МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

На правах рукописи
УДК 512.552.4

САМОЙЛОВ ЛЕОНИД МИХАЙЛОВИЧ

Первичные многообразия ассоциативных алгебр и связанные с ними нильпроблемы

01.01.06 — математическая логика, алгебра и теория чисел

Автореферат

диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математичеких наук

Москва — 2011

Работа выполнена на кафедре алгебро-геометрических вычислений факультета математики и информационных технологий Ульяновского государственного университета

Научный консультант:	доктор физико-математических наук, профессор Кемер Александр Робертович
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, профессор Латышев Виктор Николаевич доктор физико-математических наук, профессор Зубков Александр Николаевич доктор физико-математических наук, профессор Пихтильков Сергей Алексеевич
Ведущая организация:	Институт математики имени С.Л. Соболева Сибирского отделения РАН

Защита диссертации состоится “ 30 ” сентября 2011 г. в 16 ч. 45 мин. на заседании диссертационного совета Д.501.001.84 при Московском государственном университете имени М.В. Ломоносова по адресу: Российская Федерация, 119991, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д. 1, МГУ имени М.В. Ломоносова, механико-математический факультет, аудитория 14-08.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Механико-математического факультета МГУ (Главное здание, 14 этаж).

Автореферат разослан “ ” 2011 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
Д.501.001.84 при МГУ
доктор физико-математических наук,
профессор А. О. Иванов

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Работа посвящена изучению ассоциативных алгебр с полиномиальными тождествами над полем, которое, как правило, будет предполагаться бесконечным.

Первое появление алгебр с полиномиальными тождествами (PI-алгебр) связано с исследованием оснований проективной геометрии. PI-теория берет свое начало в работе Дена[1] 1922 года, в которой он в связи с выполнимостью теоремы Дезарга на проективной плоскости над телом исследовал вопросы, при каких условиях тело будет коммутативным. В 1937 году Вагнер[2], также занимаясь основаниями проективной геометрии, установил, что алгебра матриц любого порядка над полем удовлетворяет полиномиальному тождеству. Следующим этапом становление PI-теории явилась статья М. Холла[3] 1943 года, в которой помимо всего прочего доказано, что некоммутативная алгебра с делением, удовлетворяющая тождеству $[[x, y]^2, z] = 0$, где $[x, y] = xy - yx$, является четырехмерной над своим центром.

Переломной вехой в развитии PI-теории явилась статья Капланского[4] 1948 года, где доказан классический результат, что любая примитивная алгебра, удовлетворяющая полиномиальному тождеству степени d, является конечномерной простой алгеброй над своим центром размерности не выше $d/2$. Двумя годами позже, в 1950 году, Амицур и Левицкий[5] нашли минимальную степень тождества, выполняющегося на алгебре матриц порядка n над полем. Это послужило началом нового направления в PI-теории, где основным объектом изучения является множество тождеств, выполняющихся на данной алгебре. Другим, число алгебраическим, источником PI-теории явилась проблема А.Г. Куроша (см. ниже). В конце 50-х – начале 60-х годов PI-теория быстро превратилась в самостоятельную содержательную ветвь современной алгебры.

Через $F\langle X\rangle$ и $F\langle X\rangle^\sharp$ будем обозначать свободную ассоциативную алгебру (т.е. алгебру некоммутативных полиномов) без единицы и с единицей соответственно, порожденную счетным множеством X. Полином $f(x_1, \ldots, x_n) \in F\langle X\rangle$ называется *тождеством* (ассоциативной) алгебры A, если $f(a_1, \ldots, a_n) = 0$ для всех $a_1, \ldots, a_n \in A$. Алгебра, удовлетворяющая

[1] M. Dehn, "Über die Grundlagen der projektiven Geometrie und allgemeine Zahlsysteme", *Math. Ann.*, **85** (1922), 184-193.

[2] W. Wagner, "Über die Grundlagen der projektiven Geometrie und allgemeine Zahlsysteme", *Math. Z.*, **113** (1937), 528-567.

[3] M. Hall, "Projective planes", *Trans. Amer. Math. Soc.*, **54** (1943), 229-277.

[4] I. Kaplansky, "Rings with polynomial identity", *Bull. Amer. Math. Soc.*, **54** (1948), 575-580.

[5] S.A. Amitsur, J. Levitzki, "Minimal identities for algebras", *Proc. Amer. Math. Soc.*, **1** (1950), 449-463.

ненулевому тождеству, называется *PI-алгеброй*. Множество всех тождеств алгебры A будем обозначать $T[A]$. Ясно, что $T[A]$ является идеалом свободной алгебры $F\langle X\rangle$. Этот идеал удовлетворяет дополнительному свойству: он замкнут относительно всех эндоморфизмов свободной алгебры. Иначе говоря, если $f(x_1,\ldots,x_n)\in T[A]$, то для всех $g_1,\ldots,g_n\in F\langle X\rangle$ выполнено $f(g_1,\ldots,g_n)\in T[A]$. Идеалы, удовлетворяющие такому свойству, называются T-идеалами (а также вербальными идеалами и вполне характеристическими идеалами). Можно показать, что любой T-идеал Γ является идеалом тождеств некоторой алгебры, например, алгебры $F\langle X\rangle/\Gamma$.

Пусть Γ – произвольный T-идеал. Класс всех ассоциативных алгебр, удовлетворяющих всем тождествам из Γ, называется *многообразием алгебр*. Между T-идеалами и многообразиями существует взаимно-однозначное соответствие, обращающее включения. Теорема Биркгофа дает другую характеризацию многообразий: *класс ассоциативных алгебр является многообразием тогда и только тогда, когда он замкнут относительно взятия декартовых произведений, подалгебр и гомоморфных образов.* Отметим, что теорема Биркгофа верна не только для ассоциативных алгебр, но и для широкого класса алгебраических систем[6]. Класс PI-алгебр замкнут также относительно тензорного произведения (теорема Регева-Латышева[7,8]). Через $\mathrm{Var}(A)$ будем обозначать многообразие с идеалом тождеств $T[A]$. Сама алгебра A называется *носителем* многообразия.

Если в алгебре $F\langle X\rangle$ дана некоторая система полиномов $\{f_i, i\in I\}$, то наименьший T-идеал, содержащий эту систему полиномов, будем обозначать $\{f_i, i\in I\}^T$, и будем говорить, что этот T–идеал *порожден* данной системой полиномов.

Таким образом, произвольный T–идеал Γ (а также соответствующее ему многообразие) может быть задан двумя способами:

1. указанием такой алгебры A, что $\Gamma = T[A]$;
2. указанием *базиса*, то есть такой системы полиномов $\{f_i, i\in I\}$, что $\Gamma = \{f_i, i\in I\}^T$.

Эти два языка описания многообразий взаимно дополняют друг друга. Перевод описания многообразия с одного языка на другой является крайне нетривиальной задачей: скажем, для алгебры матриц порядка 3 над полем характеристики нуль неизвестен базис тождеств, и нет никаких гипотез о

[6] А.И. Мальцев, *Алгебраические системы*, М.: Наука, 1970.

[7] A. Regev, “Existence of identities in $A\otimes B$”, *Israel J. Math.*, **11** (1972), 131-152.

[8] В.Н. Латышев, “К теореме Регева о тождествах тензорного произведения PI-алгебр”, *Успехи мат. наук.*, **27**:4 (1972), 213-214.

том, как он мог бы выглядеть. С некоторым допущением можно сказать, что изучение такого перевода и является основным содержанием PI-теории. Исследованию тождеств ассоциативных алгебр посвящена обширная литература[9,10,11,12,13,14]. Особо отметим вышедшие в последнее время монографии[15,16]. Комбинаторным аспектам PI-теории посвящены отдельные главы монографий [17,18].

Итак, среди задач PI-теория можно выделить две «общие» задачи:

1) Как по заданной алгебре A найти ее базис тождеств или указать свойства этого базиса?

2) Как по заданной системе полиномов $\{f_i, i \in I\}$ найти носитель соответствующего многообразия или указать его свойства?

Каждая из этих двух «общих» задач может быть конкретизирована многими разными способами. В настоящей работе решаются некоторые задачи как первого, так и второго типа.

Следует отметить, что наиболее существенный вклад в развитие ассоциативной PI-теории внесли алгебраисты из Советского Союза, а позднее из России: А.И. Ширшов, В.Н. Латышев, Ю.П. Размыслов, А.Р. Кемер, А.Я. Белов и многие другие. В исследовании тождеств в других классах алгебр (прежде всего в алгебрах Ли, йордановых и альтернативных алгебрах) ведущая роль так же принадлежит алгебраистам из России, прежде всего представителям московской и новосибирской школ теории колец. В особой степени это относится к разработке комбинаторных методов изучения тождеств.

В развитии PI-теории ключевой проблемой долгое время была проблема конечной базируемости, поставленная В. Шпехтом[19] в 1950 г.

Проблема Шпехта. *Верно ли, что любой T-идеал свободной ассоциативной алгебры конечно базируем, то есть конечно порожден как T-идеал?*

[9] C. Procesi, *Rings with Polynomial Identities*, Pure Appl. Math (N.Y.), **17**, Dekker, New York, 1973.

[10] L.H. Rowen, *Polynomial Identities in Ring Theory*, New York: Acad. Press, 1980.

[11] Ю.П. Размыслов, *Тождества алгебр и их представлений*, М.: Наука, 1989.

[12] A.R. Kemer, *Ideal of Identities of Associative Algebras,* Amer. Math. Soc. Translations of Math. Monographs, **87**, 1991.

[13] V. Drensky, *Free algebras and PI-algebras*, Springer, 2000.

[14] V. Drensky, E. Formanek *Polynomial identity rings*, *Adv. Courses in Math.*, CRM Barselona, Birkhäuser, Basel-Boston, 2004.

[15] L.H. Rowen, A. Kenel-Belov, *Computation Aspects of Polynomial Identities*, Wellesley, Massachusetts, 2005.

[16] A. Giambruno, M. Zaicev, *Polynomial Identities and Asymptotic Methods*, AMS Math. Surv. and Monogr., **122**, 2005.

[17] A. Belov, V. Borisenko, V. Latyshev, *Monomial Algebras*, NY, Plenum, 1998.

[18] E. Zelmanov, *Nil Rings and Periodic Groups*, KMS Lect. Notes in Math., 1992.

[19] W. Specht, "Gesetze in Ringen", *Math. Z.*, **52** (1950), 557-589.

Сам В. Шпехт имел в виду случай алгебр над полем характеристики 0, но проблема имеет смысл над произвольным полем. Кроме того, проблема конечной базируемости представляет чрезвычайный интерес для и для произвольных классов алгебр, например, лиевых, йордановых или альтернативных.

Проблематика конечной базируемости делится на *локальную* (рассматриваются идеалы тождеств в конечно порожденных свободных алгебрах) и *глобальную* (рассматриваются идеалы тождеств в счетнопорожденных свободных алгебрах). Кроме того, практически во всех вопросах PI-теории, в том числе и в проблемах конечной базируемости, в силу огромного количества причин надо отдельно рассматривать случай нулевой характеристики основного поля и случай положительной характеристики. Случай положительной характеристики естественным образом делится на два подслучая – бесконечного основного поля, когда все тождества следуют из полиоднородных тождеств, и конечного основного поля, когда появляются эффекты неоднородности. Также исследуются тождества в кольцах и в алгебрах над коммутативными (прежде всего нетеровыми) кольцами.

