МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
им. М. В. ЛОМОНОСОВА

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ
Кафедра теории пластичности

На правах рукописи
УДК 539.3

Костырева Лилия Александровна

КОНТАКТНЫЕ ЗАДАЧИ И ЗАДАЧИ МЕХАНИКИ РАЗРУШЕНИЯ ДЛЯ ПРЕДНАПРЯЖЁННЫХ УПРУГИХ ТЕЛ

Специальность 01.02.04 – Механика деформируемого твёрдого тела

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Москва – 2011

Работа выполнена на кафедре теории пластичности механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, профессор
Александров Виктор Михайлович

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук, профессор
Коваленко Евгений Вениаминович

доктор физико-математических наук, старший научный сотрудник
Солдатенков Иван Алексеевич

Ведущая организация: Российский государственный университет нефти и газа им. И. М. Губкина

Защита состоится «___»____________ 2011 г. в часов на заседании диссертационного совета Д 501.001.91 при Московском государственном университете им. М. В. Ломоносова по адресу: 119992, Москва, Ленинские горы, МГУ, механико-математический факультет, аудитория 1610.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке механико-математического факультета МГУ (Главное здание, 14 этаж)

Автореферат разослан «___»____________ 2011 года.

Ученый секретарь диссертационного совета
Д 501.001.91,
профессор С. В. Шешенин

Актуальность проблемы

Во всех реальных конструкциях и деталях машин практически всегда существуют начальные или остаточные напряжения. Причины их возникновения могут быть различными. Зачастую начальные напряжения в деталях и конструкциях создаются специально при их изготовлении или сборке. Также они могут появляться в процессе эксплуатации как под влиянием механических факторов, таких как необратимые пластические деформации, так и по причинам, носящим немеханический характер (локальное изменение агрегатного состояния, физико-химические процессы и структурные изменения в материале). Наконец, начальные напряжения могут быть обусловлены постоянным действием массовых (например, гравитационных) сил.

Наличие начальных напряжений сказывается на всем напряженно деформированном состоянии тел, поэтому может влиять на прочность конструкций, приводить к внутренней потере устойчивости, способствовать локальному разрушению материала и пр. Учет остаточных напряжений при расчете элементов конструкций, машин и сооружений позволяет более эффективно учесть прочностные ресурсы материалов путем правильной оценки запасов прочности.

В настоящее время в технике для улучшения прочностных свойств деталей, возможности их использования в условиях повышенных температур или в присутствии агрессивных сред широко применяются различные покрытия. Поскольку такие детали зачастую являются ответственными элементами конструкций, чье разрушение может привести к катастрофическим последствиям, необходима их регулярная диагностика. В теоретическом плане эта проблема может быть сведена к рассмотрению задач о предварительно напряженном бесконечном слое со смешанными граничными условиями.

Аналогичные задачи могут возникать и при расчете тяжелых фундаментных плит и строительных перекрытий, находящихся в поле действия гравитационных сил.

Характерная особенность таких задач – то, что в математическом плане они в основном являются задачами со смешанными граничными условиями (контактными задачами) для сжимаемых и несжимаемых тел при однородных начальных состояниях и, как правило, сводятся к решению интегральных уравнений.

Исследования влияния начальных (остаточных) напряжений стали активно проводиться в нашей стране и за рубежом лишь в конце XX столетия. Необходимо отметить, что в общем случае, строгая постановка таких задач требует привлечения аппарата нелинейной теории упругости [7], что сильно затрудняет построение аналитических решений. Однако, при условии больших начальных напряжений (деформаций) можно ограничиться рассмотрением линеаризованной теории упругости [6].

Первые работы по контактным задачам для преднапряжённых тел посвящены взаимодействию упругих тел с жесткими штампами для классических областей типа полуплоскости и полупространства. Причем рассматриваются либо упругие потенциалы конкретной довольно простой формы (Трелоара, Муни и др.), либо задача ставится в общем виде для сжимаемых и несжимаемых тел с потенциалом произвольной структуры.

Изучение более сложных задач стало возможно благодаря развитию подходов к исследованию смешанных краевых задач теории упругости и методов решения интегральных уравнений. Одним из наиболее эффективных подходов для материалов с произвольным видом упругого потенциала и однородной начальной деформацией является подход, предложенный А. Н. Гузем. Он основан на использовании теории функций комплексного переменного для плоских задач и теории потенциала (интегральных преобразований, интегральных уравнений) для пространственных задач. Этот подход был развит в работах А. Н. Гузя, С. Ю. Бабича, Ю. П. Глухова, В. И. Кнюха, В. М. Назаренко, В. Б. Рудницкого и др.

