

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

Механико–математический факультет

На правах рукописи

УДК 539.3

**КАНТОР МАРК МИХАЙЛОВИЧ**

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ С ПОМОЩЬЮ ПОЛИНОМОВ  
ЛЕЖАНДРА

Специальность: 01.02.04 – механика деформируемого твердого тела

**А В Т О Р Е Ф Е Р А Т**

диссертации на соискание ученой  
степени кандидата физико–математических наук

МОСКВА 2011 г.

Работа выполнена на кафедре механики композитов Механико-математического факультета Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова

**Научный руководитель:** Кандидат физико-математических наук,  
доцент М.У. Никабадзе

**Официальные оппоненты:** Доктор физико-математических наук,  
профессор А.В. Звягин  
Доктор физико-математических наук,  
профессор Ю.И. Димитриенко

**Ведущая организация:** Учреждение Академии наук Институт Машино-  
ведения им. А.А.Благонравова РАН, г.Москва

Защита диссертации состоится 17 июня 2011 г. в 16 часов 00 мин. на заседании Диссертационного совета Д 501.001.91 по механике при Московском государственном университете им. М.В. Ломоносова по адресу: 119991, ГСП-1, Москва, Ленинские горы, Главное здание МГУ, Механико-математический факультет, аудитория 16-10.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Механико-математического факультета МГУ (Главное здание, 14 этаж)

Автореферат разослан 16 мая 2011 г.

Ученый секретарь  
Диссертационного совета Д 501.001.91  
профессор



С.В. Шешенин

## ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

**Актуальность работы.** Одной из важных задач современной промышленности является постоянная забота о снижении веса конструкций при сохранении надежности ее работы. Поэтому при расчетах напряженно-деформированного состояния актуальны теории, позволяющие учитывать геометрическую и физическую нелинейность, а также микрополярные теории деформируемого твердого тела и уточненные способы сведения трехмерных задач к двумерным и одномерным. Очевидно, новое механическое содержание приводит к новым задачам, нуждающимся в математическом исследовании и моделировании.

Анализ опубликованных работ свидетельствует, что проблема разработки уточненных теорий стержней, пластин, оболочек и многослойных конструкций актуальна и в настоящее время. Существенно расширился используемый математический аппарат как для реализации уже поставленной проблемы, так и с целью обеспечения новых постановок. Параллельно с теоретическим используется также и экспериментальный путь исследования. Широко применяются численные методы.

Следует отметить, что классическая теория упругости довольно хорошо предсказывает поведение реальных твердых тел, находящихся под различной нагрузкой, во всех случаях, когда «зернистость» строения рассматриваемых реальных тел не является характерной. В настоящее время при расчетах конструкций на прочность в подавляющем большинстве случаев используется классическая теория упругости. Однако, существуют материалы, такие как кости животных, графит, некоторые полимеры, полиуретановые пленки, пористые материалы (пемза), различные синтетические материалы, материалы с включениями, которые при определенных условиях проявляют микрополярные свойства. Существуют эффекты, которые не предсказываются классической теорией. Если рассматривать статику, то отличное от классики поведение наблюдается при изгибе тонких пластин, балок, при кручении тонких и тонкостенных стержней, при исследовании концентрации напряжений возле отверстий, угловых точек, трещин и включений. Например, тонкие образцы жестче при изгибе и кручении, чем предсказывает классическая теория (Guathier R.D., Jahsman W.E. 1975;

Krishna Reddy, Venkatasubramanian N. K. 1978). Концентрация напряжений около отверстий оказывается меньше, а коэффициент концентрации зависит от радиуса (Mindlin N.K. 1963). Концентрация напряжений возле трещин также оказывается ниже, напротив, напряжения возле включений выше, чем предсказано классикой (Kim B.S., Eringen A.C. 1973; Itou S. 1973; Sternberg E., Muki R. 1967; Ejike U.V.C.O. 1969; Nakamura S. 1984). Если материал не обладает центром симметрии упругих свойств, то микрополярная теория предсказывает закручивание образца при растяжении (Lakes R.S., Benedict R.L. 1982). Если рассматривать динамические задачи, то ряд явлений также отличается от классических представлений. Например, упругие волны сдвига и поверхностные волны Релея распространяются с дисперсией (Eringen A.C. 1968; Матвиенко В.П., Шардаков И.Н., Кулеш М.А.), появляются волны микровращений, собственные формы колебаний отличаются от классических (Mindlin N.K., Tiersten H.F. 1975). Все эти явления используются для определения материальных констант микрополярной теории упругости. Обзор работ в этом направлении свидетельствует, что существует несколько экспериментальных методов для их определения и ведется активная работа для нахождения материальных констант различных сред.

В связи с широким использованием тонких тел (одно-, двух-, трех- и многослойных конструкций) возникает потребность создания новых теорий и усовершенствованных методов их расчета. Поэтому их построение и развитие эффективных методов расчета тонких тел являются важной и актуальной задачей.