Одним из главных вдохновителей исследований по проблеме Шпехта был В.Н. Латышев, решивший проблему Шпехта во многих важных случаях[20]. Полное положительное решение проблемы Шпехта над полями нулевой характеристики было получено А.Р. Кемером[21] в 1986 г. как следствие теоремы о том, что каждое нетривиальное многообразие порождается грассмановой оболочкой конечномерной супералгебры. Над полями положительной характеристики примеры не конечно базируемых T-идеалов были построены А.Я. Беловым, А.В. Гришиным и В.В. Щиголевым в 1999 г.[22,23,24]. Вскоре после этого рядом авторов были построены примеры не конечно базируемых T-идеалов, содержащих весьма сильные тождества. Упомянем только работу Е.В. Аладовой и А.Н. Красильникова[25], в которой над полем характеристики $p \geqslant 3$ была построена система полиномов без конечного базиса тождеств, содержащая тождество $x^{2p} = 0$.

При решении проблемы Шпехта ключевую роль играет теорема А.Р. Ке-

[20]В.Н. Латышев, *Нематричные многообразия ассоциативных алгебр*, Дис. ...д-ра физ.-мат. наук, Москва, 1977.

[21]A.R. Kemer, *Ideal of Identities of Associative Algebras,* Amer. Math. Soc. Translations of Math. Monographs, **87**, 1991.

[22]А.Я. Белов, “О нешпехтовых многообразиях”, *Фунд. и прикл. математика*, **5**:1 (1999), 47-66.

[23]А.В. Гришин, “Примеры не конечной базируемости T-пространств и T-идеалов в характеристике 2”, *Фунд. и прикл. математика*, **5**:1 (1999), 101-118.

[24]В.В. Щиголев, “Примеры бесконечно базируемых T-идеалов”, *Фунд. и прикл. математика*, **5**:1 (1999), 307-313.

[25]E.V. Aladova, A.N. Krasil’nikov, “Polynomial identitiea in nil-algebras”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **361**:11 (2009), 5629-5646.

мера о локальной представимости (см. ниже). Из нее при помощи короткой изящной конструкции А.Р. Кемер в 1990 г. получил положительное решение *локальной проблемы Шпехта* в характеристике $p > 0$: *над бесконечным полем F характеристики $p > 0$ любой T-идеал алгебры $F\langle x_1, \ldots, x_k\rangle$ конечно базируем*[26].

Из локальной шпехтовости вытекает следующее утверждение: *пусть поле F бесконечно и T-идеал Γ алгебры $F\langle X\rangle$ порожден системой полиномов $\{f_i, i \in I\}$, каждый из которых зависит не более чем от k переменных; тогда Γ является конечно базируемым T-идеалом.* В такой формулировке локальная шпехтовость используется в главе 1 при решении проблемы ограниченности нильиндекса радикала относительно свободной алгебры над бесконечным полем положительной характеристики.

Локальную конечную базируемость над произвольным ассоциативно-коммутативным нетеровым кольцом доказал А.Я. Белов[27].

В 1941 году А.Г. Курош[28] сформулировал аналог проблемы Бернсайда для алгебр. Подобного рода проблемы в теории алгебр (не обязательно ассоциативных) принято называть проблемами бернсайдовского типа, или проблемами Куроша-Левицкого. Проблема Куроша-Левицкого состоит в следующем: 1) Верно ли, что конечно порожденная нильалгебра ограниченного индекса нильпотентна? 2) Верно ли, что конечно порожденная алгебраическая алгебра ограниченного индекса конечномерна?

Если не требовать ограниченности нильиндекса или степени алгебраичности, то обе эти проблемы в классе ассоциативных алгебр решаются отрицательно. Первый такой пример был простроен Е.С. Голодом[29] в 1964 году (пример Голода-Шафаревича).

При условии ограниченности, а в этом случае соответствующие алгебры будут PI-алгебрами, проблема Куроша-Левицкого для ассоциативных алгебр была решена положительно Левицким[30] структурными методами и Капланским[31] комбинаторными средствами.

В 1957 г. А.И. Ширшов[32] доказал чрезвычайно мощный результат, извест-

[26] А.Р. Кемер, "Тождества конечнопорожденных алгебр над бесконечным полем", *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **54**:4 (1990), 726-753.

[27] А.Я. Белов, *Алгебры с полиномиальными тождествами: представления и комбинаторные методы*, Дис. ...д-ра физ.-мат. наук, Москва, 2002.

[28] А.Г. Курош, "Проблемы теории колец, связанные с проблемой Берсайда о периодических группах", *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **5** (1941), 233-240.

[29] Е.С. Голод, "О ниль-алгебрах и финитно-аппроксимируемых p-группах", *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **28** (1964), 273-274.

[30] J. Levitzki, "On a problem of Kurosh", *Bull. Amer. Math. Soc.*, **52** (1946), 1033-1035.

[31] I. Kaplansky, "On a problem of Kurosh and Jacobson", *Bull. Amer. Math. Soc.*, **52** (1946), 496-500.

[32] А.И. Ширшов, "О кольцах с тождественными соотношениями", *Матем. сборник*, **43**:2 (1957), 277-283.

ный под названием «теорема о высоте».

Теорема А.И. Ширшова о высоте. *Для любой конечно порожденной PI-алгебры A над коммутативным кольцом существуют натуральное число h и такие элементы $a_1, \ldots, a_n \in A$, что любой элемент алгебры A может быть представлен в виде линейной комбинации элементов $a_{i_1}^{l_1} \ldots a_{i_k}^{l_k}$, где $k < h$.*

А.И. Ширшов показал, что в качестве элементов $a_1, \ldots, a_n$ можно взять множество всех слов степени $< d$ над порождающим множеством, где d – степень тождества, выполненяющегося в алгебре A.

В дальнейшем были получены оценки на высоту алгебры h, доказаны многочисленные усиления и аналоги теоремы о высоте для различных классов неассоциативных алгебр. Подробный обзор результатов по теореме А.И. Ширшова о высоте содержится в работах[33,34,35,36].

Из теоремы о высоте сразу же следует решение проблемы Куроша-Левицкого, причем в гораздо более сильной форме: конечномерность конечно порожденной PI-алгебры с тождеством степени d вытекает из алгебраичности всех слов от образующих степени меньше d.

Фундаментальные результаты в структурной теории многообразий ассоциативных алгебр над полями нулевой и положительной характеристики были получены А.Р. Кемером.

Конечномерная алгебра C над полем F называется *конечномерной классической алгеброй*, если C представима в виде прямой суммы подпространств $C = P \oplus J$, где $J = \operatorname{Rad} C$ – радикал Джекобсона алгебры C, P является подалгеброй в C и $P \cong C/J$ (разложение Веддербарна–Мальцева); кроме того, алгебра P должна быть изоморфна прямой сумме матричных алгебр над полем F. Алгебра P называется *полупростой частью* алгебры C.

Важнейший результат А. Р. Кемера о локальной представимости состоит в следующем.

Теорема о локальной представимости. *Для любой конечно порожденной PI-алгебры U над бесконечным полем F найдется такая конечномерная классическая алгебра C, что идеалы тождеств алгебр U и C совпадают.*

[33] A. Belov, V. Borisenko, V. Latyshev, *Monomial Algebras*, NY, Plenum, 1998.

[34] А.Я. Белов, *Алгебры с полиномиальными тождествами: представления и комбинаторные методы*, Дис. . . . д-ра физ.-мат. наук, Москва, 2002.

[35] A. Belov-Kanel., L.H. Rowen, "Perspectives on Shirshov's Heigth theorem", *Selected works of A.I. Shirshov*, Birkhäuser, 2009, 185-202.

[36] A. Kemer, "Comments on Shirshov's Heigth theorem", *Selected works of A.I. Shirshov*, Birkhäuser, 2009, 223-229.

Эта теорема была доказана отдельно для полей нулевой характеристики[37] (см. также[38]), и для бесконечных полей положительной характеристики[39]. Доказательство теоремы с рядом модификаций изложено в монографии[40]. Локальную представимость (в другом смысле, чем в вышесформулированной теореме) над нетеровыми кольцами и многие другие комбинаторные и структурные вопросы о конечно порожденных и бесконечно порожденных алгебрах исследовал А.Я. Белов[41].

Теорема о локальной представимости используется в настоящей работе следующим образом. Пусть Γ – произвольный нетривиальный T-идеал (т.е. $\Gamma \neq (0)$ и $\Gamma \neq F\langle X\rangle$). Обозначим

$$F_\Gamma^k = F\langle x_1, \ldots, x_k\rangle/(\Gamma \cap F\langle x_1, \ldots, x_k\rangle).$$

Алгебра F_Γ^k является относительно свободной k-порожденной алгеброй в многообразии, которое соответствует T-идеалу Γ. По теореме о локальной представимости существует такая конечномерная классическая алгебра C_k, что $T[F_\Gamma^k] = T[C_k]$. Из этого следует, что алгебра C_k удовлетворяет следующему свойству: если полином $f = f(x_1, \ldots, x_m)$ зависит от $m \leqslant k$ переменных и $f \in T[C_k]$, то $f \in \Gamma$. Таким образом, идеалы $T[C_k]$ *аппроксимируют* идеал Γ. Существуют ситуации, когда прямое доказательство включения $f \in \Gamma$ наталкивается на непреодолимые трудности. Но при этом оказывается возможным доказать включение $f \in T[C_k]$ для специфически выбранных $k \geqslant m$.

А.Р. Кемером была доказана теорема об ограниченности размерностей полупростых частей алгебр C_k[42].

Теорема. *Пусть поле F бесконечно. Тогда для любого нетривиального T-идеала Γ найдется такая константа $m = m(\Gamma)$, что для некоторых конечномерных классических алгебр C_k с условием $T[F_\Gamma^k] = T[C_k]$ размерности полупростых частей алгебр C_k не превосходят m.*

Теорема об ограниченности размерностей полупростых частей использо-

[37] А.Р. Кемер, "Представимость приведенно-свободных алгебр", *Алгебра и логика*, **27**:3 (1988), 274-294.
[38] A.R. Kemer, *Ideal of Identities of Associative Algebras,* Amer. Math. Soc. Translations of Math. Monographs, **87**, 1991.
[39] А.Р. Кемер, "Тождества конечнопорожденных алгебр над бесконечным полем", *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **54**:4 (1990), 726-753.
[40] L.H. Rowen, A. Kenel-Belov, *Computation Aspects of Polynomial Identities*, Wellesley, Massachusetts, 2005.
[41] А.Я. Белов, *Алгебры с полиномиальными тождествами: представления и комбинаторные методы*, Дис. ...д-ра физ.-мат. наук, Москва, 2002.
[42] A. Kemer, "PI-algebras and nil algebras of bounded index", *Trends in ring theory* (Miscolc, Hungary, 1996), CMS Conf. Proc., **22**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1998, 59-69.

валась А.Р. Кемером[43] для доказательства следующего усиления проблемы И.Б. Воличенко.

Теорема. *Пусть* $\operatorname{char} F = p > 0$. *Тогда для любого нетривиального тождества* $f = 0$ *существует такая константа* q, *что для всех достаточно больших* N *следствиями тождества* $f = 0$ *являются все такие частичные линеаризации тождества* $x^N = 0$, *каждая из которых имеет степень* $< N/q$ *по любой переменной.*

Сама проблема И.Б. Воличенко состояла в доказательстве того факта, что *каждое нетривиальное многообразие ассоциативных алгебр над полем положительной характеристики удовлетворяет симметрическому тождеству некоторой степени (то есть полной линеаризации тождества* $x^N = 0$*)*. Вышеприведенная теорема утверждает, что произвольное многообразие удовлетворяет не просто полной линеаризации тождества $x^N = 0$, а всем достаточно глубоким линеаризациям. Отметим, что аналогичная проблема И.Б. Воличенко для алгебр Ли над полем положительной характеристики остается открытой. Из положительного решения проблемы И.Б. Воличенко и теоремы Размыслова-Прочези (см. ниже) вытекает, что каждая PI-алгебра над полем положительной характеристики удовлетворяет тождеству Капелли[44]. Тем самым ситуация в положительной характеристике принципиально отлична от ситуации в нулевой характеристике. Над полем характеристики 0, как показал А.Р. Кемер[45], многообразие удовлетворяет тождеству Капелли тогда и только тогда, когда оно порождается конечномерной алгеброй.