Не менее эффективным оказался подход, основанный на асимптотических методах решения интегральных уравнений, используемый в настоящей работе. Асимптотический метод, позднее названный «методом больших λ» был предложен для решения смешанных задач теории упругости в работах И. И. Воровича, Ю. А. Устинова.

Поскольку по своей природе «метод больших λ» имеет ограниченную область применимости, возникла необходимость построения другого асимптотического метода, позволяющего находить решения интегральных уравнений для малых значений определяющего параметра. Он получил название «метода малых λ». Такое построение было дано В. М. Александровым.

При помощи этих методов удалось решить ряд новых задач. Общая постановка плоских контактных задач для полупространства и слоя из несжимаемого материала, подверженных одновременному действию сил тяжести и однородных начальных напряжений, ориентированных вдоль границы, предложена в работе В. М. Александрова и Н. Х. Арутюняна. В ней проведен анализ поверхностной устойчивости среды и влияния начальных напряжений на контактную жесткость.

Изучению контактного взаимодействия штампов (бандажа) с предварительно нагруженным телом (цилиндром) конечных размеров посвящен ряд работ Л. М. Филипповой, А. Н. Цветкова, М. И. Чебакова

К исследованиям по контактному взаимодействию упругих тел тесно примыкают задачи теории трещин. Они относятся к теории механики разрушений, основы которой были заложены в работах А. Гриффитса [1]. На протяжении многих лет разрабатывались различные подходы к решению задач механики разрушений: использующие теорию функции комплексного переменного (Н. И. Мусхелишвили); привлекающие теорию упруго-пластических деформаций; основанные на различных феноменологических гипотезах. К наиболее важным работам по механике разрушения можно отнести исследования Г. И. Баренблатта, Б. Билби, Дж. Гудьера, В. Д. Клюшникова, Е. М. Морозова, В. В. Панасюка, В. З. Партона, Г. П. Черепанова, Дж. Эшелби. По своей природе задачи теории трещин являются задачами со смешанными граничными условиями, поэтому богатейшие средства, развитые в механике контактных взаимодействий, с успехом применяются и в этой области механики сплошных сред.

Широкому кругу вопросов механики преднапряженных деформируемых тел посвящена многотомная монография А. Н. Гузя, включающая в себя теорию контактных взаимодействий [6], исследования по механике разрушений [2] и устойчивости тел с остаточными напряжениями [5], динамические задачи [3,4].

В настоящей работе рассматривается круг плоских задач для упругого преднапряженного слоя из сжимаемого и несжимаемого материалов с упругими потенциалами конкретного вида (потенциал гармонического типа для сжимаемого материала и потенциал Муни для несжимаемого). Исследуются вопросы контактного взаимодействия слоя с жесткими штампами и задачи о поведении слоя при наличии ослабляющих трещин.

Цели и задачи исследования

Цель настоящей работы – исследование влияния начальных напряжений на напряженно-деформированное состояние упругого слоя, охватывающее физически корректные постановки задач следующих типов:

а) контактная задача для слоя, закрепленного по нижней грани;

б) контактная задача для слоя, опирающегося без трения на жесткое основание;

в) задача о продольной трещине в слое с жестко закрепленными гранями;

г) задача о продольной трещине со скользящей заделкой граней;

д) задача о продольной трещине со свободными гранями.

Основной задачей исследования было построение, по возможности, аналитических асимптотических решений и их сравнение с классическими решениями, не учитывающими начальные напряжения. Также для промежуточных толщин слоя, при которых происходит стыковка асимптотических методов, требовалось построение численных приближённых решений.

В качестве основного результата было необходимо получить зависимости некоторых интегральных характеристик, таких как контактное давление и коэффициент интенсивности напряжений в вершине трещины, от параметров, характеризующих начальное состояние среды.

Методы исследования

С целью сведения задач к решению интегральных уравнений в работе применяется интегральное преобразование Фурье. Для построения аналитических решений полученных уравнений используется асимптотические методы «больших и малых λ». Поскольку данные методы имеют ограниченную область применимости, и значение параметра λ, при котором они стыкуются, существенно зависит от величины начального нагружения, для промежуточных значений данного параметра при помощи модифицированного метода Мультоппа-Каландия строится приближенное численное решение интегрального уравнения.

