях, $E_j = \sqrt{E_{xj}^2 + E_{yj}^2}$;

$$\begin{aligned} U_{x1} &= V_x \cos \Delta + (V_y + \Omega_z A) \sin \Delta - \Omega_1 R, \\ U_{y1} &= -V_x \sin \Delta + (V_y + \Omega_z A) \cos \Delta, \\ U_{x2} &= V_x - \Omega_2 R, \quad U_{y2} = V_y - \Omega_2 B \end{aligned} \quad (4)$$

– проекции скоростей точек контакта колес на оси $A_j x_j, A_j y_j$ трехгранников $A_j x_j y_j z_j$ ($j=1,2$).

Для зависимости $p(E_j)$ из (2) принята кусочно-линейная аппроксимация (рис. 2). Для автомобильных колес линейная зона, отвечающая режиму псевдоскольжения колес, имеет ширину $\varepsilon \approx 0,1$. За пределами указанной зоны касательная составляющая контактной силы достигает своего предельного значения и становится равна кулоновой силе трения скольжения.

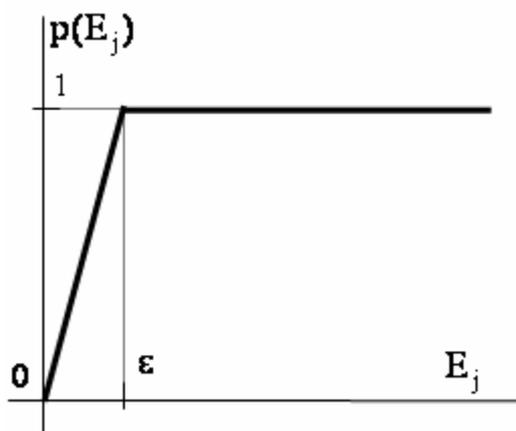


Рис. 2. Кусочно-линейная аппроксимация характеристики контактной силы

Если при движении j -го колеса справедливо неравенство

$$E_j < \varepsilon, \quad (5)$$

то считается, что колесо *не теряет сцепление с дорогой*, если

$$E_j \geq \varepsilon \quad (6)$$

– колесо *теряет сцепление с дорогой*.

Математическая модель (1)–(4) движения автомобиля не учитывает моменты верчения, возникающие при контакте колес с опорной плоскостью.

В соответствии с (2), (5), необходимые и достаточные условия реализации режима движения автомобиля без потери сцепления колес с дорогой имеют вид

$$\left(\frac{P_{x1}}{\varepsilon_{x1} N_1} \right)^2 + \left(\frac{P_{y1}}{\varepsilon_{y1} N_1} \right)^2 < 1, \quad \left(\frac{P_{x2}}{\varepsilon_{x2} N_2} \right)^2 + \left(\frac{P_{y2}}{\varepsilon_{y2} N_2} \right)^2 < 1. \quad (7)$$

Из (2) следует, что при начальных условиях, возмущениях и управлениях, обеспечивающих выполнение неравенства (6), соответствующее выбранному номеру j неравенство из (7) переходит в равенство

$$\left(\frac{P_{xj}}{\varepsilon_{xj} N_j} \right)^2 + \left(\frac{P_{yj}}{\varepsilon_{yj} N_j} \right)^2 = 1. \quad (8)$$

В диссертационной работе исследуется возможность упрощения системы (1)–(4), т.е. построения приближенных моделей более низкого порядка, позволяющих описывать движение автомобиля при различных вариантах потери сцепления колес с дорогой. Указанные модели должны быть пригодны для описания движений, возникающих при разгоне, торможении и начальной стадии заноса автомобиля.

В § 1.2 проводилось численное сравнение "велосипедной" модели с четырехколесной моделью движения автомобиля из [5], достоверность которой подтверждена испытаниями реального автомобиля. Рассматривались движения при различных путевых скоростях, углах поворота передних управляемых колес и коэффициентах сцепления. При расчетах момент, подаваемый на ось "велосипедной" модели, вдвое превышал момент на соответствующей оси четырехколесной модели.

Показано, что при движении по сухой асфальтовой дороге с высокой путевой скоростью и малым углом поворота передних колес угол крена корпуса автомобиля является достаточно малым (порядка 10^{-2}) и после завершения переходного процесса остается практически неизменным, что не приводит к значительному перераспределению нагрузки между левыми и правыми колесами одной оси; различия между боковыми контактными силами для правых и левых колес одной оси четырехколесной модели являются приемлемыми. При этом боковые контактные силы на колесах "велосипедной" модели близки к соответствующим средним значениям контактных сил четырехколесной модели, а различия для последовательных положений продольной оси автомобиля и угловой скорости его корпуса в силу указанных моделей незначительны (рис. 3).