Важнейшую роль в теории многообразий ассоциативных алгебр играют первичные многообразия (и соответствующие им вербально-первичные T-идеалы). T-идеал Γ называется *вербально-первичным (или T-первичным)*, если для произвольных T-идеалов Γ_1 и Γ_2 из включения $\Gamma_1 \cdot \Gamma_2 \subseteq \Gamma$ вытекает, что $\Gamma_1 \subseteq \Gamma$ или $\Gamma_2 \subseteq \Gamma$. Многообразие называется *первичным*, если соответствующий ему идеал тождеств вербально-первичен. T-идеал Γ называется *вербально-полупервичным*, если для произвольного T-идеала Γ_1 из включения $\Gamma_1 \cdot \Gamma_1 \subseteq \Gamma$ вытекает, что $\Gamma_1 \subseteq \Gamma$.

Над полями нулевой характеристики все вербально-первичные T-идеалы были описаны А.Р. Кемером. Будем обозначать через G алгебру Грассмана

[43] A. Kemer, "PI-algebras and nil algebras of bounded index", *Trends in ring theory* (Miscolc, Hungary, 1996), CMS Conf. Proc., **22**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1998, 59-69.

[44] A.R. Kemer, "Multilinear identities of the algebras over a field of characteristic p", *Int. J. of Algebra and Computation*, **5**:2 (1997), 189-197.

[45] A.R. Kemer, *Ideal of Identities of Associative Algebras,* Amer. Math. Soc. Translations of Math. Monographs, **87**, 1991.

счетного ранга с единицей: $G = \langle e_1, e_2, \ldots | e_i^2 = 0, e_i e_j = -e_j e_i \rangle$. Алгебра Грассмана имеет естественную $\mathbb{Z}_2$-градуировку $G = G_0 \oplus G_1$, где G_0 и G_1 – подпространства алгебры G, порожденные всеми словами от образующих $e_1, e_2, \ldots$ четной и нечетной длины соответственно. Для $n, k \geqslant 0$ рассмотрим в алгебре $M_{n+k}(G) = M_{n+k} \otimes G$ подмножество $M_{n,k}$, состоящее из блочных матриц вида

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix},$$

где A и D – квадратные матрицы размера $n \times n$ и $k \times k$ соответственно с элементами из G_0, B и C – прямоугольные матрицы размера $n \times k$ и $k \times n$ соответственно с элементами из G_1. Легко проверить, что $M_{n,k}$ является подалгеброй алгебры $M_{n+k}(G)$. Алгебры $M_{n,k}$ называются *матричными супералгебрами.* Их исключительная роль объясняется следующей теоремой[46].

Теорема о классификации первичных многообразий. *Над полем характеристики 0 нетривиальный T-идеал Γ является вербально-первичным тогда и только тогда, когда $\Gamma = T[M_n(G)]$ или $\Gamma = T[M_{n,k}]$ при $n \geqslant k$. Все эти T-идеалы попарно различны.*

Описание вербально-первичных T-идеалов в характеристике $p > 0$ хотя бы на полилинейном уровне является важнейшей проблемой PI-теории. В текущий момент она решена только в двух частных случаях: А.Р. Кемером были описаны полилинейные компоненты первичных подмногообразий многообразия $\mathrm{Var}(M_2)$, и автором были описаны полилинейные компоненты первичных подмногообразий многообразия $\mathrm{Var}(M_{1,1})$. На полиоднородном уровне описание первичных многообразий отсутствует и в этих двух случаях.

Несложно показать, что над бесконечным полем любой вербально-полупервичный T-идеал является пересечением некоторого числа вербально-первичных T-идеалов. А.Р. Кемером был доказан более сильный факт[47].

Теорема о классификации полупервичных многообразий. *Над полем характеристики 0 любой вербально-полупервичный T-идеал является пересечением конечного числа вербально-первичных T-идеалов.*

Верно ли аналогичное утверждение (хотя бы на полилинейном уровне) в характеристике $p > 0$ – открытая проблема. Для подмногообразий в $\mathrm{Var}(M_2)$ и $\mathrm{Var}(M_{1,1})$ это верно, в остальных случаях – неизвестно.

[46] А.Р. Кемер, “Многообразия и $\mathbb{Z}_2$-градуированные алгебры”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **48**:5 (1984), 1042-1059.

[47] А.Р. Кемер, “Многообразия и $\mathbb{Z}_2$-градуированные алгебры”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **48**:5 (1984), 1042-1059.

Фундаментальная роль первичных и полупервичных многообразий проясняется следующей *теоремой о нильпотентности*[48].

Теорема о нильпотентности. *Пусть основное поле имеет характеристику 0. Если U – нетривиальный T-идеал, N – пересечение всех T-первичных T-идеалов, содержащих U, то идеал N нильпотентен по модулю U.*

В терминах многообразий это утверждение формулируется так: любое многообразие V раскладывается в V-подпроизведение нильпотентного многообразия и наибольшего полупервичного многообразия, содержащегося в V. Вопрос о том, верно ли (на полиоднородном или полилинейном уровне) аналогичное утверждение над полем положительной характеристики, является открытым.

Все три вышеприведенных теоремы Кемера (теорема о нильпотентности, теорема о классификации полупервичных многообразий и теорема о классификации первичных многообразий) при решении тех или иных проблем как правило используются совместно. Сначала проблема решается для первичных многообразий, затем для полупервичных, и, наконец, для произвольных многообразий, исходя из теоремы о нильпотентности. При помощи такого подхода были получены ответы на впечатляющее число разнообразных вопросов PI-теории в нулевой характеристике. Именно этим мотивируется важность перенесения (хотя бы частичного) этих результатов в характеристику $p > 0$.

Важнейшим методом изучения первичных многообразий в характеристике 0 и единственно известным на текущий момент в характеристике $p > 0$ является подход, связанный с изучением тождеств со следом и тождеств с формами.

Понятие тождества со следом было введено Ю.П. Размысловым в 1974 году. Рассмотрим формальное выражение $x^2 - x\operatorname{Tr}(x) + \det(x) = 0$. Ясно, что оно обратится в равенство, если вместо переменной x подставить произвольную матрицу второго порядка. Линеаризуя это равенство, получаем выражение от двух переменных $xy+yx-x\operatorname{Tr}(y)-y\operatorname{Tr}(x)-\operatorname{Tr}(xy)+\operatorname{Tr}(x)\operatorname{Tr}(y) = 0$, которое обращается в верное равенство при подстановке вместо x и y произвольных матриц второго порядка. Это пример полилинейного тождества со следом алгебры M_2.

[48] А.Р. Кемер, “Многообразия и $\mathbb{Z}_2$-градуированные алгебры”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **48**:5 (1984), 1042-1059.

В общем случае линейное отображение Tr из алгебры A с единицей в ее центр называется *следом*, если $\mathrm{Tr}(ab) = \mathrm{Tr}(ba)$ для произвольных $a, b \in A$. Полином от некоммутирующих переменных $x_1, x_2, \ldots$ и формальных символов $\mathrm{Tr}(u_i)$, где u_i – слова над алфавитом $x_1, x_2, \ldots$, называется *полиномом со следом*. При этом в определение полинома со следом закладывается выполнение равенств $u\,\mathrm{Tr}(v) = \mathrm{Tr}(v)u$, $\mathrm{Tr}(u)\,\mathrm{Tr}(v) = \mathrm{Tr}(v)\,\mathrm{Tr}(u)$, $\mathrm{Tr}(uv) = \mathrm{Tr}(vu)$. Полином со следом называется *тождеством со следом* алгебры A, если при подстановке в него вместо всех переменных произвольных элементов алгебры A получается 0. Как и для обычных тождеств, для тождеств со следом определяются полилинейность, полиоднородность, линеаризации, следствия и т.д.

Базис тождеств со следом алгебры M_n (при стандартном определении следа) над полем характеристики 0 был описан Ю.П. Размысловым[49] в 1974 году и К.Прочези[50] в 1976 (теорема Размыслова-Прочези). В 1995 А.Р. Кемер[51] получил прямое комбинаторное доказательство этой важнейшей теоремы на полилинейном уровне над полем произвольной характеристики.

Обозначим через $\widetilde{P}_m$ множество всех полилинейных полиномов со следом степени m, зависящих от переменных $x_1, \ldots, x_m$, с коэффициентами из поля F. Таким образом, каждый элемент из $\widetilde{P}_m$ является линейной комбинацией мономов $u_0\,\mathrm{Tr}(u_1)\cdots\mathrm{Tr}(u_l)$, где u_i – слова, причем $u_1, \ldots, u_l \neq 1$, слово $u_0 \cdot u_1 \cdots u_l$ полилинейно. Пусть FS_{m+1} есть групповая алгебра симметрической группы S_{m+1}, действующей на множестве $\{0, 1, \ldots, m\}$. Определим F-линейное отображение $\widetilde{\lambda}_m : \widetilde{P}_m \to FS_{m+1}$, полагая

$$\widetilde{\lambda}_m\big(x_{i_1}\cdots x_{i_s}\,\mathrm{Tr}(x_{j_1}\cdots x_{j_t})\,\mathrm{Tr}(x_{k_1}\cdots x_{k_l})\cdots\big) = \sigma \in S_{m+1},$$

где σ – перестановка, которая раскладывается на независимые циклы следующим образом:

$$\sigma = (0, i_1, \ldots, i_s)(j_1, \ldots, j_t)(k_1, \ldots, k_l)\ldots.$$

Отображение $\widetilde{\lambda}_m$ является изоморфизмом пространств.

Обозначим

$$\chi_n(x_1, \ldots, x_n) = \widetilde{\lambda}_n^{-1}\Big(\sum_{\sigma \in S_{n+1}} (-1)^\sigma \sigma\Big).$$

[49] Ю.П. Размыслов, "Тождества со следом полной матричной алгебры над полем характеристики нуль", *Изв. АН СССР. Сер. Матем.*, **37**:3 (1973), 723-756.

[50] C. Procesi, "The invariant theory of $n \times n$-matrices", *Advances in Math.*, **19**:3 (1976), 306-381.

[51] A.R. Kemer, "Multilinear identities of the algebras over a field of characteristic p", *Int. J. of Algebra and Computation*, **5**:2 (1997), 189-197.

Хорошо известно, что полином $\chi_n(x_1, \ldots, x_n)$ является полной линеаризацией характеристического полинома Кэли-Гамильтона. Поэтому алгебра M_n удовлетворяет тождеству $\chi_n(x_1, \ldots, x_n) = 0$.

Теорема Размыслова-Прочези. *Пусть F – поле произвольной характеристики. Тогда каждое полилинейное тождество со следом алгебры M_n является следствием тождеств $\mathrm{Tr}(1) = n$ и $\chi_n(x_1, \ldots, x_n) = 0$.*

Алгебра $M_{n,k}$ также превращается в алгебру со следом, если положить $\mathrm{Tr}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \mathrm{Tr}(A) - \mathrm{Tr}(D)$, где $\mathrm{Tr}(A)$ и $\mathrm{Tr}(D)$ – суммы диагональных элементов матриц A и D. Обозначим через $D_{n+1,k+1}$ прямоугольную диаграмму Юнга из $n+1$ строки и $k+1$ столбца.