Научная новизна и практическая значимость работы

1. Впервые рассмотрен ряд плоских задач о поведении физически нелинейного и геометрически нелинейного упругого слоя, подверженного

начальному однородному нагружению посредством равномерных растягивающих (сжимающих) напряжений, приложенных на бесконечности. Исследуемые постановки охватывают вопросы механики контактного взаимодействия преднапряженного слоя с жесткими гладкими штампами и вопросы теории трещин.

2. В контактных задачах при помощи асимптотического метода больших λ для относительно большой толщины слоя и асимптотического метода малых λ для относительно малой толщины получено распределение нормальных напряжений в области контакта. Найденные зависимости позволяют оценить влияние начальных напряжений на напряженно деформированное состояние слоя, а также на величину вдавливающей силы и момента, обеспечивающих заданное внедрение штампа.
3. В задачах о слое, содержащем продольную трещину, при помощи асимптотического метода больших λ для относительно большой толщины слоя и асимптотического метода малых λ для относительно малой толщины найдена функция, характеризующая вертикальные перемещения берегов трещины. Найденные зависимости позволяют оценить влияние начальных напряжений на напряженно деформированное состояние слоя, а также на величину коэффициента интенсивности нормальных напряжений в вершине трещины и сравнить полученные результаты с классическими решениями задач для бесконечной плоскости.
4. Для промежуточных толщин слоя при помощи модифицированного метода Мультоппа-Каландия получены численные решения задач. Это дает возможность сравнить результаты вычислений с аналитическими решениями и изучить влияние начального нагружения на стыковку асимптотических решений.

Результаты данного исследования, помимо решения аналогичных задач с упругими потенциалами иного вида, могут быть использованы при расчете инженерных сооружений, строительных конструкций (балок и перекрытий), а также различных резинометаллических изделий.

Достоверность результатов

Достоверность теоретических результатов обеспечивается строгостью постановки задачи и обоснованностью используемых методов решения. Также проведено сравнение полученных автором решений с известными опубликованными решениями.

Апробация работы

Основные результаты диссертации докладывались и обсуждались: на научной конференции «Ломоносовские чтения» (2008 г., Москва); на XIV международной конференции «Современные проблемы механики сплошной среды» (2010 г., Ростов-на-Дону, Азов); на Международном научном симпозиуме по проблемам механики деформируемых тел, посвященному 100-летию со дня рождения А. А. Ильюшина (2011 г., Москва); на научно-исследовательском семинаре кафедры теории пластичности МГУ им. М. В. Ломоносова (под рук. профессоров В. М. Александрова, Е. В. Ломакина), на научно-исследовательском семинаре кафедры теории упругости МГУ им. М. В. Ломоносова (под рук. профессора И. А. Кийко), на научно-исследовательском семинаре кафедры механики композитов МГУ им. М. В. Ломоносова (под рук. профессора Б. Е. Победри).

Основные результаты диссертации представлены в 6 публикациях, список которых приводится в конце автореферата. Постановка задач выполнена научным руководителем, личный вклад автора состоит в сведении задач к решению интегральных уравнений, применению асимптотических и численных методов решения, получению численных результатов.

Объем и структура диссертации

Диссертационная работа состоит из введения, трех глав, заключения, приложения и списка цитируемой литературы, содержащего 105 наименований. Общий объем диссертации составляет 125 страниц, включая 12 таблиц и 52 рисунка.

Во *введении* приводится обзор литературы по методам решения смешанных задач теории упругости и основных работ по исследованию напряженно деформированного состояния тел с начальными (остаточными) напряжениями; обоснована актуальность темы диссертационной работы; сформулированы цели настоящего исследования.

В *первой главе* представлены основные соотношения нелинейной теории упругости применительно к изотропным упругим телам: уравнения равновесия и граничные условия

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\left[S^{in}\left(\delta_{nj}+\frac{\partial u_j}{\partial x_n}\right)\right]=0$$

$$S^{in}\left(\delta_{nj}+\frac{\partial u_j}{\partial x_n}\right)n_i=T_j \text{ на части поверхности } S_1,$$

$$u_i=f_i \text{ на части поверхности } S_2;$$

определяющие соотношения для сжимаемого и несжимаемого тел в общем виде

$$S^{ij}=\delta_{ij}\frac{\partial\Phi}{\partial A_1}+2\varepsilon_{ij}\frac{\partial\Phi}{\partial A_2}+3\varepsilon_{ik}\varepsilon_{kj}\frac{\partial\Phi}{\partial A_3},$$

$$S^{ij}=pg_*^{ij}+\delta_{ij}\frac{\partial W}{\partial A_1}+2\varepsilon_{ij}\frac{\partial W}{\partial A_2};$$