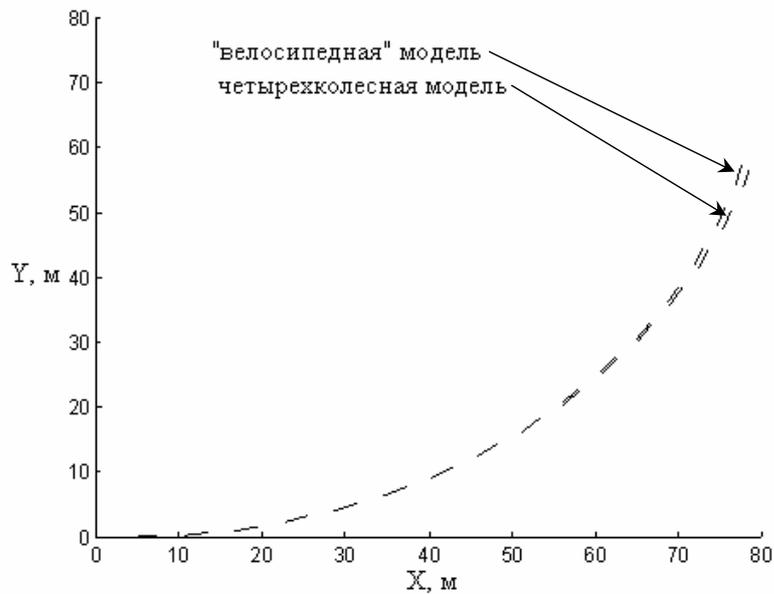


Рис. 3. Последовательные положения продольной оси переднеприводного автомобиля при разгоне на сухой асфальтовой дороге с малым углом поворота передних колес. $\Delta = 0,05$, $V_x(0) = 20$ м/с, $L_1 = 300$ Н·м

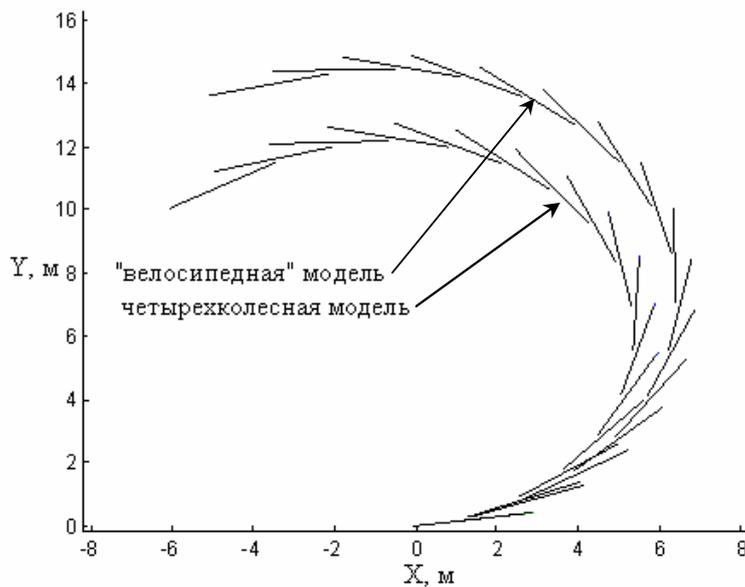


Рис. 4. Последовательные положения продольной оси переднеприводного автомобиля при неинтенсивном разгоне на сухой асфальтовой дороге с большим углом поворота передних колес. $\Delta = 0,4$, $V_x(0) = 5$ м/с, $L_1 = 100$ Н·м

При движении по сухому асфальту с невысокой путевой скоростью и большим углом поворота передних колес наблюдается похожая ситуация. Погрешность определения положения продольной оси автомобиля и угловой скорости корпуса на начальном этапе движения в силу "велосипедной" модели

увеличивается по сравнению с предыдущим случаем, но по-прежнему остается приемлемой (рис. 4).

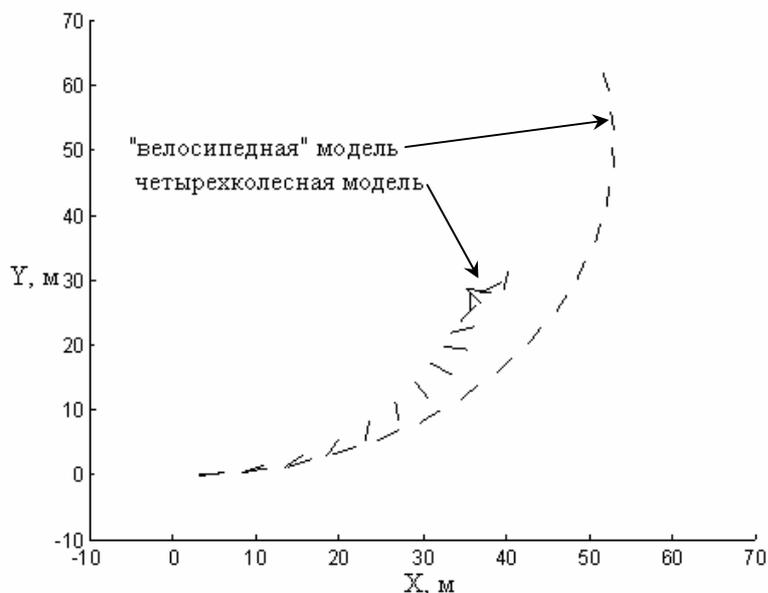


Рис. 5. Последовательные положения продольной оси переднеприводного автомобиля при разгоне на сухой асфальтовой дороге с пробуксовкой и большим углом поворота передних колес. $\Delta = 0,4$, $V_x(0) = 15$ м/с, $L_1 = 30$ Н·м