Идеал тождеств со следом алгебр $M_{n,k}$ над полями нулевой характеристики был описан Ю.П. Размысловым[52]. А.Берел[53] получил доказательство теоремы Ю.П. Размыслова, используя подход К.Прочези для описания тождеств со следом матричных алгебр. Некоторое время назад автором было предложено более короткое доказательство, основанное на других идеях[54].

Теорема. *Пусть поле F имеет нулевую характеристику. Тогда*

1) для каждого m множество $\widetilde{\lambda}_m(\widetilde{T}[M_{n,k}] \cap \widetilde{P}_m)$ является двусторонним идеалом алгебры FS_{m+1}. Этот идеал является суммой минимальных двусторонних идеалов, соответствующих тем диаграммам Юнга, которые содержат $D_{n+1,k+1}$ в качестве поддиаграммы;

2) идеал $\widetilde{T}[M_{n,k}]$ порождается (как идеал тождеств со следом) тождеством нулевой степени $\mathrm{Tr}(1) = n-k$ и тождествами степени $nk+n+k$ из пространства $\widetilde{T}[M_{n,k}] \cap \widetilde{P}_{nk+n+k}$.

В характеристике $p > 0$ множества $\widetilde{\lambda}_m(\widetilde{T}[M_{n,k}] \cap \widetilde{P}_m)$ тоже являются двусторонними идеалами алгебры FS_{m+1}. Вообще, нетривиальный идеал тождеств со следом $\widetilde{\Gamma}$ называется *γ-классическим*, если он содержит полином $\mathrm{Tr}(1) - \gamma$ и для любого m множество $\widetilde{\lambda}_m(\widetilde{\Gamma} \cap \widetilde{P}_m)$ является двусторонним идеалом алгебры FS_{m+1}. Понятие γ-классического идеала было введено Ю.П. Размысловым. В характеристике 0 все они исчерпываются идеалами $\widetilde{T}[M_{n,k}]$[55] и являются вербально первичными, в характеристике $p > 0$ есть

[52] Ю.П. Размыслов, "Тождества со следом и центральные полиномы в матричных супералгебрах $M_{n,k}$", *Матем. сборник*, **128**:4 (1985), 194-215.

[53] A. Berele, "Trace identities and $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-graded invariants", *Trans of the Amer. Math. Soc.*, **309**:2 (1988), 581-589.

[54] Л.М. Самойлов, "Новое доказательство теоремы Ю.П. Размыслова о тождествах матричной супералгебры", *Фунд. и прикл. матем.*, **6**:4 (2000), 1121-1127.

[55] Ю.П. Размыслов, *Тождества алгебр и их представлений*, М.: Наука, 1989.

много других примеров γ-классических идеалов, которые уже могут не быть вербально первичными[56].

А.Р. Кемером[57] было доказано, что над полем характеристики $p > 0$ каждый нетривиальный T-идеал содержит все полилинейные тождества алгебры матриц некоторого порядка. Наименьшее число k со свойством $T[M_k] \cap P \subset \Gamma$ называется *матричным типом* T-идеала Γ. Вычисление матричного типа конкретного T-идеала является непростой задачей. Так, матричный тип алгебры Грассмана равен p[58], но явно предъявить полином $f \in T[M_{p-1}] \setminus T[G]$ при $p > 3$ крайне сложно.

Понятие матричного типа, введенное А.Р. Кемером[59], оказалось весьма содержательным. Прежде всего благодаря взаимосвязи с понятием *регулярности* первичных многообразий. Полином $f(x_1, \ldots, x_m) \in F\langle X \rangle$ называется *киллером* $\widetilde{T}$-идеала $\widetilde{T}[M_k]$, если алгебра матриц M_k удовлетворяет тождеству со следом вида

$$f(x_1, \ldots, x_m) \operatorname{Tr}(y) = g(x_1, \ldots, x_m, y), \qquad g \in F\langle X \rangle.$$

Рассмотрим вербально первичный T-идеал Γ, матричный тип которого равен k. Назовем Γ *регулярным* вербально первичным идеалом, если Γ *не* содержит хотя бы один полилинейный киллер идеала $\widetilde{T}[M_k]$. А.Р. Кемер показал, что в этом случае Γ является k-классическим T-идеалом, следовательно, при его изучении можно применять весь арсенал методов теории представлений симметрических групп над полями положительной характеристики. Такой подход к проблеме классификации вербально первичных многообразий был предложен А.Р. Кемером в цикле работ[60,61,62,63].

Другое приложение понятий матричного типа и регулярности состоит в следующем. А.Р. Кемер показал[64], что если l – матричный тип какого-то нерегулярного первичного многообразия, то для некоторого числа $m \leqslant l$ проблема Прочези о ядре для алгебры матриц порядка m имеет отрицатель-

[56] Л.М. Самойлов, “О γ-классических многообразиях”, *Фунд. и прикл. матем*, **8**:3 (2002), 887-910.

[57] A.R. Kemer, “Multilinear identities of the algebras over a field of characteristic p”, *Int. J. of Algebra and Computation*, **5**:2 (1997), 189-197.

[58] A. Kemer, “On same problem in PI-theory in characteristic p connected with dividing by p”, *Proceedings of the Third International Algebra Conference*, Kluwer, 2003, 53-66.

[59] A. Kemer, “Remarks on the prime varieties”, *Israel J. of Math.*, **96**:2 (1996), 341-356.

[60] A. Kemer, “Remarks on the prime varieties”, *Israel J. of Math.*, **96**:2 (1996), 341-356.

[61] A. Kemer, “On the multilinear components of the regular prime varieties”, *Methods in ring theory: proc. of the Trento conference. Lect. Notes in pure and appl. math.*, **198**, (1998), 171-183.

[62] A. Kemer, “Multilinear components of the prime subvarieties of the variety $\mathrm{Var}(M_2(F))$”, *Algebras and Representation Theory*, **4**:1 (2001), 87-104.

[63] A. Kemer, “On same problem in PI-theory in characteristic p connected with dividing by p”, *Proceedings of the Third International Algebra Conference*, Kluwer, 2003, 53-66.

[64] A. Kemer, “On same problem in PI-theory in characteristic p connected with dividing by p”, *Proceedings of the Third International Algebra Conference*, Kluwer, 2003, 53-66.

ное решение. Этот результат мотивирует вопрос о нахождении минимального значения матричного типа нерегулярного первичного многообразия. Примеры первичных многообразий, матричные типы которых были бы меньше p, отсутствуют.

Тождества со следом в характеристике 0 теснейшим образом связаны с инвариантами полной линейное группы $\mathrm{GL}(n)$. Эта группа действует сопряжениями на пространстве $X_{n,m} = \underbrace{M_n \times \cdots \times M_n}_{m}$, и это действие индуцирует действие на его координатном кольце

$$F[X_{n,m}] = F[x_{ij}^{(t)} \mid i,j = 1,2,\ldots,n;\ t = 1,2,\ldots,m].$$

Через $J_{n,m} = F[X_{n,m}]^{\mathrm{GL}(n)}$ обозначим F-алгебру инвариантов при рассматриваемом действии. К.Прочези[65] показал, что над полем характеристики 0 алгебра $J_{n,m}$ порождается следами произведений общих матриц и выдвинул гипотезу о строении порождающей системы инвариантов над полями положительной характеристики. Гипотеза Прочези была доказана С. Донкиным[66]. Обозначим через X_t, $t = 1,2,\ldots,m$, общую матрицу порядка n, в которой в i-й строке и j-м столбце стоит переменная $x_{ij}^{(t)}$. Тогда в качестве порождающих элементов F-алгебры $J_{n,m}$ можно взять элементы $d_s(X_{i_1} \cdots X_{i_k})$, $s = 1,2,\ldots,n$, где $d_s(X)$ с точностью до знака есть s-й коэффициент характеристического многочлена матрицы X.

Для $N \geqslant n$ имеет место естественный эпиморфизм $J_{N,m} \to J_{n,m}$, индуцированный отображением на общих $N \times N$-матрицах, при котором переменные $x_{ij}^{(t)}$ отображаются в нуль при $i > n$ или при $j > n$. Таким образом, можно определить *свободную алгебру инвариантов* J_m как $J_m = \mathrm{projlim}_n\, J_{n,m}$, где projlim – проективный предел.

Пусть $J = \mathrm{dirlim}_m\, J_m$, где dirlim – прямой предел, а также $J_n = \mathrm{dirlim}_m\, J_{n,m}$. Имеется естественная проекция $\theta_n \colon J \to J_n$, индуцированная проекциями $\theta_{n,m} \colon J_m \to J_{n,m}$. Обозначим ядро проекции θ_n через $\widehat{T}_n$. Идеал $\widehat{T}_n$ является $\widehat{T}$-идеалом алгебры J, т.е. он инвариантен при ее эндоморфизмах. В характеристике 0 алгебра J изоморфна подалгебре свободной алгебре со следом, порожденной следами, и из теоремы Размыслова-Прочези можно вывести, что над полем нулевой характеристики $\widehat{T}_n$ порождается как $\widehat{T}$-идеал полиномом $\mathrm{Tr}(x_0\chi_n(x_1,\ldots,x_n))$. То есть теорема Размыслова-Прочези описывает все соотношения в алгебре инвариантов полной линейной группы.

[65] C. Procesi, "The invariant theory of $n \times n$-matrices", *Advances in Math.*, **19**:3 (1976), 306-381.
[66] S. Donkin, "Invariants of several matrices", *Invent. Math.*, **110**:2 (1992), 389-401.

В характеристике $p > 0$ аналог теоремы Размыслова-Прочези был доказан А.Н. Зубковым[67]. Им было показано, что $\widehat{T}_n$ порождается как $\widehat{T}$-идеал элементами $d_{n+1}(x), d_{n+2}(x), \dots$. Позже А.Н. Зубков значительно обобщил этот чрезвычайно важный результат для представлений колчанов[68].

Аналогично тождествам со следом, можно рассматривать тождества с формами. Исследование тождеств с формами алгебры матриц в характеристике $p > 0$ играет важную роль в решении локальной проблемы Шпехта в положительной характеристике. Тождества с формами также тесным образом связаны с соотношениями в алгебре инвариантов полной линейной группы, но эта связь не такая прямая, как в характеристике 0. В частности, алгебра J и подалгебра свободной алгебры с формами, порожденная формами, не изоморфны. К исследованию тождеств с формами тесно примыкают работы К.А. Зубрилина[69,70], связанные с исследованием алгебр, удовлетворяющих тождествам Капелли.

В 1956 году И.Капланский поставил вопрос о существовании центральных полиномов в алгебре матриц. *Центральный полином* для T-идеала Γ – это такой полином $f = f(x_1, \dots, x_n)$, что $f \notin \Gamma$, но $[f, y] \in \Gamma$. Положительный ответ на вопрос Капланского дали Е.Форманек[71] и Ю.П. Размыслов[72]. При этом Ю.П. Размыслов установил биекцию взаимосвязь между центральными полиномами и слабыми тождествами. Полилинейный полином $f = f(x_1, \dots, x_n)$ называется *слабым тождеством* T-идеала Γ, если $f \notin \Gamma$, но $f|_{x_1=[y,z]} \in \Gamma$. В.Н. Латышевым[73,74,75] было введено понятие *устойчивого* T-идеала, т.е. такого T-идеала, множество полилинейных полиномов которого замкнуто относительно операторов отражения $\sum \alpha_{a_i,b_i} a_i x b_i \to \sum \alpha_{a_i,b_i} b_i x a_i$ для всех x. Примерами устойчивых T-идеалов являются идеалы тождеств γ-классических многообразий. Для устойчивых T-идеалов существование центральных полиномов равносильно существованию слабых тождеств.