где A_1, A_2, A_3 – алгебраические инварианты тензора деформаций, и, наконец, структура упругих потенциалов, исследуемых в диссертации (потенциал гармонического типа и потенциал Муни соответственно)

$$\Phi=\frac{1}{2}\lambda s_1^2+\mu s_2,\ s_1=\delta_1+\delta_2+\delta_3,\ s_2=\delta_1^2+\delta_2^2+\delta_3^2,\ s_3=\delta_1^3+\delta_2^3+\delta_3^3,$$

$$\delta_n=\lambda_n-1=\sqrt{1+2\varepsilon_n}-1$$

$$\Phi=c_{10}(I_1-3)+c_{01}(I_2-3),$$

$$I_1=3+2\varepsilon_{nn},\ I_2=3+4\varepsilon_{nn}+2(\varepsilon_{nn}\varepsilon_{mm}-\varepsilon_{nm}\varepsilon_{nm}),\ I_3=g^*/g\equiv\det\left\|\delta_{ij}+2\varepsilon_{ij}\right\|$$

Во втором параграфе главы изложены основные соотношения линеаризованной теории упругости. Для случая однородного начального плоского деформированного состояния получены дифференциальные уравнения равновесия в возмущениях: изотропный сжимаемый материал

$$\alpha^2 b_1\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+b_2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\alpha\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}=0,\quad b_1\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\alpha^2 b_2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\alpha\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=0$$

$$b_1=\frac{(1+\alpha)(\beta+2)}{(1+\alpha)\beta+2},\qquad b_2=b_1-1,\quad \alpha=\frac{\lambda_1}{\lambda_2},\qquad \beta=\frac{\lambda}{\mu} \qquad \textbf{(1)}$$

изотропный несжимаемый материал

$$\mu\Delta u-s\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial\hat q}{\partial x}=0,\quad \mu\Delta v-s\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{\partial\hat q}{\partial y}=0,\quad \frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0, \qquad \textbf{(2)}$$

Во *второй* главе рассмотрены плоские контактные задачи для бесконечного слоя, предварительно нагруженного растягивающими (сжимающими) усилиями, приложенными на бесконечности и направленными вдоль граней слоя. Таким образом, создается однородное начальное состояние. В дальнейшем исследуются два вида граничных условий: 1) слой, лежащий без трения на жестком основании; 2) слой с закрепленной (приклеенной) нижней гранью.

Возмущения создаются путем приложения дополнительной нагрузки на верхней грани слоя посредством жесткого гладкого штампа. Возникающие при этом дополнительные перемещения считаются малыми, что позволяет линеаризовать задачу на фоне начального напряженного состояния и рассматривать постановку в дополнительных перемещениях (1)-(2).

Граничные условия, соответствующие предложенным выше постановкам, имеют вид

Слой, лежащий без трения на жестком основании	Слой с закрепленной (приклеенной) нижней гранью
$y=0:\ v=0,\ \tau_{yx}=0$	$y=0:\ u=0,\ v=0$
$y=h:\ \tau_{yx}=0,\ \ \sigma_y=0\ \ (\lvert x\rvert>a),$	$y=h:\ \tau_{yx}=0,\ \ \sigma_y=0\ \ (\lvert x\rvert>a),$
$v=-[\delta+\omega x+f(x)]$ при $\lvert x\rvert\le a$	$v=-[\delta+\omega x+f(x)]$ при $\lvert x\rvert\le a$

В работе А. Н. Гузя показано, что решение задачи для сжимаемого изотропного материала с потенциалом гармонического типа можно искать в виде

$$u=-\frac{\partial^2\chi}{\partial x\partial y},\ \ v=\left(b_1\alpha\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{b_2}{\alpha}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\chi$$

В этом случае первое уравнение из (1) удовлетворяется тождественно, а второе приводится к форме

$$\left(\alpha^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)^2\chi=0$$

Далее при помощи интегрального преобразования Фурье задача сводится к решению интегрального уравнения первого рода с нерегулярным разностным ядром относительно неизвестной функции, характеризующей давление в контактной области. После введения безразмерных величин оно преобразуется к виду

$$\int_{-1}^{1} q(\xi) K\left(\frac{\xi - x}{\varepsilon}\right) d\xi = \pi g(x), \quad |x| \le 1, \quad K(t) = \int_{0}^{\infty} \frac{L(u)}{u} \cos(ut) du,$$

причем структура уравнения совпадает со структурой соответствующих уравнений классической теории упругости. Однако символ ядра уравнения существенным образом зависит от параметров начального нагружения.