В настоящей диссертационной работе исследуется тело, похожее на криволинейный стержень с прямоугольным поперечным сечением, но при исследовании используются трехмерные постановки задачи. Используя теорию моментов относительно полиномов Лежандра, трехмерная задача сводится к одномерной. Получены новые представления системы уравнений движения микрополярной теории, граничных условий, а также определяющих соотношений (ОС) микрополярной теории исследуемых тел в моментах относительно системы ортогональных полиномов Лежандра. Даны постановки задач в рамках микрополярной теории упругости в моментах. Решены некоторые задачи для двумерной

области как в классическом, так и микрополярном случае.

### **Цель работы.**

Построение новых теорий тонких микрополярных тел с двумя малыми размерами и решение некоторых задач теории упругости с помощью полиномов Лежандра.

### **Научная новизна работы заключается в следующем:**

— впервые рассмотрена параметризация области трехмерного тонкого тела с двумя малыми размерами при произвольной базовой линии, когда поперечные координаты принимают значения из сегмента  $[-1,1]$ .

— впервые даны постановки задач микрополярной теории для тонких тел с двумя малыми размерами при рассматриваемой параметризации;

— впервые даны постановки задач в моментах микрополярной механики деформируемых тонких тел с двумя малыми размерами;

— впервые даны постановки задач в моментах с нулевого до пятого приближения включительно для двумерных прямоугольных областей;

— впервые дана постановка задачи в моментах пятого приближения для многослойных двумерных прямоугольных областей;

— впервые приводятся численные решения двумерных задач с нулевого до пятого приближения включительно и даются сравнения с классическими решениями, в том числе с решением методом конечных элементов.

**Обоснованность и достоверность** теоретических положений и выводов диссертации подтверждены строгими математическими выводами, основанными на положениях механики и сравнением полученных решений задач с известными классическими решениями.

**Теоретическая и практическая значимость работы.** Результаты имеют важное теоретическое и прикладное значение и могут быть использованы для решения многих важных практических задач в тех областях техники, в которых применяются тонкие тела. В частности, могут быть использованы в ЦАГИ, ЦИАМ, НИИ Механики при МГУ, ИТПМ СО РАН, ИПМ РАН, ЦНИИМаш, МАИ и в других организациях, занимающихся разработкой и совершенствованием

нием образцов автомобильной, ракетной, морской и авиационной техники.

**На защиту выносятся** математические модели теории тонких микрополярированных и классических тел с двумя малыми размерами, постановки задач в моментах с нулевого по пятое приближение для двумерных прямоугольных областей, а также результаты численного решения двумерных задач.

**Апробация работы.** Основные результаты, полученные в диссертации, докладывались и обсуждались на семинарах:

- аспирантский семинар и научно-исследовательский семинар кафедры механики композитов механико-математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова под руководством д.ф.-м.н., проф. Б.Е. Победри (2010 г., 2011 г.),
- научно-исследовательский семинар кафедры теории пластичности механико-математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова под руководством член-корр. РАН Е.В. Ломакина и д.ф.-м.н., проф. В.М. Александрова (2011 г.),
- научно-исследовательский семинар «Актуальные проблемы геометрии и механики» на механико-математическом факультете МГУ им. М.В. Ломоносова под руководством д.ф.-м.н., проф. Д.В. Георгиевского, д.ф.-м.н., М.В. Шамолина, д.ф.-м.н., проф. С.А. Агафонова (2011 г.),
- Московский ежемесячный семинар молодых ученых и студентов по проблемам машиноведения под руководством чл. корр. РАН Н.А. Махутова,
- научно-методический семинар для студентов 1-6 курсов и аспирантов МГТУ им. Баумана Н.Э. под руководством профессоров С.А. Агафонова, В.И. Ванько, В.В. Феоктистова (2011 г.),
- на научных конференциях «Ломоносовские чтения» секция механики, МГУ им. М.В. Ломоносова (2007, 2008 и 2010 г.г.),
- на международном научном симпозиуме по проблемам механики деформируемых тел, посвященного 100-летию со дня рождения А.А. Ильюшина. Москва, 20-21 января 2011 года.

**Публикация результатов.** Основные результаты диссертации опубликованы в работах, список которых приведен в конце автореферата.

**Структура и объем работы.** Диссертация состоит из содержания, введе-

ния, четырех глав, заключения и списка литературы. В работе содержится 24 рисунка, 150 библиографических ссылок. Общий объем диссертации 147 страниц.

**Личный вклад автора.** Результаты, составляющие основное содержание диссертации, получены автором самостоятельно. В совместных работах соавторам принадлежат постановки задач. Разработка алгоритма предлагаемого метода, его программная реализация и тестирование, а также решение конкретных задач выполнены соискателем самостоятельно.

## ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

**Во введении** дается краткий обзор литературы, обоснована актуальность научных теоретических исследований. Сформулированы: цель работы, ее научная новизна, теоретическая и практическая значимость.

**В первой главе** «*K* параметризациям области тонкого тела с двумя малыми размерами. Представления градиента и дивергенции тензора и уравнений движения. Рекуррентные соотношения системы полиномов Лежандра» рассмотрены некоторые вопросы о параметризациях, когда в качестве базовой выбирается срединная линия, проходящая через центры сечений тела, а также когда в качестве базовой выбирается произвольная линия области трехмерного тонкого тела с двумя малыми размерами. Дано векторное параметрическое уравнение области тонкого тела с двумя малыми размерами. На рис. 1 показано тонкое тело и его прямоугольное поперечное сечение  $ABCD$ . Мы предполагаем, что все поперечные сечения являются прямоугольными. Базовая линия проходит через точку  $M$ , касательной которой является вектор  $\mathbf{r}_3$ , перпендикулярный к плоскости рисунка и направленный на нас. Радиус-вектор произвольной точки  $N$  области тонкого тела представляется в виде

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{r}}(x', x^3) &= \mathbf{r}(x^3) + \sum_{K=1}^2 [\bar{h}_K(x^3) + x^K h_K(x^3)] \mathbf{e}_K(x^3) = \\ &= \mathbf{r}(x^3) + \sum_{K=1}^2 h_K^{-1} [\bar{h}_K(x^3) + x^K h_K(x^3)] \mathbf{r}_K(x^3), \quad -1 \leq x^I \leq 1, \end{aligned} \tag{1}$$

где  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(x^3)$  – векторное параметрическое уравнение базовой линии,  $\bar{h}_I =$

$(h_I^{(+)} - h_I^{(-)})/2$ ,  $h_I = (h_I^{(+)} + h_I^{(-)})/2$ ,  $\mathbf{r}_I = h_I \mathbf{e}_I$ ,  $\langle I = 1, 2 \rangle$ ,  $\mathbf{r}_3 = \partial_3 \mathbf{r}$ ,  $\mathbf{e}_1$  и  $\mathbf{e}_2$  – единичные векторы главной нормали и бинормали к базовой линии соответственно. Обозначим через  $S_1^{(-)}$  и  $S_2^{(-)}$  лицевые поверхности тонкого тела с двумя малыми

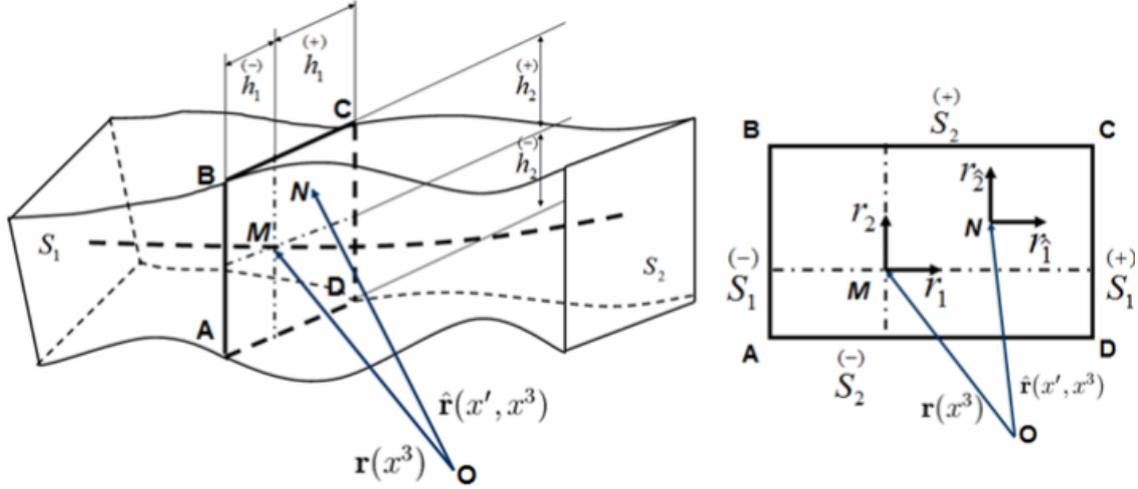


Рис. 1: Тонкое тело с двумя малыми размерами

размерами, определяемые с помощью (1) при  $x^1 = -1$ ,  $\forall(x^2, x^3)$  и  $x^2 = -1$ ,  $\forall(x^1, x^3)$  соответственно, а через  $S_1^{(+)}$  и  $S_2^{(+)}$  лицевые поверхности, определяемые при  $x^1 = 1$ ,  $\forall(x^2, x^3)$  и  $x^2 = 1$ ,  $\forall(x^1, x^3)$  соответственно. Левый торец, определяемый с помощью (1) при  $x^3 = x_1^3 = const$  и  $-1 \leq x^I \leq 1$ , обозначим через  $S_1$ , а через  $S_2$  обозначим правый торец, который определяется при  $x^3 = x_2^3 = const$  ( $x_2^3 > x_1^3$ ) и  $-1 \leq x^I \leq 1$ . Дифференцируя (1) по  $x^I$ , получим

$$\mathbf{r}_{\hat{I}} = \partial_I \hat{\mathbf{r}}(x', x^3) = h_I \mathbf{e}_I = \mathbf{r}_I, \quad \langle I = 1, 2 \rangle, \quad -1 \leq x^I \leq 1, \quad x^3 \in \mathbb{R}^1. \quad (2)$$