С.В. Охитин[76] доказал, что над полем нулевой характеристики у каж-

---

[67] А.Н. Зубков, “Об обобщении теоремы Размыслова-Прочези”, *Алгебра и логика*, **35**:4 (1996), 433-457.

[68] А.Н. Зубков, “Теорема Размыслова-Прочези для представлений колчанов”, *Фунд. и прикл. матем.*, **7**:2 (2001), 387-421.

[69] К.А. Зубрилин, “Алгебры, удовлетворяющие тождествам Капелли”, *Мат. сб.*, **86**:3 (1995), 53-64.

[70] К.А. Зубрилин, “О классе нильпотентности препятствия для представимости алгебр, удовлетворяющих тождествам Капелли”, *Фунд. и прикл. матем.*, **1**:2 (1995), 409-430.

[71] E. Formanek, “Central polynomials for matrix rings”, *J. Algebra*, **23** (1972), 129-132.

[72] Ю.П. Размыслов, “О одной проблеме Капланского”, *Изв. АН СССР. Сер. Матем.*, **38**:4 (1974), 483-501.

[73] В.Н. Латышев, “О некоторых многообразиях ассоциативных алгебр”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **37**:5 (1973), 1010-1037.

[74] В.Н. Латышев, *Нематричные многообразия ассоциативных алгебр*, Дис. …д-ра физ.-мат. наук, Москва, 1977.

[75] В.Н. Латышев, “Устойчивые идеалы тождеств”, *Алгебра и логика*, **20**:5 (1981), 563-570.

[76] С.В. Охитин, “Об устойчивых T-идеалах и центральных полиномах”, *Вестн. МГУ. Сер. мат., мех.*,

дого устойчивого T-идеала есть слабые тождества, следовательно, есть и центральные полиномы. Метод доказательства является демонстрацией подхода, связанного с применением теорем А.Р. Кемера о классификации первичных и полупервичных многообразий и теоремы о нильпотентности. Над полями положительной характеристики устойчивость вербально первичных T-идеалов, существование у них слабых тождеств и центральных полиномов было доказана А.Я. Беловым[77] с помощью изучения тождеств с формами.

Цель работы и основные задачи. Цель данной диссертационной работы состоит в создании новых универсальных методов исследования нильпроблем и первичных многообразий ассоциативных алгебр, позволяющих решать известные открытые проблемы, и установление взаимосвязи между свойствами вербальной первичности и нильпроблематикой. Основными задачами диссертации являются: перенесение теоремы Размыслова-Прочези с полилинейного уровня на полиоднородый для матриц порядка $< p$, описание базиса тождеств с формами для алгебры матриц произвольного порядка, доказательство ослабленной конечной базируемости идеала тождеств алгебры матриц и, как следствие, решение проблемы А.Р. Кемера о нильиндексе радикала относительно свободной ассоциативной алгебры над бесконечным полем положительной характеристики; решение проблемы А.Р. Кемера об ограниченности степени алгебраичности носителей многообразий в классе первичных многообразий, исследование унитарной замкнутости вербально первичных T-идеалов; перенесение теоремы Левицкого на бесконечнопорожденные PI-алгебры; оценки на матричные типы нерегулярных первичных многообразий; описание полилинейных компонент первичных подмногообразий многообразия $\mathrm{Var}(M_{1,1})$ и доказательство теоремы о нильпотентности для подмногообразий этого многообразия; описание на полиоднородном уровне всех первичных подмногообразий многообразия Ю.П. Размыслова, построенного им в качестве контрпримера к проблеме глобальной нильпотентности $(p-2)$-энгелевых алгебр Ли.

Основные методы исследования. В работе используются классические методы структурной и комбинаторной теории колец, теория инвариантов полной линейной группы, теории PI-алгебр в нулевой и положительной характеристиках, теория тождеств со следом и тождеств с формами, теория представлений симметрических групп.

---

3 (1986), 85-89.

[77]А.Я. Белов, "Ассоциативных PI-алгебр, совпадающих со своим коммутантом, не существует", *Сиб. матем. журн.*, **44**:6 (2003), 1239-1254.

Научная новизна. Основные результаты диссертации являются новыми. Они заключаются в следующем.

- Получено положительное решение проблемы А.Р. Кемера об ограниченности нильиндекса радикала Джекобсона относительно свободной ассоциативной алгебры произвольного ранга над бесконечным полем характеристики $p > 0$ (теорема 1).

- В процессе решения этой проблемы теорема Размыслова-Прочези о тождествах со следом матричных алебр для алгебры матриц порядка $< p$ перенесена с полилинейного уровня на общий полиоднородный (теорема 6). В общем случае описан базис тождеств с формами алгебры матриц произвольного порядка (теорема 4). Доказана ослабленная конечная базируемость идеала обычных тождеств алгебры матриц (теорема 3). В случае $n < p$ доказан ее более специальный вариант (теорема 7).

- Получен положительный ответ на вопрос А.Р. Кемера о матричном типе нерегулярных первичных многообразий над полем характеристики $p > 0$: любое первичное многообразие матричного типа k при всех достаточно больших p является регулярным (теорема 8).

- Получен аналог теоремы Левицкого об ограниченности нильиндекса нильагебр для бесконечно порожденных PI-алгебр над полем положительной характеристики (теорема 9).

- Получено частичное решение проблемы А.Р. Кемера об ограниченности степени алгебраичности носителей многообразий над бесконечным полем положительной характеристики в классе первичных многообразий (теорема 10 и следствие 4). Аналогичный результат получен для энгелевых многообразий (теорема 11).

- Исследован вопрос об унитарной замкнутости первичных многообразий над бесконечным полем на общем полиоднородном уровне: показано, что произвольное первичное многообразие или унитарно замкнуто, или удовлетворяет некоторому нильтождеству (теорема 13).

- Доказано, что энгелевы первичные многообразия остаются первичными при дополнительном наложении нильтождества достаточно высокой примарной степени (теорема 14). Описаны первичные подмногообразия многообразия Ю.П. Размыслова, впервые построенного им в качестве контрпримера к проблеме глобальной нильпотентности $(p-2)$-энгелевых алгебр Ли (теорема 15).

- Над бесконечным полем характеристики $p \neq 2$ описаны полилинейные компоненты первичных подмногообразий многообразия $Var(M_{1,1})$ (теорема 16). В этом многообразии на полилинейном уровне доказана теорема о разложении произвольного многообразия в подпроизведение наибольшего полупервичного подмногообразия и нильпотентного (теорема 17).

Теоретическая и практическая ценность. Работа имеет теоретический характер. Полученные в ней результаты могут быть использованы в различных задачах теории ассоциативных алгебр с полиномиальными тождествами.

Апробация результатов. Результаты диссертации докладывались на научно-исследовательских семинарах: кафедральный семинар по алгебре кафедры Высшей алгебры МГУ; кафедральный семинар по алгебре кафедры Алгебро-геометрических вычислений УлГУ; семинар им. А.М. Ширшова «Теория колец» (ИМ СО РАН), семинар «Алгебра и логика» в НГУ; конференциях по алгебре: на Международной конференции по алгебре на Украине, Одесса, 2005; на Международной конференции по радикалам ICOR-2006, Киев, 2006; на Международной алгебраической конференции, посвященной 100-летию со дня рождения А.Г. Куроша, Москва, 2008; на 7-ой Международной конференции по алгебре на Украине, Харьков, 2009; на Международной конференции «Мальцевские чтения», посвященной 70-летию академика Ю.Л. Ершова, Новосибирск, 2010; на Международной алгебраической конференции, посвященной 70-летию А.В. Яковлева, Санкт-Петербург, 2010.

Публикации. Основные результаты опубликованы в 7 работах автора из официального перечня ВАК, список которых приведен в конце автореферата. Совместных публикаций нет.

Структура диссертации. Диссертация состоит из введения, 4 глав, разбитых на параграфы (нумерация параграфов подчинена нумерации глав, нумерация теорем сквозная) и списка литературы. Полный объем диссертации – 162 страницы. Список литературы включает 79 наименований.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Глава 1 посвящена решению проблемы А.Р. Кемера о нильиндексе радикала относительно свободной алгебры над бесконечным полем положительной характеристики.

Рассмотрим нетривиальный T-идеал Γ и относительно свободную алгебру счетного ранга $F\langle X\rangle/\Gamma$. Через n обозначим наибольший порядок матричной алгебры M_n, содержащейся в $\mathrm{Var}\left(F\langle X\rangle/\Gamma\right)$. Число n называется *сложностью* T-идеала Γ, а также сложностью соответствующего многообразия $\mathrm{Var}\left(F\langle X\rangle/\Gamma\right)$. Несложно показать, что сложность нетривиального многообразия всегда конечна. Ш.Амицур[78] доказал, что над бесконечным полем радикалом Джекобсона алгебры $F\langle X\rangle/\Gamma$ является идеал $T[M_n]/\Gamma$, где n – сложность Γ, и что $\mathrm{Rad}(F\langle X\rangle/\Gamma)$ является нильидеалом. Более того, $\mathrm{Rad}(F\langle X\rangle/\Gamma)$ является локально нильпотентным идеалом. Это немедленно вытекает из теоремы Размыслова-Кемера-Брауна[79], утверждающей, что радикал конечно порожденной PI-алгебры нильпотентен. Проблема нильпотентности радикала конечно порожденной PI-алгебры была поставлена В.Н. Латышевым[80]. А. Р. Кемером[81] сформулирована более тонкая по сравнению с теоремой Амицура проблема, специфическая для положительной характеристики.

Проблема 1. *Является ли радикал Джекобсона относительно свободной алгебры счетного ранга над бесконечным полем характеристики $p > 0$ нильидеалом ограниченного индекса?*

В главе 1 получено положительное решение этой проблемы.

Теорема 1. *Радикал Джекобсона относительно свободной алгебры счетного ранга над бесконечным полем характеристики $p > 0$ есть нильидеал ограниченного индекса.*

Легко понять, что из теоремы 1 вытекает ограниченность нильиндекса радикала произвольной относительно свободной алгебры (т.е. не обязательно счетного ранга) над бесконечным полем характеристики $p > 0$. Над полем

[78] S.A. Amitsur, “A generalization of Hilbert’s Nullstellensatz”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **8** (1957), 649-656.

[79] A. Braun, “The nilpotency of the radical in a finitely generated PI-ring”, *J. Algebra*, **89** (1984), 375-396.

[80] В.Н. Латышев, *Нематричные многообразия ассоциативных алгебр*, Дис. …д-ра физ.-мат. наук, Москва, 1977.

[81] A. Kemer, “PI-algebras and nil algebras of bounded index”, *Trends in ring theory* (Miscolc, Hungary, 1996), CMS Conf. Proc., **22**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1998, 59-69.

нулевой характеристики так же можно рассмотреть вопрос о нильиндексе радикала. Как показала И.Ю. Свиридова[82], над полем характеристики 0 радикал алгебры $F\langle X\rangle/\Gamma$ будет иметь ограниченный нильиндекс тогда и только тогда, когда Γ является идеалом тождеств некоторой конечномерной алгебры или когда $\Gamma = (0)$. При этом радикал будет являться нильпотентным идеалом. Тем самым в нулевой и положительной характеристиках радикалы относительно свободных алгебр имеют принципиально разные нильсвойства.

А.Р. Кемер[83] доказал, что если идеал $T[M_n]$ конечно базируем, то для любого T-идеала Γ сложности n проблема 1 имеет положительное решение. В частности, проблема 1 решается положительно для нематричных многообразий (т.е. многообразий сложности 1). При $p > 2$ конечная базируемость идеала $T[M_2]$ была доказана П. Кошлуковым[84], откуда вытекает положительно решение проблемы 1 для многообразий сложности 2 при $p \neq 2$. При всех других n проблема конечной базируемости идеала $T[M_n]$ в характеристике $p > 0$ является открытой, и, по всей видимости, чрезвычайно сложной ввиду отрицательного решения проблемы Шпехта.