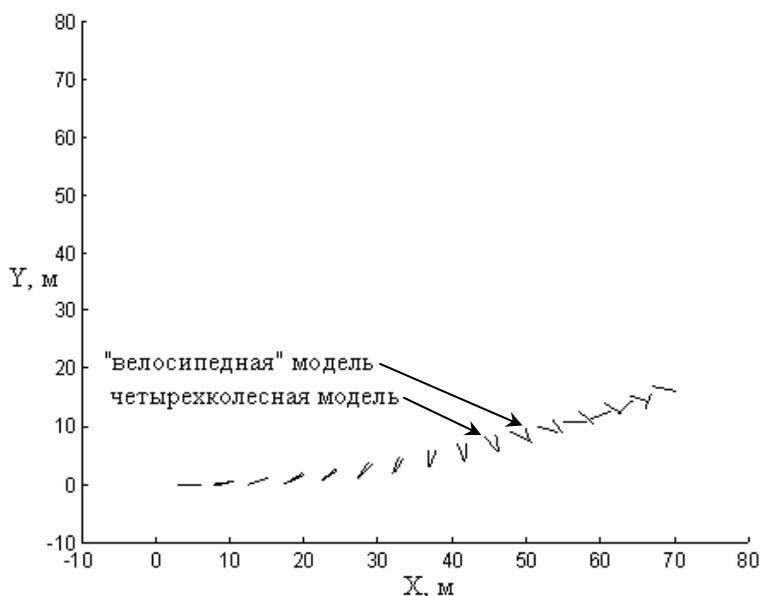


Рис. 6. Последовательные положения продольной оси переднеприводного автомобиля при разгоне на льду с пробуксовкой и большим углом поворота передних колес. $\Delta = 0,4$, $V_x(0) = 15$ м/с, $L_1 = 30$ Н·м

При движении по сухому асфальту с высокой путевой скоростью и большим углом поворота передних колес угол крена, оставаясь малым, достаточно сильно изменяется и после завершения переходного процесса, что

приводит к перераспределению нагрузки и сильным различиям между величинами контактных сил на колесах одной оси. Это приводит к сильным различиям угловой скорости и кривизны траекторий поворота "велосипедной" и четырехколесной моделей (рис. 5). При аналогичном движении по льду, т.е. при низком уровне сцепления колес с дорогой и, как следствие, малом различии между величинами контактных сил для колес одной оси, различия в поведении "велосипедной" и четырехколесной моделей на начальном этапе заноса являются приемлемыми (рис. 6).

Расчеты показали, что при значениях параметров, начальных условий, возмущений и управлений, обеспечивающих движение автомобиля с достаточно малыми (но не изменяющимися существенно после истечения времени переходного процесса) углами крена, перераспределение нагрузки между колесами одной оси является незначительным. В этом случае при малых различиях характеристик сцепления колес одной оси с дорогой различия между "велосипедной" и четырехколесной моделями автомобиля как в режиме псевдоскольжения колес, так и при движении на начальной стадии заноса, являются приемлемыми.

Вторая глава посвящена приближенному моделированию движения автомобиля без потери сцепления колес с дорогой, т.е. при выполнении условий (7). Возможность приближенного анализа связана с малостью величин μ и ε , введенных в (1), (2). При движении колес автомобиля в режиме псевдоскольжения оценками постоянных времени движения автомобиля служат $T_1 = V_{x*}/g$, $T_2 = T_1 \rho_{z1}/(A+B)$, $T_3 = \varepsilon T_1$, $T_4 = \varepsilon \mu T_1 \rho^2/R^2$. Здесь V_{x*} – характерное значение путевой скорости автомобиля. Величины T_1 и T_2 , имеющие порядок нескольких секунд, характеризуют, соответственно, процессы разгона, торможения, поворота автомобиля и поворота переднего колеса относительно корпуса. Величины T_3 и T_4 являются постоянными времени боковых и продольных движений точек контакта колес с дорогой и имеют порядки 0,1 с и 0,01 с соответственно.