Дифференцируя (1) по  $x^3$ , и, учитывая формулы Френе, будем иметь

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{\hat{3}} \equiv \partial_3 \hat{\mathbf{r}}(x', x^3) &= h_1^{-1} [(\partial_3 \bar{h}_1 + x^1 \partial_3 h_1) + k_2(\bar{h}_2 + x^2 h_2)] \mathbf{r}_1 + \\ &+ h_2^{-1} [(\partial_3 \bar{h}_2 + x^2 \partial_3 h_2) + k_2(\bar{h}_1 + x^1 h_1)] \mathbf{r}_2 + [1 - k_1(\bar{h}_1 + x^1 h_1)] \mathbf{r}_3. \end{aligned} \quad (3)$$

Очевидно, соотношениями (2) и (3) построен ковариантный базис в произвольной точке  $N$  области тонкого тела. При этом из (2) видно, что во всех точках области тонкого тела первые два базисные векторы одни и те же и равны  $\mathbf{r}_I = h_I \mathbf{e}_I$ ,  $\langle I = 1, 2 \rangle$ . В дальнейшем в качестве базиса, связанного с

базовой линии, выберем  $(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3)$ . Тогда имеем

$$\sqrt{g} = (\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2) \cdot \mathbf{r}_3 = h_1 h_2, \quad \mathbf{r}^1 = h_1^{-2} \mathbf{r}_1, \quad \mathbf{r}^2 = h_2^{-2} \mathbf{r}_2, \quad \mathbf{r}^3 = \mathbf{r}_3. \quad (4)$$

Найдем элементы фундаментальной и обратной матриц для базисов, связанных с базовой линией. На основании (2) и (4) находим

$$g_{\alpha\beta} = h_\alpha h_\beta \delta_{\alpha\beta}, \quad g_{33} = 1, \quad g^{\alpha\beta} = h_\alpha^{-1} h_\beta^{-1} \delta_{\alpha\beta}, \quad g^{33} = 1, \quad < \alpha, \beta = 1, 2 > .$$

Нетрудно заметить, что в силу (2) и (3) получим

$$\begin{aligned} \sqrt{\hat{g}} &= (\mathbf{r}_{\hat{1}} \times \mathbf{r}_{\hat{2}}) \cdot \mathbf{r}_{\hat{3}} = \sqrt{g} [1 - k_1 (\bar{h}_1 + x^1 h_1)], \\ \hat{\vartheta} &= \sqrt{\hat{g} g^{-1}} = 1 - k_1 (\bar{h}_1 + x^1 h_1). \end{aligned} \quad (5)$$

Не представляет труда найти выражения для компонент ЕТВР (единичного тензора второго ранга)  $g_{\hat{p}q} = \mathbf{r}_{\hat{p}} \cdot \mathbf{r}_q$  и  $g_{\hat{p}}^q = \mathbf{r}_{\hat{p}} \cdot \mathbf{r}^q$ . В самом деле, с помощью (2), (3) и (4) получим

$$g_{\hat{p}q}, g_{\hat{p}}^q = \begin{cases} g_{\hat{P}Q} = g_{PQ} = h_P h_Q \delta_{PQ}, & < P, Q = 1, 2 >, & g_{\hat{P}}^Q = g_P^Q, \\ g_{\hat{P}3} = g_{P3} = 0, & g_{\hat{P}}^3 = g_P^3 = 0, \\ g_{\hat{3}1} = h_1 [(\partial_3 \bar{h}_1 + x^1 \partial_3 h_1) + k_2 (\bar{h}_2 + x^2 h_2)], \\ g_{\hat{3}}^1 = h_1^{-1} [(\partial_3 \bar{h}_1 + x^1 \partial_3 h_1) + k_2 (\bar{h}_2 + x^2 h_2)], \\ g_{\hat{3}2} = h_2 [(\partial_3 \bar{h}_2 + x^2 \partial_3 h_2) - k_2 (\bar{h}_1 + x^1 h_1)], \\ g_{\hat{3}}^2 = h_2^{-1} [(\partial_3 \bar{h}_2 + x^2 \partial_3 h_2) - k_2 (\bar{h}_1 + x^1 h_1)], \\ g_{\hat{3}3} = g_{\hat{3}}^3 = 1 - k_1 (\bar{h}_1 + x^1 h_1) = \hat{\vartheta}. \end{cases} \quad (6)$$