Приведенный выше результат А.Р. Кемера показывает, что решение проблемы 1 в той или иной форме должно опираться на некоторые ослабленные свойства конечной базируемости идеала $T[M_n]$. При доказательстве теоремы 1 конечная базируемость используется в форме теоремы 3, которая является наиболее сложным в идейном и техническом плане результатом диссертации.

Теорема 3. *Для произвольных чисел n и p существуют полином $K(z_1, \ldots, z_k) \notin T[M_n]$ и конечно базируемый T-идеал $\Gamma \subset T[M_n]$, удовлетворяющие свойству:*

если $f(x_1, \ldots, x_m) \in T[M_n]$, то $f(x_1, \ldots, x_m)K(z_1, \ldots, z_k) \in \Gamma$.

В §1.1 содержится вывод теоремы 1 из теоремы 3. Полином $K(z_1, \ldots, z_k)$ и T-идеал Γ находятся в явном виде. Полином $K(z_1, \ldots, z_k)$ равен некоторой (явно вычисляемой и не зависящей от p) степени полинома $q(x, x^2, \ldots, x^n, y_1, \ldots, y_{n-1})$, где

$$q(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_{n-1}) = \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^\sigma x_{\sigma(1)} y_1 x_{\sigma(2)} y_2 \cdots y_{n-1} x_{\sigma(n)}.$$

[82] I.Yu. Sviridova, "Varieties and algebraic algebras of bounded degree", *J. of Pure and Appl. Algebra*, **133** (1998), 233-240.

[83] A. Kemer, "PI-algebras and nil algebras of bounded index", *Trends in ring theory* (Miscolc, Hungary, 1996), CMS Conf. Proc., **22**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1998, 59-69.

[84] P. Koshlukov, "Basis of the identities of the matrix algebra of order two over a field of characteristic $p \neq 2$", *J. Algebra*, **241**:1 (2001), 410-434.

T-идеал $\Gamma \subset T[M_n]$ совпадает с T-идеалом, порожденным всеми тождествами M_n, зависящими не более чем от $2n(n!)^2 l + n + 2$ переменных, где $l = 2^n \cdot n^{2n} \cdot p$. Конечная базируемость этого T-идеала вытекает из локальной шпехтовости.

При $n < p$ полином $K(z_1, \ldots, z_k)$ и T-идеал Γ устроены гораздо более простым образом: в качестве полинома $K(z_1, \ldots, z_k)$ можно взять полином Капелли порядка n^2, а идеал Γ_n порождается пятью полиномами, которые имеют прозрачное строение (теорема 7). Случай $n < p$ рассмотрен в диссертации в § 1.2 отдельно по трем причинам. Во-первых, при $n < p$ полностью исчезает ряд идейных и технических трудностей, что позволяет наиболее выпукло продемонстрировать основные идеи доказательства теоремы 3, не погружаясь в многочисленные детали. Во-вторых, при рассмотрении случая $n < p$ описывается базис тождеств со следом алгебры M_n, что переносит теорему Размыслова-Прочези с полилинейного уровня на общий полиоднородный.

Теорема 6. *Если $n < p$, то любое тождество со следом алгебры M_n над бесконечным полем характеристики $p > 0$ следует из тождества нулевой степени* $\mathrm{Tr}(1) = n$ *и полной линеаризации тождества Кэли-Гамильтона* $\chi_n(x_1, \ldots, x_n) = 0$.

В-третьих, при $n < p$ явная конструкция полинома $K(z_1, \ldots, z_k)$ и идеала Γ_n позволяет дать положительный ответ на вопрос А.Р. Кемера о матричном типе нерегулярных первичных многообразий[85]. Это делается в §1.3.

Теорема 8. *Для данного числа k и всех достаточно больших p каждое первичное многообразие матричного типа k над полем характеристики $p > 0$ является регулярным.*

Опираясь на результаты А.Н. Зубкова[86] об инвариантах полной линейной группы, при доказательстве теоремы 3 в §1.4-1.6 получено описание базиса тождеств с формами алгебры матриц порядка n. Обозначим через $\langle X \rangle$, $\langle X \rangle^\sharp$ свободные полугруппы без 1 и с 1, порожденные счетным множеством X, и через Q множество всех символов $d_n(u)$, $d_{n,(\rho)}(u_1, \ldots, u_m)$, $n = 1, 2, \ldots$; $(\rho) = (\rho_1, \ldots, \rho_m)$ – разбиение числа n; $u, u_i \in \langle X \rangle^\sharp$. Пусть (Q) – свободная коммутативная полугруппа с единицей, порожденная множеством Q, $F(Q)$ – полугрупповая алгебра. Профакторизуем $F(Q)$ по определяющим соотношениям $d_{n,(\rho)}(u_1, \ldots, u_m) = d_{n,(\sigma\rho)}(u_{\sigma(1)}, \ldots, u_{\sigma(m)})$, где $\sigma\rho = (\rho_{\sigma(1)}, \ldots, \rho_{\sigma(m)})$; $u_i \in \langle X \rangle^\sharp$. Полученную алгебру обозначим S. Положим $\breve{F}\langle X \rangle = F^\sharp \langle X \rangle \otimes_F S$.

[85] A. Kemer, "On the multilinear components of the regular prime varieties", *Methods in ring theory: proc. of the Trento conference. Lect. Notes in pure and appl. math.*, **198**, (1998), 171-183.

[86] А.Н. Зубков, "Об обобщении теоремы Размыслова-Прочези", *Алгебра и логика*, **35**:4 (1996), 433-457.

В §1.3 доказано, что над полем характеристики $p>0$ любая частичная линеаризация $d_{m,(\rho)}(x_1,\ldots,x_s)$ формы d_m на алгебре M_n является линейной комбинацией форм $d_{p^{k_1}}(u_1)\cdots d_{p^{k_t}}(u_t)$, где u_i – мономы от переменных $x_1,\ldots,x_s$, причем коэффициенты этой линейной комбинации не зависят от n:

$$d_{m,(\rho)}(x_1,\ldots,x_s)=\sum_{(k),(u)}\alpha^{(\rho)}_{(k),(u)}d_{p^{k_1}}(u_1)\cdots d_{p^{k_t}}(u_t),$$

$\alpha^{(\rho)}_{(k),(u)}\in F$, $u_i\in\langle x_1,\ldots,x_s\rangle$, u_i не являются p-ми степенями своих подслов. Профакторизуем $\breve{F}\langle X\rangle$ по вербальному идеалу, порожденному всеми такими тождествами, а также тождествами $d_{p^i}(x^p)=d_{p^i}(x)^p,\quad d_{p^i}(xy)=d_{p^i}(yx)$. Получившуюся алгебру обозначим $\widehat{F}\langle X\rangle$. Если в этой алгебре рассмотреть коммутативную F-подалгебру без единицы, порожденную элементами $d_{p^s}(u)$, $u\in\langle X\rangle$, то эта алгебра окажется изоморфной свободной алгебре инвариантов J (лемма 8 из §1.6).

Рассмотрим в $\widehat{F}\langle X\rangle$ подалгебру с единицей $\widetilde{F}\langle X\rangle$, порожденную множеством $\langle X\rangle^\sharp$ и символами $d_{p^i}(u)$, $u\in\langle X\rangle^\sharp$, при $p^i\leqslant n$. Тогда $\widetilde{F}\langle X\rangle$ содержит формы $d_i(x)$, $i\leqslant n$, а также все их частичные линеаризации. В доказательстве теоремы 3 используются именно тождества с формами M_n в алгебре $\widetilde{F}\langle X\rangle$, а не в $\widehat{F}\langle X\rangle$, где базис тождеств имеет более простое и красивое описание (предложение 2). Связано это с тем, что формы $d_{n+1},d_{n+2},\ldots$, будучи тождественно нулевыми на алгебре M_n, тем не менее при построении идеала Γ в теореме 3 требует включения в него *бесконечной* системы тождеств. Поэтому приходится работать более сложным образом в алгебре $\widetilde{F}\langle X\rangle$.

Рассмотрим отображение $\hat{f}\to\hat{f}^+$ из алгебры $\widehat{F}\langle X\rangle$ в алгебру $\widetilde{F}\langle X\rangle$, которое переводит в 0 все формы d_{p^s} при $p^s>n$, а далее продолжается по мультипликативности и линейности.

Теорема 4. *Над бесконечным полем характеристики $p>0$ базис тождеств с формами алгебры M_n в алгебре $\widetilde{F}\langle X\rangle$ образуют:*

(i) тождества нулевой степени $d_{p^s}(1)=C_n^{p^s}$, $p^s\leqslant n$ ($C_n^{p^s}$ – биномиальный коэффициент);

(ii) тождество Кэли-Гамильтона $\chi_n(x)=0$;

(iii) тождества от одной переменной $d_N^+(x)=0$, $N>n$;

(iv) тождества от двух переменных $d^+_{N,(s,N-s)}(x,y)=0$, $N>n$, $0<s<N$;

(v) тождества от $\leq n$ переменных $d_{p^s}\big(L_\rho(\chi_n(x))\big)$, $p^s\leqslant n$.

В пунктах (*iii*) и (*iv*) теоремы рассматриваются формы d_N при $N>n$ и все их частичные линеаризации от двух переменных. Эти формы нулевые на алгебре M_n, но, тем не менее, после применения отображения $\hat{f} \to \hat{f}^+$ доставляют нетривиальные соотношения между формами $d_1, \ldots, d_n$. В пункте (v) рассматриваются все линеаризации $L_\rho(\chi_n(x))$ тождества Кэли-Гамильтона, и от этих линеаризаций берется форма d_{p^s}. Отметим, что указанная в теореме система тождеств является бесконечной. Однако – и это главное – базис тождеств с формами алгебры M_n образуют полиномы, в совокупности зависящие от конечного числа переменных, а именно, не более чем от n переменных (*локальность базиса*).

§1.7 содержит вспомогательные технические результаты о некоторых обычных тождествах и тождествах с формами алгебры M_n. Наиболее сложные рассуждения главы 1 содержатся в §1.8. Каждому тождеству с формами $\tilde{f}$ алгебры M_n в алгебре $\widetilde{F}\langle X\rangle$ мы сопоставляем полином $R(\tilde{f}) \in F\langle X\rangle/\Gamma$, где T-идеал Γ определен выше после формулировки теоремы 3. Этот полином $R(\tilde{f})$ строится индукцией по целому ряду параметров, и основные сложности состоят в доказательстве корректности конструкции. Весь смысл отображения R состоит в том, что оно должно «коммутировать» по модулю Γ с операциями получения следствий (подстановками, линеаризациями, умножениями на формы и т.д.). К сожалению, за счет умножения на формы это неверно, однако имеет место некоторое ослабленное свойство коммутирования с операциями получения следствий (лемма 18), которого оказывается достаточным для доказательства теоремы 3.

Обсудим вопрос о том, что означает теорема 1 для произвольных (не обязательно относительно свободных) PI-алгебр над полем характеристики $p > 0$. Пусть идеал тождеств PI-алгебры A имеет сложность n. Тогда из теоремы 1 вытекает, что идеал значений

$$T[M_n](A) = \{f(a_1, \ldots, a_k) | a_i \in A, f \in T[M_n]\}$$

алгебры A является нильидеалом ограниченного индекса. При этом в многообразии $\mathrm{Var}(A)$ существует алгебра B (например, относительно свободная алгебра счетного ранга), для которых идеал $T[M_n](B)$ является наибольшим нильидеалом ограниченного индекса. Например, в энгелевых алгебрах коммутаторный идеал всегда есть нильидеал ограниченного индекса, а любой строго больший идеал этим свойством обладать не обязан.