Для построения приближенных моделей движения автомобиля использовался аппарат фракционного анализа [6], объединяющий методы теории размерности и подобия и методы теории сингулярных возмущений [2, 3, 9]. В системе (1)–(4), проводилась замена исходного набора фазовых переменных $V_x, V_y, \Omega_z, \Omega_j, \Omega_\Delta, \Psi, \Delta, X, Y$ новым набором $V_x, U_{xj}, U_{yj}, \Omega_\Delta, \Psi, \Delta, X, Y$, содержащим "быстрые" переменные U_{xj}, U_{yj} ($j=1,2$). Далее полученная система была приведена к безразмерной форме путем нормализации $t = T/T_*$, $v_x = V_x/V_{x*}, \dots$, где T_*, V_{x*}, \dots – характерные значения времени и переменных, отвечающие классу "медленных" движений автомобиля на временах $T_* = T_1$. Нормализованный аналог исследуемой системы может быть приведен к сингулярно возмущенной форме

$$\frac{dw}{dt} = f_1(w, u_{yj}, u_{xj}, \varepsilon, \varepsilon\mu),$$

$$\varepsilon \frac{du_{yj}}{dt} = f_{2j}(\mathbf{w}, u_{yj}, u_{xj}, \varepsilon, \varepsilon\mu), \quad (9)$$

$$\varepsilon\mu \frac{du_{xj}}{dt} = f_{3j}(\mathbf{w}, u_{yj}, u_{xj}, \varepsilon, \varepsilon\mu) \quad (j=1,2).$$

Здесь \mathbf{w} – вектор "медленных" переменных $v_x, \omega_\Delta, \psi, \delta, x, y$; u_{xj}, u_{yj} – безразмерные компоненты векторов скоростей точек контакта колес с дорогой; $\mathbf{f}_1, f_{2j}, f_{3j}$ – условные обозначения правых частей. Параметры ε и μ рассматриваются в качестве малых параметров. После вырождения $\varepsilon = 0, \mu = 0$ система (9) принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{\mathbf{w}}}{dt} &= \mathbf{f}_1(\bar{\mathbf{w}}, \bar{u}_{yj}, \bar{u}_{xj}, 0, 0), \\ 0 &= f_{2j}(\bar{\mathbf{w}}, \bar{u}_{yj}, \bar{u}_{xj}, 0, 0), \\ 0 &= f_{3j}(\bar{\mathbf{w}}, \bar{u}_{yj}, \bar{u}_{xj}, 0, 0). \end{aligned} \quad (10)$$

Нормализованные аналоги соотношений (4) переходят в уравнения неголономных связей, запрещающих проскальзывания колес модели.

Система (10) совпадает с моделью непроскальзывания, записанной в форме уравнений с множителями Лагранжа после пренебрежения инерционными свойствами колес. Роль неопределенных множителей играют компоненты контактных сил. При $F_y = 0$ выражения для P_{y1}, P_{y2} в силу (10) совпадают с выражениями, полученными Е.А. Чудаковым [11] для суммарных боковых реакций автомобиля с колесами, жесткими в боковом направлении и эластичными в радиальном и тангенциальном направлениях.

С применением методов теории сингулярных возмущений в работе были получены достаточные условия допустимости проведенного вырождения:

$$H < \min(A, B), \quad P_{y2} \sin \delta > 0. \quad (11)$$

Первое из условий (11) требует низкого расположения центра масс и выполняется для большинства автомобилей. В рамках второго условия боковая контактная сила на заднем колесе должна быть направлена внутрь поворота, что является естественным для рассматриваемого режима движения без потери сцепления колес с дорогой. При выполнении условий (11) и условий гладкости правых частей системы (9) рассогласование между решениями исходной и вырожденной систем (9) и (10) оценивается величиной $O(\varepsilon + \mu) \sim 20\%$ на интервале времени $T \sim T_1$. Эта оценка для "медленных" переменных справедлива на всем указанном интервале времени, для "быстрых" переменных – вне пограничного слоя малой ширины.

В диссертационной работе проводилось сравнение модели (10) с асимптотической моделью, полученной в [8] в дополнительном предположении о малости характерных значений угла Δ поворота передних колес. Указанные модели, имеющие одинаковый порядок дифференциальных уравнений, отличаются друг от друга как при конечных, так и при малых значениях $\Delta \neq 0$. Причина этого заключается в том, что при $|\Delta| \ll 1$ переменные V_y, Ω_z

изменяются в малых диапазонах, в связи с чем условия $U_{y1} = 0$, $U_{y2} = 0$ непроскальзывания колес модели в поперечном направлении перестают быть корректными. При $\Delta = 0$ система (10) совпадает с асимптотической моделью из [8].