Заметим, что векторы контравариантного базиса в произвольной точке  $N$  можно найти по формуле  $\mathbf{r}^{\hat{p}} = (1/2) C^{\hat{p}\hat{q}\hat{s}} \mathbf{r}_{\hat{q}} \times \mathbf{r}_{\hat{s}}$  и тогда можно ввести в рассмотрение  $g^{\hat{p}q} = \mathbf{r}^{\hat{p}} \cdot \mathbf{r}^q$  и  $g_{\hat{p}}^q = \mathbf{r}^{\hat{p}} \cdot \mathbf{r}_q$  – компоненты переноса ЕТВР. Очевидно, для связей между базисными векторами имеют место формулы

$$\mathbf{r}^{\hat{p}} = g_{\hat{p}}^q \mathbf{r}^q, \quad \mathbf{r}^p = g_{p\hat{q}} \mathbf{r}^{\hat{q}} \quad (g_k^{\hat{p}} g_{\hat{q}}^k = g_{\hat{q}}^{\hat{p}}, \quad g_{\hat{m}}^p g_q^{\hat{m}} = g_q^p),$$

сохраняющие силу при жонглировании свободными и немymi индексами.

Найдем выражения для  $\mathbf{r}^{\hat{P}}$  и  $\mathbf{r}^{\hat{3}}$ . В силу (2), (5) и (6) получим

$$\mathbf{r}^{\hat{P}} = \mathbf{r}^P + g_3^{\hat{P}} \mathbf{r}^3 = \mathbf{r}^P - g_3^P g_3^{\hat{3}} \mathbf{r}^3, \quad \mathbf{r}^{\hat{3}} = g_3^{\hat{3}} \mathbf{r}^3. \quad (7)$$

Нетрудно заметить, что в силу (2), (4) и (7) для компонент  $g^{\hat{P}q}$  и  $g_q^{\hat{P}}$  имеем выражения

$$g^{\hat{P}q}, g_q^{\hat{P}} = \begin{cases} g^{\hat{P}Q} = g^{PQ}, & g_Q^{\hat{P}} = g_Q^P, \\ g^{\hat{P}3} = g_3^{\hat{P}} = -g_3^P g_3^{\hat{3}}, \\ g^{\hat{3}Q} = 0, & g_Q^{\hat{3}} = 0, \\ g^{\hat{3}3} = g_3^{\hat{3}} = (g_3^3)^{-1} = \hat{\vartheta}^{-1}. \end{cases}$$

Следовательно, если  $|k_1(\bar{h}_1 + x^1 h_1)| < 1$ , то

$$g_3^{\hat{3}} = \hat{\vartheta}^{-1} = [1 - k_1(\bar{h}_1 + x^1 h_1)]^{-1} = \sum_{s=0}^{\infty} [k_1(\bar{h}_1 + x^1 h_1)]^s$$

и в таком случае будем называть тело тонким. Если  $|k_1(\bar{h}_1 + x^1 h_1)| = 0$ , то мы имеем дело с призматическим телом.

При рассматриваемой параметризации оператор градиента от произвольной тензорной величины можно представить в виде  $\hat{\nabla} \mathbb{F} = g_3^{\hat{3}} \mathbf{r}^3 N_3 \mathbb{F} + \mathbf{r}^P \partial_P \mathbb{F}$ , где введен дифференциальный оператор  $N_3 = \partial_3 - g_3^P \partial_P$ . В силу определения дивергенции, например, для тензора напряжений  $\mathbf{P}$  получим  $\hat{\nabla} \cdot \mathbf{P} = g_3^{\hat{3}} N_3 \mathbf{P}^3 + \partial_P \mathbf{P}^P$ . Далее даются различные представления уравнений движения теории тонких тел с двумя малыми размерами, одно из которых выглядит так:

$$g_3^{\hat{3}} N_3 \mathbf{P}^3 + \partial_P \mathbf{P}^P + \rho \mathbf{F} = \rho \partial_t^2 \mathbf{u}, \quad g_3^{\hat{3}} N_3 \boldsymbol{\mu}^3 + \partial_P \boldsymbol{\mu}^P + \underset{\simeq}{\mathbf{C}} \overset{2}{\otimes} \mathbf{P} + \rho \mathbf{m} = \mathbf{J} \cdot \partial_t^2 \boldsymbol{\varphi},$$

где  $\mathbf{P}^i$  и  $\boldsymbol{\mu}^i$  — контравариантные составляющие тензора напряжений и моментных напряжений,  $\rho$  — плотность,  $\mathbf{J}$  — тензор инерции,  $\mathbf{u}$  и  $\boldsymbol{\varphi}$  — векторы перемещения и микровращения,  $\mathbf{F}$  и  $\mathbf{m}$  — векторы объемных сил и объемных моментов,  $\overset{2}{\otimes}$  — внутреннее 2-произведение. Выписаны основные рекуррентные

формулы, играющие важную роль при построении различных вариантов теорий тонких тел.