Теорема 1 имеет одно достаточно неожиданное следствие. Из теоремы А.И. Ширшова о высоте немедленно вытекает, что если PI-алгебра A порождается множеством $\{a_1, \ldots, a_k\}$ и любое слово от множества образующих $\{a_i\}$ является нильпотентным степени не выше m, то сама алгебра Aявляется нильалгеброй ограниченного индекса N. Число N зависит от степени тождества, m и k.

В такой формулировке над полями нулевой характеристики убрать условие конечной порожденности нельзя даже для коммутативных алгебр. Следующая теорема, доказанная в §1.9, показывает, что над полями положительной характеристики условие конечной порожденности является лишним.

Теорема 9. *Пусть A – ассоциативная алгебра над полем характеристики $p > 0$, удовлетворяющая тождеству $f = 0$. Тогда если A порождается множеством $\{a_i, i \in I\}$, и любое слово от элементов a_i нильпотентно степени не выше m, то A является нильалгеброй ограниченного индекса N. При этом N зависит от характеристики p, тождества f и числа m (и не зависит от мощности множества I).*

Теорема 9 играет ключевую роль при исследовании следующей проблемы, поставленной А. Р. Кемером[87].

Проблема 2. *Верно ли, что каждое собственное многообразие ассоциативных алгебр над бесконечным полем положительной характеристики порождается алгебраической алгеброй ограниченного индекса над некоторым расширением этого поля?*

Глава 2 полностью посвящена положительному решению проблемы 2 для произвольных первичных многообразий с единицей, а именно, доказательству следующей теоремы.

Теорема 10. *Каждое собственное первичное многообразие ассоциативных алгебр с единицей над бесконечным полем положительной характеристики порождается алгебраической алгеброй ограниченного индекса над тем же полем.*

На самом деле условие наличия единицы в формулировке теоремы 10 является избыточным. Это вытекает из результатов главы 3 (см. подробности ниже).

Предполагается, что проблема 2 имеет положительное решение и в общем случае. Ситуация с аналогом проблемы 2 для полей нулевой характеристики обстоит следующим образом. Используя структурную теорию многообразий ассоциативных алгебр над полями нулевой характеристики, И. Ю. Свиридова[88] доказала, что над полем характеристики 0 многообразие порождается

[87]A. Kemer, "PI-algebras and nil algebras of bounded index", *Trends in ring theory* (Miscolc, Hungary, 1996), CMS Conf. Proc., **22**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1998, 59-69.

[88]I.Yu. Sviridova, "Varieties and algebraic algebras of bounded degree", *J. of Pure and Appl. Algebra*, **133** (1998), 233-240.

алгебраической алгеброй ограниченного индекса тогда и только тогда, когда оно порождается конечномерной алгеброй. Вместе с тем, в этой же работе было показано, что любое нетривиальное многообразие может быть порождено алгебраической алгеброй ограниченного индекса над некоторым коммутативным кольцом. Таким образом, свойства многообразия порождаться алгебраическими алгебрами ограниченного индекса над полем и над коммутативным кольцом оказываются принципиально различными.

Проблема 2 была решена И. Ю. Свиридовой в двух важных частных случаях. В работе [89] она была решена для энгелевых многообразий с единицей, а в работе[90]– для первичных нематричных многообразий с единицей.

Сделаем важное замечание. В теореме 10 многообразие порождается алгебраической алгеброй ограниченного индекса над *тем же самым* полем, а не над его расширением. Для энгелевых многообразий ситуация аналогична. Вообще говоря, И.Ю. Свиридовой было доказано, что энгелевы многообразия порождаются алгебраическими алгебрами ограниченного индекса над расширениями основного поля. В теореме 11 в §2.6 доказывается более сильный факт.

ТЕОРЕМА 11. *Каждое энгелево многообразие ассоциативных алгебр с единицей над бесконечным полем положительной характеристики порождается алгебраической алгеброй ограниченного индекса над тем же полем.*

Таким образом, во всех известных случаях, когда проблема 2 решена положительно, многообразие может быть порождено алгебраической алгеброй ограниченного индекса над F, а не над расширением поля F. В этой связи возникает гипотеза, что в проблеме 2 можно требовать алгебраичности не над расширением основного поля, а над самим основным полем.

Несложно показать, что из положительного решения проблемы 2 вытекает положительное решение проблемы 1. Таким образом, формально проблему 2 можно рассматривать как усиление проблемы 1. Однако представляется, что едва ли возможно решение проблемы 2, не опирающееся на решение проблемы 1.

Материал главы 2 расположен следующим образом. §2.1 и §2.2 содержат формулировки необходимых для дальнейшего сведений и определение полупростой конечномерной алгебры $\mathscr{P}$, ассоцированной с данным T-идеалом Г. В §2.3 по Г строится алгебра $\mathscr{B}$ и доказывается, что $\mathscr{B}$ – алгебраическая

[89] I.Yu. Sviridova, "Varieties and algebraic algebras of bounded degree", *J. of Pure and Appl. Algebra*, **133** (1998), 233-240.

[90] И.Ю. Свиридова, "T-первичные многообразия и ассоциативные алгебры", *Фунд. и прикл. матем.*, **8**:1 (2002), 221-243.

алгебра ограниченного индекса алгебраичности над основным полем. При этом не используется условие, что Γ – вербально первичный T-идеал. §2.4 содержит определение критических параметров T-идеала Γ. Прежде всего, определяется параметр l и в нескольких леммах доказываются его свойства. Далее определяются k-полные и насыщенные наборы идемпотентов и доказываются свойства этих наборов, прежде всего их существование. Исходя из этого доказывается ключевая техническая лемма главы 2 – лемма 27. В §2.5 доказывается, что идеал тождеств алгебры $\mathscr{B}$ совпадает с Γ, что завершает доказательство теоремы 10. В доказательстве используется техника А.Р. Кемера работы с конечномерными классическими алгебрами, разработанная им для решения локальной проблемы Шпехта. Основное отличие состоит в том, что основные параметры определяются не только через центральные идемпотенты полупростой алгебры $\mathscr{P}$, а через все диагональные матричные единички. Основная идея доказательства теоремы 10 состоит в переходе к обобщенным тождествам и сведению общей ситуации к рассмотрению некоторых подалгебр, в которых препятствие к энгелевости аннулируется умножением на обобщенные слова с подходящими насыщенными наборами идемпотентов. Для последующего избавления от такого умножения требуется первичность. §2.6 содержит доказательство теоремы 11. Оно получается путем значительного упрощения доказательства теоремы 10, но, тем не менее, требует отдельного рассмотрения.

Глава 3 посвящена изучению взаимосвязи первичности и унитарной замкнутости. А.Р. Кемером[91] и А.Я. Беловым[92] разными способами было доказано, что каждый вербально первичный T-идеал Γ является *унитарно замкнутым на полилинейном уровне*. Это означает, если $f(x_1,\ldots,x_m)\in\Gamma$ и полином $f(x_1,\ldots,x_m)$ полилинеен, то $f(x_1,\ldots,x_m)|_{x_i=1}\in\Gamma$.

На полиоднородном уровне вербально первичные T-идеалы не обязаны быть унитарно замкнутыми, в качестве примера можно рассмотреть вербально первичный T-идеал $\{[x,y]=0, x^p=0\}^T$. Однако теорема 13 показывает, что для вербально первичных T-идеалов Γ, не содержащих полиномов x^n, унитарная замкнутость на полиоднородном уровне выполняется.

Теорема 13. *Пусть поле F бесконечно и Γ – вербально первичный T-идеал. Тогда либо Γ является унитарно замкнутым T-идеалом, либо $x^n\in\Gamma$ для некоторого n.*

[91] A. Kemer, “On the multilinear components of the regular prime varieties”, *Methods in ring theory: proc. of the Trento conference. Lect. Notes in pure and appl. math.*, **198**, (1998), 171-183.

[92] А.Я. Белов, “Ассоциативных PI-алгебр, совпадающих со своим коммутантом, не существует”, *Сиб. матем. журн.*, **44**:6 (2003), 1239-1254.

Таким образом, над бесконечным полем каждое нетривиальное первичное многообразие порождается или алгеброй с единицей, или нильалгеброй ограниченного индекса. Ясно, что эти альтернативы взаимно исключают друг друга. Доказательство теоремы 13 содержится в §3.2 и опирается на модификации технических лемм, доказанных в §2.4.

Вернемся к теореме 10. Если T-идеал содержит тождество $x^n = 0$, то относительно свободная алгебра $F\langle X\rangle/\Gamma$ является, очевидно, алгебраической алгеброй ограниченного индекса алгебраичности и порождает многообразие с идеалом тождеств Γ. Следовательно, в теореме 10 можно отказаться от требования наличия единицы.

Следствие 4. *Каждое собственное первичное многообразие над бесконечным полем F порождается алгебраической алгеброй ограниченного индекса алгебраичности над F.*

В §3.3 для энгелевых первичных многообразий исследуется вопрос о том, остаются ли они первичными при наложении тождества $x^{p^N} = 0$ при больших N. Исходя из теоремы 13, доказано следующее утверждение.

Теорема 14. *Пусть F – бесконечное поле характеристики $p > 0$, Γ – вербально первичный T-идеал, содержащий тождество энгелевости. Тогда для всех достаточно больших N (зависящих от Γ) T-идеал $\{\Gamma, x^{p^N}\}^T$ будет вербально первичным.*

Теоремы 13 и 14 применяются для описания (на полиоднородном уровне) одного хорошо известного и интересного класса первичных многообразий. Рассмотрим при $p \geqslant 5$ в свободной ассоциативной алгебре со следом счетного ранга $\tilde{F}\langle X\rangle$ $\tilde{T}$-идеал $\tilde{U}$, порожденный полиномами со следом

$$\mathrm{Tr}(1) - 2, \quad \chi_2(x, y), \quad \rho_{p-2}(x_1, \ldots, x_{p-2}).$$

Здесь $\chi_2(x, y) = xy + yx - x\,\mathrm{Tr}(y) - y\,\mathrm{Tr}(x) - \mathrm{Tr}(xy) + \mathrm{Tr}(x)\,\mathrm{Tr}(y)$ – полином Кэли-Гамильтона, $\rho_{p-2}(x_1, \ldots, x_{p-2})$ – симметрический полином Кэли-Гамильтона, равный сумме всех полилинейных мономов со следом от переменных $x_1, \ldots, x_{p-2}$. Обозначим через U T-идеал алгебры $F\langle X\rangle$, порожденный всеми обычными полилинейными полиномами из $\tilde{U}$: $U = \{\tilde{U} \cap P\}^T$, где P – множество всех полилинейных полиномов из $F\langle X\rangle$. Ограничение $p \geqslant 5$ нужно для исключения тривиальных случаев $p = 2$ и $p = 3$, в которых рассматриваемое многообразие интереса не представляет.

T-идеал U впервые был построен Ю.П. Размысловым[93] совершенно другим способом. Ю.П. Размыслов показал (для использованного им определения U), что при $p \geqslant 5$ относительно свободная алгебра $F\langle X\rangle/U$ является $(p-1)$-энгелевой (на самом деле $(p-2)$-энгелевой), но не лиево нильпотентной. В силу теоремы Хиггинса эта алгебра будет неразрешимой. Это известный контрпример Ю.П. Размыслова к глобальной проблеме Бернсайда для алгебр Ли. То, что построенный Ю.П. Размысловым T-идеал совпадает с U, следует, например, из полной классификации полилинейных компонент первичных подмногообразий многообразия, порожденного алгеброй матриц второго порядка. Эта классификация была получена А.Р. Кемером[94].