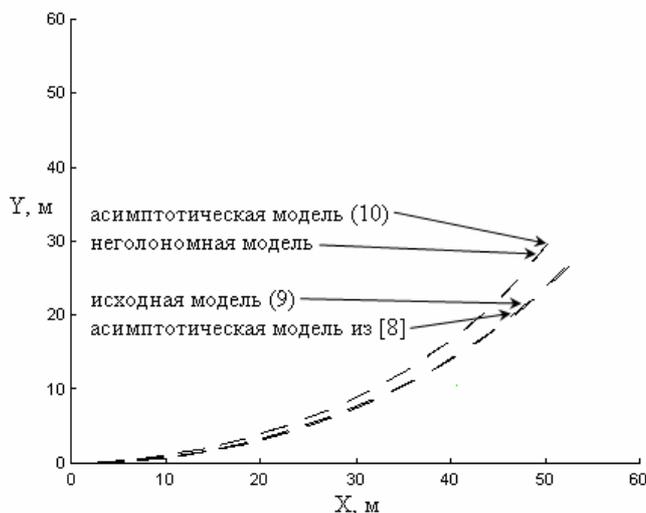


Рис. 7. Последовательные положения продольной оси переднеприводного автомобиля при разгоне с малым углом поворота передних колес в режиме движения без потери сцепления колес с дорогой. $\Delta = 0,05$, $V_x(0) = 10$ м/с, $L_1 = 300$ Н·м

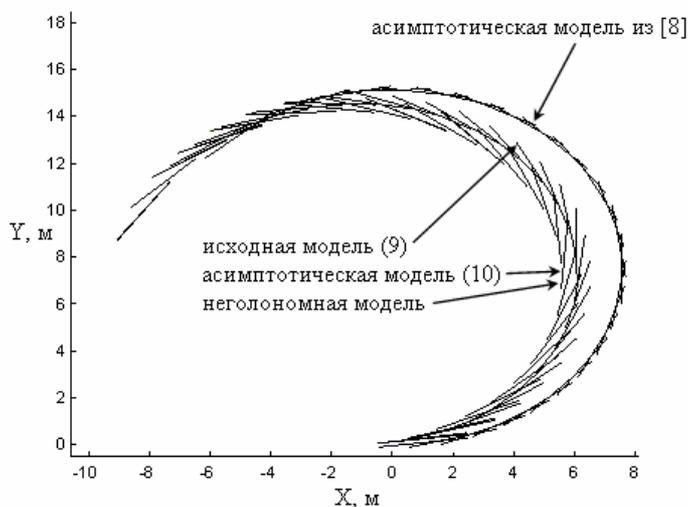


Рис. 8. Последовательные положения продольной оси полноприводного автомобиля при разгоне с большим углом поворота передних колес в режиме движения без потери сцепления колес с дорогой. $\Delta = 0,4$, $V_x(0) = 5$ м/с, $L_1 = L_2 = 50$ Н·м

Проводилось численное сравнение указанных асимптотических моделей с исходной моделью (9) и неголономной моделью движения автомобиля (рис. 7, 8). Рассматривались движения при различных путевых скоростях, углах поворота передних управляемых колес. Показано, что в режиме движения без потери сцепления колес с дорогой поведение "медленных" переменных

асимптотических моделей, построенных при помощи методов фракционного анализа, отвечает ожидаемым теоретическим оценкам точности, а неголономная модель сравнима по точности с асимптотической моделью (10).

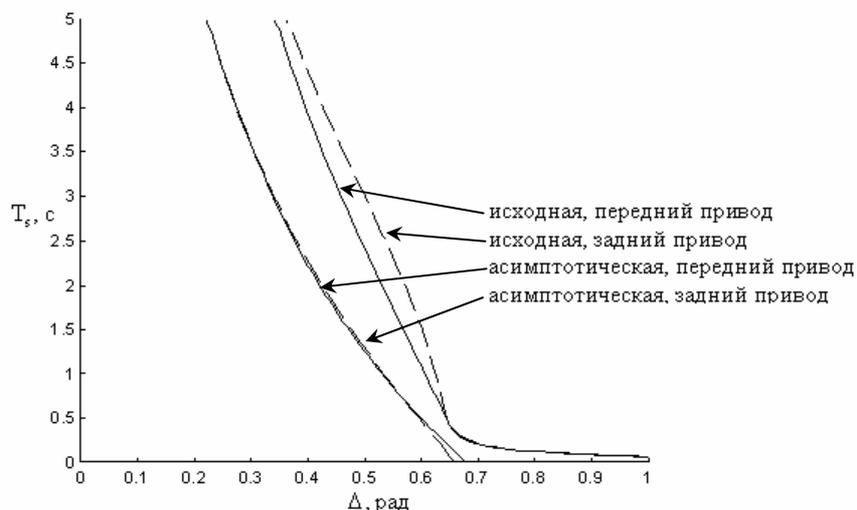


Рис. 9. Зависимость интервала времени движения без потери сцепления колес с дорогой от величины угла поворота передних колес при разгоне передне- и заднеприводного автомобилей. $L_1 = 300$ Н·м, $L_2 = 0$ Н·м и $L_1 = 0$ Н·м, $L_2 = 300$ Н·м соответственно, $V_x(0) = 5$ м/с

В работе рассматривалось влияние на потерю сцепления колес с дорогой управляющих параметров, разгонных и тормозных моментов, и угла поворота передних колес. Численное исследование показало, что оценки точности и пределы применимости асимптотических моделей соответствуют теоретическим оценкам (рис. 9).