**Во второй главе** «Элементы теории моментов и некоторые соотношения в моментах относительно систем полиномов Лежандра. Представления граничных условий и системы уравнений движения в моментах» применяется параметризация области тонкого тела, когда в качестве базовой выбирается произвольная линия. При этой параметризации дано определение момента порядка  $(m, n)$  некоторой величины относительно полиномов Лежандра  $P_k(x^I)$

$$\mathbb{M}_L^{(m,n)}(\mathbb{F}) = \frac{2m+1}{2} \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbb{F}(x^1, x^2, x^3) P_m(x^1) P_n(x^2) dx^1 dx^2.$$

Выписаны моменты первых производных. Получены выражения для моментов частных производных и некоторых выражений, а также моменты некоторых дифференциальных операторов (градиент, дивергенция) относительно системы полиномов Лежандра.

Получены различные представления системы уравнений движения в моментах, одно из которых можно записать в виде

$$\begin{aligned} & \left\{ \nabla_3^{(m,n)} \mathbb{M}_L(\mathbf{P}^{\hat{3}}) - \frac{2m+1}{2} \sum_{p=0}^m [1 - (-1)^{m+p}] \mathbb{M}_L^{(p,n)}(\mathbf{P}^1) - h_1^{-1} \partial_3 h_1 m \mathbb{M}_L^{(m,n)}(\mathbf{P}^{\hat{3}}) + \right. \\ & + \frac{2m+1}{2} \sum_{p=0}^m h_1^{-1} \left[ (\partial_3^{(+)} h_1 + k_2 \bar{h}_2) + (-1)^{m+p} (\partial_3^{(-)} h_1 - k_2 \bar{h}_2) \right] \mathbb{M}_L^{(p,n)}(\mathbf{P}^{\hat{3}}) + \\ & + \frac{2m+1}{2} h_1^{-1} h_2 k_2 \sum_{p=0}^m [1 - (-1)^{m+p}] \left[ \frac{n}{2n-1} \mathbb{M}_L^{(p,n-1)}(\mathbf{P}^{\hat{3}}) + \frac{n+1}{2n+3} \mathbb{M}_L^{(p,n+1)}(\mathbf{P}^{\hat{3}}) \right] - \\ & - \frac{2n+1}{2} \sum_{p=0}^n [1 - (-1)^{n+p}] \mathbb{M}_L^{(m,p)}(\mathbf{P}^2) - h_2^{-1} \partial_3 h_2 n \mathbb{M}_L^{(m,n)}(\mathbf{P}^{\hat{3}}) + \\ & + \frac{2n+1}{2} \sum_{p=0}^n h_2^{-1} \left[ (\partial_3^{(+)} h_2 - k_2 \bar{h}_1) + (-1)^{n+p} (\partial_3^{(-)} h_2 + k_2 \bar{h}_1) \right] \mathbb{M}_L^{(m,p)}(\mathbf{P}^{\hat{3}}) - \\ & - \frac{2n+1}{2} h_2^{-1} h_1 k_2 \sum_{p=0}^n [1 - (-1)^{n+p}] \left[ \frac{m}{2m-1} \mathbb{M}_L^{(m-1,p)}(\mathbf{P}^{\hat{3}}) + \frac{m+1}{2m+3} \mathbb{M}_L^{(m+1,p)}(\mathbf{P}^{\hat{3}}) \right] \left. \right\} + \\ & + \mathbb{\Phi}^{(m,n)} = \rho \mathbb{M}_L^{(m,n)}(\partial_t^2 \mathbf{u}), \end{aligned}$$

$$\{\mathbf{P} \rightarrow \boldsymbol{\mu}\} + \mathbb{C} \otimes \mathbb{M}_L^{(m,n)}(\mathbf{P}) + \mathbf{M} = \mathbf{J} \cdot \mathbb{M}_L^{(m,n)}(\partial_t^2 \boldsymbol{\varphi}), \quad m, n \in \mathbb{N}_0,$$

где запись  $\{\mathbf{P} \rightarrow \boldsymbol{\mu}\}$  означает, что вместо нее следует писать выражение, которое получается из выражения в фигурных скобках из предыдущего соотношения если  $\mathbf{P}$  заменим на  $\boldsymbol{\mu}$ ,  $\Phi^{(m,n)}(x^3, t)$  и  $\mathbf{M}^{(m,n)}(x^3, t)$  выражаются через векторы объемных сил, объемных моментов и граничные условия на лицевых поверхностях. Дано определение приближения порядка  $(r, M, N)$  уравнений движения. Выписаны граничные условия физического содержания на лицевых поверхностях и торцах в случае параметризации области тонкого тела на основе произвольной базовой линии, из которых получены соответствующие граничные условия в моментах.