А.Р. Кемером[95] был рассмотрен $\tilde{T}$-идеал $\tilde{U}'$, порождаемый всеми тождествами со следом алгебры матриц второго порядка, а также полиномами $\left(x - \frac{1}{2}Tr(x)\right)^{p-2}$ и x^p. Из классификации полилинейных компонент первичных подмногообразий многообразия $\mathrm{Var}(M_2)$ снова вытекает, что T-идеал $\{\tilde{U}' \cap P\}^T$ совпадает с U. Четвертая характеризация T-идеала U состоит в том, что он порождается полилинейными тождествами единственного минимального 2-классического многообразия алгебр со следом[96].

Следующая теорема описывает все вербально первичные T-идеалы, полилинейная компонента которых совпадает с $U \cap P$.

Теорема 15. *Пусть F – бесконечное поле характеристики $p \geqslant 5$.*

1) Если Γ – вербально первичный T-идеал и $\Gamma \cap P = U \cap P$, то или $\Gamma = U$, или $\Gamma = \{U, x^{p^N}\}^T$ для некоторого натурального N.

2) T-идеалы U и $\{U, x^{p^N}\}^T$, $N \geqslant 1$, попарно различны и являются вербально первичными.

Глава 4 содержит два результата о тождествах матричных супералгебр.

Первый результат, полученный в §4.1, представляет из себя описание полилинейных компонент первичных подмногообразий многоообразия $\mathrm{Var}(M_{1,1})$.

Теорема 16. *Пусть $p \neq 2$, U – T-первичный T-идеал, $T[M_{1,1}] \subseteq U$. Тогда $U \cap P$ совпадает или с $T[M_{1,1}] \cap P$, или с $\{[x,y,z] = 0\}^T \cap P$, или с $\{[x,y] = 0\}^T \cap P$.*

Таким образом, при $p > 2$ структура полилинейных компонент первичных подмногообразий многообразия $\mathrm{Var}(M_{1,1})$ такая же, как в характеристике

[93] Ю.П. Размыслов, “Тождества со следом полной матричной алгебры над полем характеристики нуль”, *Изв. АН СССР. Сер. Матем.*, **37**:3 (1973), 723-756.

[94] A. Kemer, “Multilinear components of the prime subvarieties of the variety $\mathrm{Var}(M_2(F))$”, *Algebras and Representation Theory*, **4**:1 (2001), 87-104.

[95] A. Kemer, “Remarks on the prime varieties”, *Israel J. of Math.*, **96**:2 (1996), 341-356.

[96] Л.М. Самойлов, “О γ-классических многообразиях”, *Фунд. и прикл. матем*, **8**:3 (2002), 887-910.

нуль. Интересно сравнить этот результат с описанием полилинейных компонент первичных подмногообразий многообразия $\mathrm{Var}(M_2)$ в характеристике $p > 0$ (понятно, что алгебры M_2 и $M_{1,1}$ в некотором смысле «похожи» друг на друга), которое было получено А.Р. Кемером[97,98]. Среди подмногообразий многообразия $\mathrm{Var}(M_2)$ имеется бесконечная серия первичных подмногообразий, не имеющая аналогов в нулевой характеристике. Случай $p = 2$ в теореме 16 является прямым следствием этих результатов А.Р. Кемера, ведь при $p = 2$ алгебры M_2 и $M_{1,1}$ имеют одинаковые полилинейные тождества. Несложно понять, что теорема 16 легко вытекает из следующего более сильного утверждения.

Теорема 17. *Пусть $p \neq 2$, U – произвольный T-идеал со свойствами $T[M_{1,1}] \subset U$, $T[M_{1,1}] \cap P \neq U \cap P$. Тогда для некоторого m*

$$[x_1, y_1, z_1][x_2, y_2, z_2] \ldots [x_m, y_m, z_m] \in U.$$

Из этой теоремы следует, что для произвольных подмногообразий многообразия $\mathrm{Var}(M_{1,1})$ при $p > 2$ выполняется аналог теоремы А.Р. Кемера о нильпотентности идеала тождеств наибольшего полупервичного подмногообразия. В текущий момент времени это единственный нетривиальный случай в характеристике $p > 0$, в котором установлена справедливость теоремы о нильпотентности.

Для T-идеала Γ положим

$$\Gamma' = \big\{ f(x_1, \ldots, x_n) \in F\langle X\rangle | f([x_1, y_1], \ldots, [x_n, y_n]) \in \Gamma \big\}.$$

Элементы из Γ' называются *слабыми по всем переменным тождествами* T-идеала Γ. По ходу доказательства теоремы 17 устанавливается, что полилинейные компоненты первичных многообразий однозначно определяются своими слабыми по всем переменным тождествами. Отметим, что для произвольных многообразий это неверно.

Теорема 18. *Пусть Γ_1, Γ_2 – T-первичные T-идеалы и $\Gamma_1' \cap P = \Gamma_2' \cap P$. Тогда $\Gamma_1 \cap P = \Gamma_2 \cap P$.*

Второй результат главы 4 является единственным результатом диссертации о тождествах в нулевой характеристике. Выше уже отмечалась исключительная роль матричных супералгебр $M_{n,k}$ в PI-теории над полями нулевой

[97] A. Kemer, "Remarks on the prime varieties", *Israel J. of Math.*, **96**:2 (1996), 341-356.

[98] A. Kemer, "Multilinear components of the prime subvarieties of the variety $\mathrm{Var}(M_2(F))$", *Algebras and Representation Theory*, **4**:1 (2001), 87-104.

характеристики. Однако, несмотря на это, о тождествах алгебр $M_{n,k}$ известно крайне мало. В частности, минимальная степень тождеств алгебр $M_{n,k}$ известна только в случаях $M_{n,0}$, $M_{0,k}$, $M_{1,1}$, $M_{1,2}$ и $M_{2,1}$. В двух последних случаях нижняя оценка для степени тождеств была получена путем компьютерных вычислений[99], верхняя вытекает из теоремы 19, доказываемой в §4.2.

Теорема 19. *Над полем характеристики нуль у алгебры $M_{n,k}$ есть тождества степени* $2(nk + n + k) - \min\{n, k\}$.

Можно выдвинуть гипотезу, что тождеств меньшей степени у алгебр $M_{n,k}$ в характеристике нуль нет. Эта гипотеза согласуется со всеми вышеперечисленными случаями, в которых минимальная степень тождеств известна.

Связь между нильпроблемами и первичными многообразиями. Основные результаты диссертации получены при помощи использования «двойственного» подхода в исследовании нильпроблем и первичных многообразий. Он состоит в том, что нильпроблемы сводятся к исследованию первичных многообразий, и, наоборот, те или иные вопросы о первичных многообразиях сводятся к вопросам нильпотентности.

Так, решение проблемы о нильиндексе радикала относительно свободной алгебры над полем положительной характеристики практически полностью состоит в исследовании тождеств и тождеств с формами алгебры матриц порядка n, которая порождает первичное многообразие. Наоборот, доказательство теоремы 8 состоит в доказательстве нильпотентности некоторого идеала в относительно свободной алгебре многообразия $\mathrm{Var}(M_n)$. Основные соображения в доказательстве теоремы 9 так же связаны с рассмотрением тождеств и центральных полиномов в алгебре матриц. Решение проблемы алгебраичности носителей первичных многообразий (теорема 10) связано с доказательством нильпотентности некоторых идеалов в алгебре обобщенных тождеств. Аналогично, доказательство теоремы 17 тоже сводится к вопросам нильпотентности некоторых идеалов в относительно свободной алгебре. Подобного рода идеологию двойственности можно проследить в доказательстве всех основных результатов диссертации.

Основные результаты диссертации, выносимые на защиту.

1. Получено положительное решение проблемы А.Р. Кемера об ограниченности нильиндекса радикала Джекобсона относительно свободной ассоциативной алгебры произвольного ранга над бесконечным полем характеристики $p > 0$ (теорема 1).

[99] U. Vishne, "Polynomial identitie of $M_2(G)$", *Commun. in Algebra*, **30**:1 (2002), 443-454.

2. В процессе решения этой проблемы теорема Размыслова-Прочези о тождествах со следом матричных алебр для алгебры матриц порядка $< p$ перенесена с полилинейного уровня на общий полиоднородный (теорема 6). В общем случае описан базис тождеств с формами алгебры матриц произвольного порядка (теорема 4). Доказана ослабленная конечная базируемость идеала обычных тождеств алгебры матриц (теорема 3). В случае $n < p$ доказан ее более специальный вариант (теорема 7).

3. Получен положительный ответ на вопрос А.Р. Кемера о матричном типе нерегулярных первичных многообразий над полем характеристики $p > 0$: любое первичное многообразие матричного типа k при всех достаточно больших p является регулярным (теорема 8).

4. Получен аналог теоремы Левицкого об ограниченности нильиндекса нильагебр для бесконечно порожденных PI-алгебр над полем положительной характеристики (теорема 9).

5. Получено частичное решение проблемы А.Р. Кемера об ограниченности степени алгебраичности носителей многообразий над бесконечным полем положительной характеристики в классе первичных многообразий (теорема 10 и следствие 4). Аналогичный результат получен для энгелевых многообразий (теорема 11).

6. Исследован вопрос об унитарной замкнутости первичных многообразий над бесконечным полем на общем полиоднородном уровне: показано, что произвольное первичное многообразие или унитарно замкнуто, или удовлетворяет некоторому нильтождеству (теорема 13).

7. Доказано, что энгелевы первичные многообразия остаются первичными при дополнительном наложении нильтождества достаточно высокой примарной степени (теорема 14). Описаны первичные подмногообразия многообразия Ю.П. Размыслова, впервые построенного им в качестве контрпримера к проблеме глобальной нильпотентности $(p-2)$-энгелевых алгебр Ли (теорема 15).

8. Над бесконечным полем характеристики $p \neq 2$ описаны полилинейные компоненты первичных подмногообразий многообразия $Var(M_{1,1})$ (теорема 16). В этом многообразии на полилинейном уровне доказана теорема о разложении произвольного многообразия в подпроизведение наибольшего полупервичного подмногообразия и нильпотентного (теорема 17).

СПИСОК РАБОТ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ
(из официального Перечня ВАК)

[1] Л.М. Самойлов, “О нильиндексе радикала относительно свободной ассоциативной алгебры”, *Матем. заметки*, **82**:4 (2007), 583-592.

[2] Л.М. Самойлов, “О радикале относительно свободной ассоциативной алгебры над полями положительной характеристики”, *Матем. сборник*, **199**:5 (2008), 81-126.

[3] Л.М. Самойлов, “Аналог теоремы Левицкого для бесконечно порожденных ассоциативных алгебр”, *Матем. заметки*, **86**:1 (2009), 151-153.

[4] Л.М. Самойлов, “Алгебраические алгебры и первичные многообразия ассоциативных алгебр”, *Матем. сборник*, **200**:5 (2009), 99-128.

[5] Л.М. Самойлов, “Аналог теоремы Амицура-Левицкого для матричных супералгебр”, *Сиб. матем. журн.*, **51**:3 (2010), 620-625.

[6] Л.М. Самойлов, “Об унитарной замкнутости первичных многообразий ассоциативных алгебр”, *Сиб. матем. журн.*, **51**:4 (2010), 712-722.

[7] Л.М. Самойлов, “О полилинейных компонентах первичных подмногообразий многообразия $\mathrm{Var}(M_{1,1})$”, *Матем. заметки*, **87**:6 (2010), 919-933.