Третья глава посвящена построению асимптотических моделей движения автомобиля при различных вариантах потери сцепления колес с дорогой. Рассматриваются три случая возможного движения: движение при потере сцепления с дорогой колес передней оси, задней оси и колес обеих осей. Асимптотические модели получаются с применением подходов, изложенных во второй главе диссертации. В случае, когда j -е колесо теряет сцепление с дорогой, соответствующие переменные U_{xj} , U_{yj} начинают изменяться медленно, что повышает порядок дифференциальных уравнений вырожденной системы по сравнению с (10). В случае потери сцепления с дорогой колес обеих осей автомобиля быстро изменяющимися переменными являются угловые скорости Ω_1 , Ω_2 вращения колес вокруг осей A_1y_1 , A_2y_2 .

Набор моделей совместно с условиями (5)–(8) перехода от одной модели к другой образует динамическую систему переменной структуры – приближенную математическую модель движения автомобиля. При выполнении условий корректности вырождения погрешность построенной системы по отношению к исходной системе является величиной порядка 10%.

В работе проводился численный анализ динамической модели переменной структуры, позволяющий подтвердить ее достоверность на

основании ряда тестовых расчетов. Рассматривались движения автомобилей с различными типами привода под действием начальных возмущений по угловой скорости корпуса, исследовалось влияние управляющих воздействий на развитие заноса.

Показано, что при потере сцепления с дорогой передних колес вследствие блокировки или пробуксовки начальная угловая скорость автомобиля достаточно быстро затухает, что приводит к стабилизации угла курса (рис. 10).

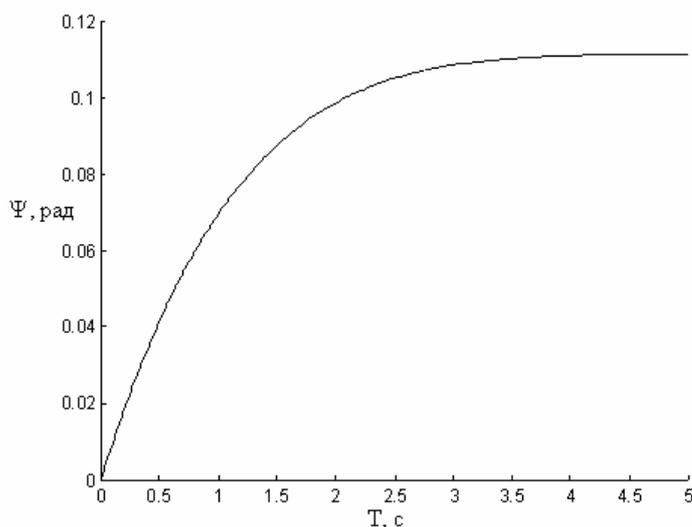


Рис. 10. Зависимость угла курса переднеприводного автомобиля от времени при разгоне с пробуксовкой передних колес. $\Delta = 0$, $\Omega_z(0) = 0,1$ 1/с, $V_x(0) = 1$ м/с

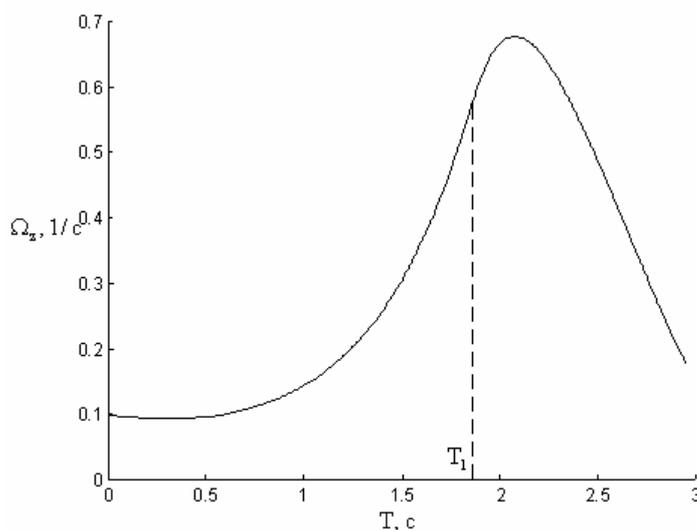


Рис. 11. Зависимость угловой скорости корпуса заднеприводного автомобиля от времени при разгоне с пробуксовкой задних колес. $\Delta = 0$, $\Omega_z(0) = 0,1$ 1/с, $V_x(0) = 1$ м/с

Аналогичная ситуация наблюдается при потере сцепления с дорогой колес обеих осей автомобиля (рис. 11, $T > T_1$). При потере сцепления с дорогой задних колес начальная угловая скорость, напротив, начинает возрастать (рис. 11, $T < T_1$), что приводит к резкому росту параметров бокового движения

(рис. 12). Таким образом, в рамках построенной модели потеря сцепления с дорогой задних колес наименее желательна с точки зрения безопасности движения по сравнению с потерей сцепления передних или колес обеих осей автомобиля.