**В третьей главе** «Представления закона Гука микрополярной теории упругости в моментах. Постановка задачи теории тонких тел с двумя малыми размерами в моментах» даны представления определяющих соотношений в моментах, изложен метод нормированных моментов полей тензоров напряжений и моментных напряжений. При этом методе, фиксируя некоторые неотрицательные целые числа  $M$  и  $N$ , из бесконечной системы уравнений движения в моментах рассматривается  $2(M+1)(N+1)$  уравнений. При этом, из них первые  $(M+1)(N+1)$  уравнений выбираются из системы уравнений в моментах поля тензора напряжений и первые  $(M+1)(N+1)$  — из системы уравнений в моментах полей тензоров напряжений и моментных напряжений. С помощью моментов перемещений  $\mathbf{u}^{(k,l)}$  и микровращений  $\boldsymbol{\varphi}^{(k,l)}$ ,  $k = \overline{0, M}$ ,  $l = \overline{0, N}$  и граничных условий на лицевых поверхностях определяются так называемые нормирующие векторы-функции  $\mathbf{u}^{(m,+)}$ ,  $\mathbf{u}^{(m,-)}$ ,  $\boldsymbol{\varphi}^{(m,+)}$ ,  $\boldsymbol{\varphi}^{(m,-)}$ ,  $m = \overline{0, M}$ ,  $\mathbf{u}^{(+,n)}$ ,  $\mathbf{u}^{(-,n)}$ ,  $\boldsymbol{\varphi}^{(+,n)}$ ,  $\boldsymbol{\varphi}^{(-,n)}$ ,  $n = \overline{0, N}$ , участвующие в определяющих соотношениях в моментах. Определение этих векторов-функций происходит таким образом, что поля тензоров напряжений и моментных напряжений оказываются согласованными с граничными условиями на лицевых поверхностях.

Также изложен упрощенный метод редукции для классической теории. В этом случае из бесконечной системы уравнений выделяем первые  $(M+1)(N+1)$  уравнений и предполагаем, что моменты порядка  $(k, l)$  от любой величины равны 0 если  $k > M$  или  $l > N$ . Решив какую-нибудь краевую задачу приближения  $(r, M, N)$ , получим соответственно приближенные выражения полей вектора

перемещений и тензора напряжений, которые удовлетворяют граничным условиям на торцах. Очевидно, возникает вопрос, в какой мере удовлетворяются граничные условия физического содержания на лицевых поверхностях. Вообще говоря, эти условия не будут удовлетворяться с необходимой точностью. В этой связи встает вопрос, нельзя ли к приближенному выражению вектора перемещения  $\mathbf{u}_{(M,N)}(x', x^3, t) = \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N \mathbf{u}^{(m,n)} P_m(x^1) P_n(x^2)$  добавить слагаемое  $\mathbf{U}_0(x', x^3, t)$  (корректирующее слагаемое), удовлетворяющее следующим условиям:

1) поле тензора напряжений, соответствующее полю перемещений  $\mathbf{u}_{(M,N)} + \mathbf{U}_0$ , согласовано с граничными условиями на лицевых поверхностях  $S_I^{(+)}$  и  $S_I^{(-)}$ ,  $I = 1, 2$ ,

2) моменты  $\mathbf{U}_0^{(k,l)}$  векторного поля  $\mathbf{U}_0$  равны нулю, если  $k \leq M$  и  $l \leq N$ ,

3) нормы тензорных полей  $\mathbf{U}_0$  и  $\mathbf{P}_0 = \mathbf{C} \otimes \hat{\nabla} \mathbf{U}_0$  можно сделать сколь угодно малыми внутри области тонкого тела, т.е. для любого  $\varepsilon > 0$  существует такое  $\delta(\varepsilon) > 0$ , что

$$|\mathbf{U}_0| < \varepsilon, \quad \|\mathbf{P}_0\| < \varepsilon \quad (\|\mathbf{P}_0\| = \sqrt{\mathbf{P}_0 \otimes \mathbf{P}_0}),$$

$$-h_I^{(-)} + (\delta_I^1 + \delta_I^2)\delta \leq x^I \leq h_I^{(+)} - (\delta_I^1 + \delta_I^2)\delta, \quad \forall x^3?$$

Доказано, что векторное поле  $\mathbf{U}_0$ , удовлетворяющее перечисленным условиям, существует.  $\mathbf{U}_0$  представляется в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_0(x', x^3, t) = & \mathbf{B}_{m+2}(x^2, x^3, t) [P_{m+3}(x^1) - P_{m+1}(x^1)] + \\ & + \mathbf{B}_{m+3}(x^2, x^3, t) [P_{m+4}(x^1) - P_{m+2}(x^1)] + \mathbf{A}_{n+2}(x^1, x^3, t) [P_{n+3}(x^2) - P_{n+1}(x^2)] + \\ & + \mathbf{A}_{n+3}(x^1, x^3, t) [P_{n+4}(x^2) - P_{n+2}(x^2)], \quad m > M, \quad n > N, \end{aligned}$$

Векторы-функции  $\mathbf{B}_k(x^2, x^3, t)$ ,  $k = m+1, m+2$  и  $\mathbf{A}_l(x^1, x^3, t)$ ,  $l = n+1, n+2$ , определяются так, чтобы векторное поле  $\mathbf{U}_0(x', x^3, t)$  удовлетворяло указанным выше условиям.