В зависимости от величины безразмерного параметра ε, определяющего относительную толщину слоя, строятся асимптотические решения интегрального уравнения при помощи методов «больших и малых λ». Дополнительно для промежуточных значений ε получено приближённое численное решение задачи при помощи модифицированного метода Мультоппа-Каландии. Также получены соотношения для определения контактного давления и момента при взаимодействии с плоским наклонным штампом.

Проведен расчет контактных давлений и моментов при различных значениях параметров начального нагружения и относительных толщин слоя. Общий вид зависимости интегральных характеристик и влияние начальных нагрузок приведено на рис. 1-2.

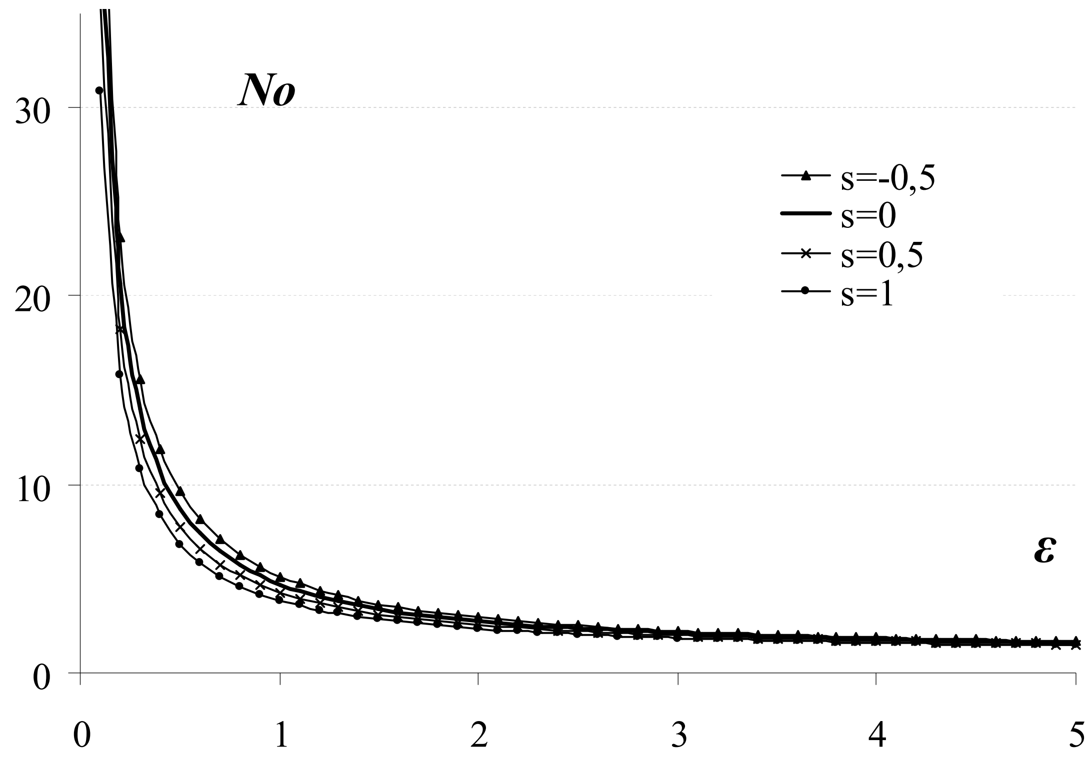

Рис. 1 Контактное давление при различных значениях начального нагружения ($s > 0$ соответствует начальному растяжению, $s < 0$ – сжатию)