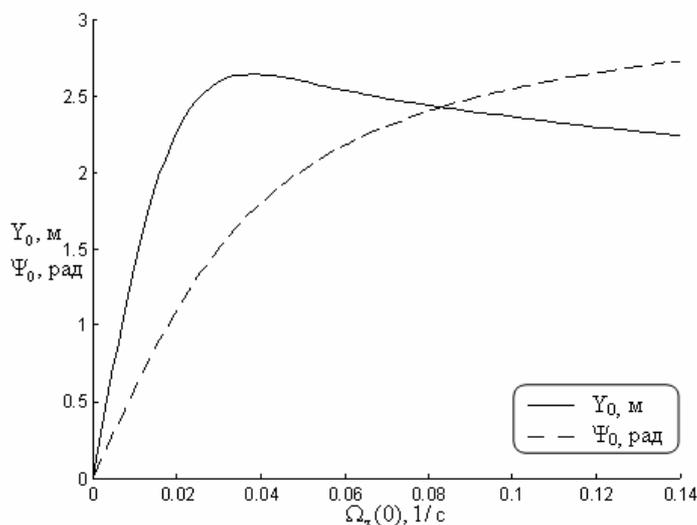


Рис. 12. Зависимость боковой координаты Y_0 центра масс и угла курса Ψ_0 автомобиля в момент остановки от начальной угловой скорости корпуса при торможении с блокировкой задних колес. $\Delta = 0$, $V_x(0) = 10$ м/с

В работе исследовалось влияние на ход заноса изменений угла поворота передних колес. При помощи модели переменной структуры подтверждено, что поворот передних колес в сторону проскальзывания задней оси автомобиля препятствует дальнейшему развитию заноса (рис. 13).

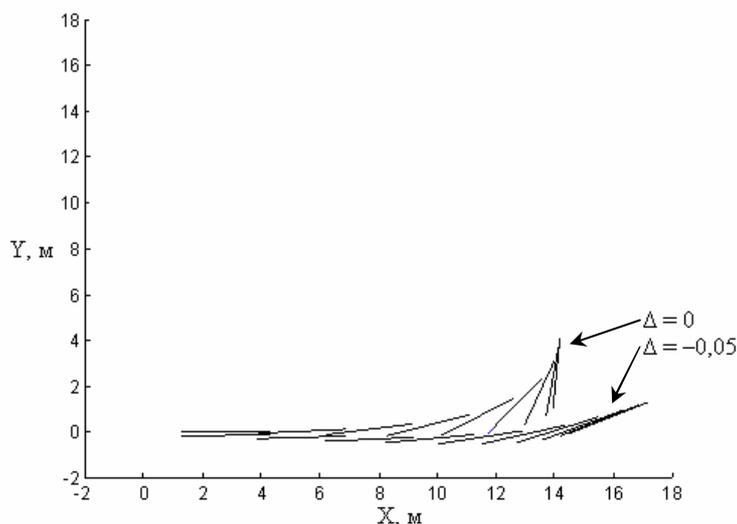


Рис. 13. Последовательные положения продольной оси автомобиля при торможении с блокировкой задних колес и фиксированном (нулевом) и повернутом в сторону заноса задней оси угле Δ поворота передних колес. $\Omega_z(0) = 0,03$ 1/с, $V_x(0) = 10$ м/с

Использование асимптотических моделей позволяет сформировать качественные оценки влияния тех или иных факторов управления автомобилем на развитие заноса.

В Заключение приведены основные положения диссертационной работы, выносимые на защиту:

1. Рассмотрена "велосипедная" модель движения автомобиля, учитывающая псевдоскольжения колес. При помощи методов фракционного анализа, включающего методы теории размерности и подобия и методы теории возмущений, построены асимптотические модели движения автомобиля для случая произвольных углов поворота передних управляемых колес. Указанные модели описывают порознь "медленные" движения на временах порядка нескольких секунд, в течение которых происходят траекторные движения автомобиля, и "быстрые" изменения скоростей точек контакта колес.
2. Рассмотрена неголономная модель движения автомобиля, имеющая тот же порядок дифференциальных уравнений, что и асимптотическая модель "медленных" составляющих движения для случая псевдоскольжения колес. Проведено аналитическое и численное сравнение неголономной модели и моделей, полученных асимптотическими методами.
3. С применением методов фракционного анализа построены приближенные математические модели движения автомобиля при различных вариантах потери сцепления колес с дорогой. Получены оценки точности и условия корректности моделей. На основании указанных моделей построена динамическая модель переменной структуры, описывающая движение автомобиля в различных дорожных ситуациях.
4. Проведен численный анализ динамической модели переменной структуры, позволивший подтвердить ее достоверность на основании тестовых расчетов; рассмотрено влияние на ход заноса управляющих параметров, разгонных и тормозных моментов, и углов поворота передних колес.