Дана постановка задачи тонкого тела с двумя малыми размерами, в которую входят:

1. Система уравнений движения в моментах приближения порядка  $(r, M, N)$ ,
2. Система граничных условий физического содержания на лицевых поверхностях в моментах приближения порядка  $(M, N)$ ,
3. Система граничных условий на торцах физического содержания приближения порядка  $(r, M, N)$  или кинематического содержания в моментах приближения порядка  $(M, N)$ ,
4. Система законов Гука линейной микрополярной теории упругости в моментах приближения порядка  $(r, M, N)$  при упрощенном методе редукции либо в нормированных моментах приближения порядка  $(r, M, N)$ , если во время редукции используется метод нормированных моментов.
5. Система начальных условий в моментах приближения порядка  $(M, N)$ .

**В четвертой главе** «*Некоторые частные задачи*», исходя из общей постановки задачи, сформулирована постановка задачи для призматического тонкого тела с двумя малыми размерами, изложен метод нормированных моментов, для изотропного тела получено дифференциальное уравнение четвертого порядка относительно прогиба, которое совпадает с точностью до коэффициентов с уравнением колебаний балки Тимошенко. Даны постановки задач с нулевого до пятого приближения включительно для двумерной области как в классическом, так и в микрополярном случае. Сформулирована постановка задачи пятого приближения для многослойной двумерной области. Приводятся результаты апробирования предлагаемой теории на примере следующих задач:

1. задача для равномерно нагруженной микрополярной двумерной области,
2. задача для квадратной двумерной области,
3. задача для равномерно нагруженной с двух сторон области,
4. задача для области, находящейся под действием уравновешенной системы трех сосредоточенных сил,
5. задача для двуслойной двумерной области.

**В заключении** приведены основные результаты диссертационной работы.

## **ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ**

**В заключении** сформулированы основные результаты диссертационной работы, которые сводятся к следующему:

1. Построены новые теории тонких тел с двумя малыми размерами с применением системы полиномов Лежандра.
2. Построена теория моментов, позволяющая нахождение момента порядка  $(m, n)$  любого выражения.
3. Получены различные приближенные постановки задач от нулевого до пятого приближения включительно как для классической, так и для микрополярной теорий.
4. Написаны программы, с помощью которых предлагаемая теория апробирована на следующих задачах:
  - (a) задача для равномерно нагруженной микрополярной двумерной области,
  - (b) задача для квадратной двумерной области,
  - (c) задача для равномерно нагруженной с двух сторон области,
  - (d) задача для области, находящейся под действием уравновешенной системы трех сосредоточенных сил,
  - (e) задача для двуслойной двумерной области.

### **Список публикаций по теме диссертации**

1. *Никабадзе М.У., Кантор М.М.* Уравнения нулевого, первого и второго приближений в моментах моментной теории упругого стержня// Ломоносовские чтения. Тезисы докладов научной конференции. Секция механики. М.: Изд-во Московского университета. Апрель 2007. 1 с.

2. *Никабадзе М.У., Кантор М.М.* Постановки задач в моментах относительно системы полиномов Лежандра в моментной теории тонких призматических тел с двумя малыми размерами// Ломоносовские чтения. Тезисы докладов научной конференции. Секция механики. М.: Изд-во Московского университета. Апрель 2008. 1 с.
3. *Кантор М.М., Никабадзе М.У.* Уравнения и постановки задач первых двух приближений в теории тонких призматических тел с двумя малыми размерами при применении системы ортогональных полиномов// Ломоносовские чтения. Тезисы докладов научной конференции. Секция механики. М.: Изд-во Московского университета. Апрель 2010. 1 с.
4. *Никабадзе М.У., Кантор М.М.* Уравнения теории тонких призматических тел с двумя малыми размерами при применении системы ортогональных полиномов//Упругость и неупругость. Материалы Международного научного симпозиума по проблемам механики деформируемых тел, посвященного 100-летию со дня рождения А.А. Ильюшина. Москва, 20-21 января 2011 года.
5. *Никабадзе М.У., Кантор М.М., Улуханян А.Р.* К математическому моделированию упругих тонких тел и численная реализация некоторых задач о полосе. Деп. в ВИНТИ РАН 29.04.11 №204-В2011 207 стр.
6. *Кантор М.М.* О первом приближении третьей краевой задачи для полосы с применением полиномов Лежандра// Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика. Механика.2011. №3. С. 66-68.