Список публикаций по теме диссертации

1. Влахова А.В., Новожилов И.В., Смирнов И.А. Математическое моделирование заноса автомобиля. // Вестник Московского университета. Сер. 1, Математика. Механика, №6, 2007. С. 44-50.
2. Влахова А.В., Смирнов И.А. Письмо в редакцию. // Вестник Московского университета. Сер. 1, Математика. Механика, №1, 2011. С. 76.
3. Влахова А.В., Смирнов И.А. Занос колесного экипажа на вираже. // Труды XII международного научно-технического семинара "Современные технологии в задачах управления, автоматике и обработки информации". Сентябрь 2003 г, Алушта. – М.: Издательство МЭИ, 2003. С. 330-331.
4. Смирнов И.А. О построении асимптотических моделей двухколесного экипажа различного уровня точности. // XXVI Конференция молодых

ученых механико-математического факультета МГУ им. М.В.Ломоносова. Тезисы докладов. М, 2004. С.113.

5. Влахова А.В., Смирнов И.А. Методы приближенного математического моделирования движения автомобиля. // Материалы 49-ой международной научно-технической конференции ААИ "Приоритеты развития отечественного автотракторостроения и подготовки инженерных и научных кадров". Секция 4. "Математические методы моделирования и оптимизации автотранспортных средств". Часть 1. М.: МАМИ, 2005. С. 37-40.
6. Влахова А.В., Смирнов И.А. Описание движения автомобиля при помощи модели переменной структуры. // Труды XIV международного научно-технического семинара "Современные технологии в задачах управления, автоматизации и обработки информации". Сентябрь 2005 г., Алушта. – Самара: Самарский государственный аэрокосмический университет, 2005. С. 90.
7. Смирнов И.А. Методы математического моделирования движения автомобиля. // Труды XV международного научно-технического семинара "Современные технологии в задачах управления, автоматизации и обработки информации". Сентябрь 2006 г., Алушта. - М 2006. С. 165.

Литература к автореферату

1. Бурдаков С.Ф., Мирошник И.В., Стельмаков Р.Э. Системы управления движением колесных роботов. Спб.: Наука, 2001. – 227 с.
2. Васильева А.Б. Асимптотические методы в теории обыкновенных дифференциальных уравнений с малыми параметрами при старших производных. // Ж. выч. матем. и мат. физ. 1963. Т. 3, № 4. С. 611–642.
3. Васильева А.Б, Бутузов В.Ф. Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений. М.: Высшая школа, 1990. – 208 с.
4. Влахова А.В., Новожилов И.В. О заносе колесного экипажа при «блокировке» и «пробуксовке» одного из колес. // Фундаментальная и прикладная математика, 2005. Т.11, вып.7. С. 11-20.
5. Магомедов М.Х. Антиблокировочные системы робастно-адаптивной стабилизации движения колесно-транспортных средств. // Диссертация на соискание ученой степени доктора физико-математических наук. М.: 2003. – 299 с.
6. Новожилов И.В. Фракционный анализ. М.: Изд-во МГУ, 1995. – 224 с.
7. Новожилов И.В., Кручинин П.А., Лебедев А.В., Влахова А.В., Боуш Р.Л. Модель движения автомобиля как основа математического обеспечения тренажерного комплекса водителя. // Мехатроника, автоматизация, управление, №6, 2007. С. 31–36.
8. Новожилов И.В., Павлов И.С. Приближенная математическая модель колесного экипажа. // Изв. РАН. МТТ. 1997. №2. С. 196–204.
9. Тихонов А.Н. Системы дифференциальных уравнений, содержащие малые параметры при производных.// Матем. сб. 31 (73). 1952. №3. С. 575–586.

10. Ткачев С.Б. Реализация движения колесного робота по заданной траектории. // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Естественные науки. № 2, 2008. С. 33–55.
11. Чудаков Е.А. Избранные труды. Т. 1. Теория автомобиля. М.: Изд-во АН СССР, 1961. – 464 с.
12. He J., Crolla D.A., Levesley M.C., Manning W.J. Coordination of active steering, driveline, and braking for integrated vehicle dynamics control. // Proc. IMechE Part D: J. Automobile Engineering. 2006. V. 220. P. 1401–1421.
13. Milliken W.F., Milliken D.L. Race Car Vehicle Dynamics. Society of Automotive Engineers, Inc., Warrendale, PA, 1995.
14. Miura T., Ushiroda Y., Sawase K., Takahashi N., Hayashikawa K. Development of Integrated Vehicle Dynamics Control System 'S-AWC'. // Mitsubishi Motors technical review. 2008. № 20. P. 21-25.
15. Pacejka H.B. Tire and Vehicle Dynamics. SAE.: N SAE0013, 2005. – 620 p.