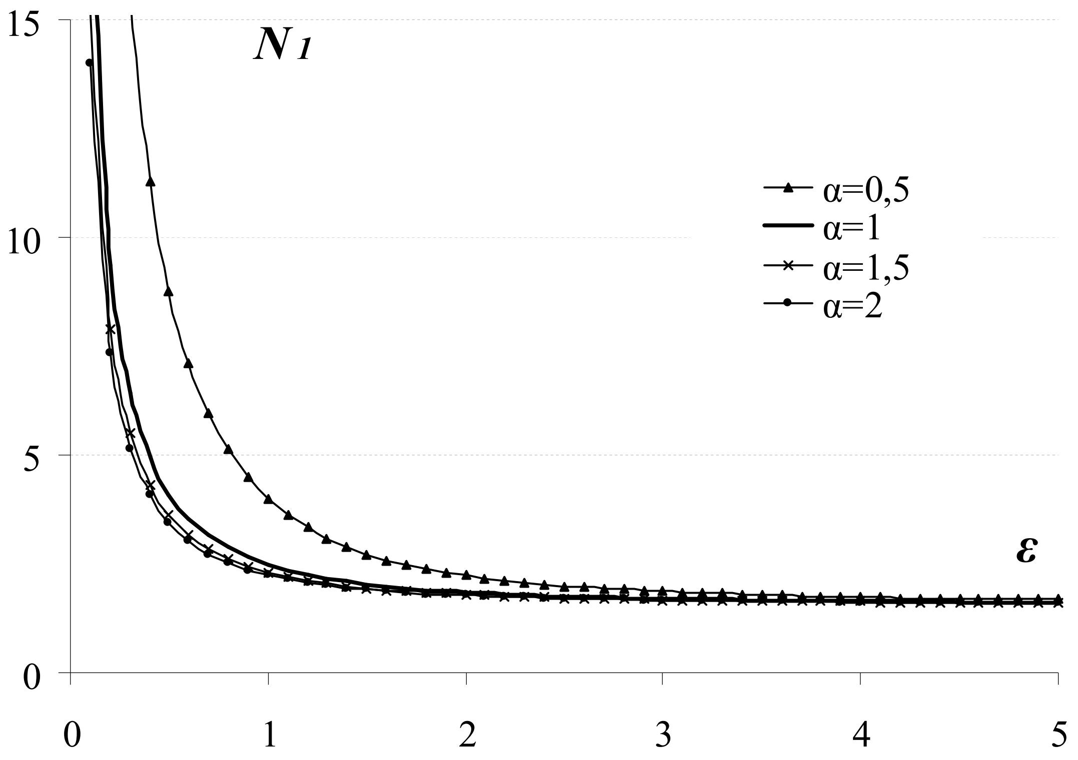

Рис. 2 Момент вдавливающей силы при различных значениях начального нагружения (пунктирная линия – слой без начального нагружения)

В *третьей* главе рассмотрены плоские задачи для бесконечного слоя, содержащего продольную трещину. Слой подвергается предварительному нагружению растягивающими усилиями, приложенными на бесконечности и направленными вдоль граней слоя. Таким образом, создается однородное начальное состояние. В дальнейшем исследуются три вида граничных условий: 1) слой со скользящей заделкой граней; 2) слой с закрепленными гранями; 3) слой со свободными гранями.

Возмущения создаются путем приложения дополнительной равномерно распределенной нормальной нагрузки к берегам трещины. Возникающие при этом дополнительные перемещения считаются малыми, что позволяет линеаризовать задачу на фоне начального напряженного состояния и рассматривать постановку в дополнительных перемещениях (1)-(2).

При помощи техники интегрального преобразования Фурье задача сводится к решению интегрального уравнения первого рода с нерегулярным разностным ядром относительно неизвестной функции, характеризующей наклон берегов трещины по отношению к продольной оси. После введения безразмерных величин оно преобразуется к виду

$$\int_{-1}^{1} \varphi(\xi) K\left(\frac{\xi - x}{\varepsilon}\right) d\xi = -\pi\varepsilon\, q, \quad |x| \le 1, \quad K(t) = \int_{0}^{\infty} L(u)\sin(ut)\, du\,.$$

причем по форме оно совпадает с соответствующим уравнением классической теории упругости, а символ ядра уравнения существенным образом зависит от параметров начального нагружения.

В зависимости от величины безразмерного параметра ε, определяющего относительную толщину слоя, строятся асимптотические решения интегрального уравнения при помощи методов «больших и малых λ». Дополнительно для промежуточных значений ε получено приближённое численное решение задачи при помощи модифицированного метода Мультоппа-Каландии. Также получены соотношения для определения величины коэффициента интенсивности напряжений в вершине трещины.

Проведен численный расчет для различных значений параметров начального нагружения и относительных толщин слоя. Общий вид зависимости коэффициента интенсивности от относительной толщины слоя и влияние начальных нагрузок приведено на рис. 3-4.

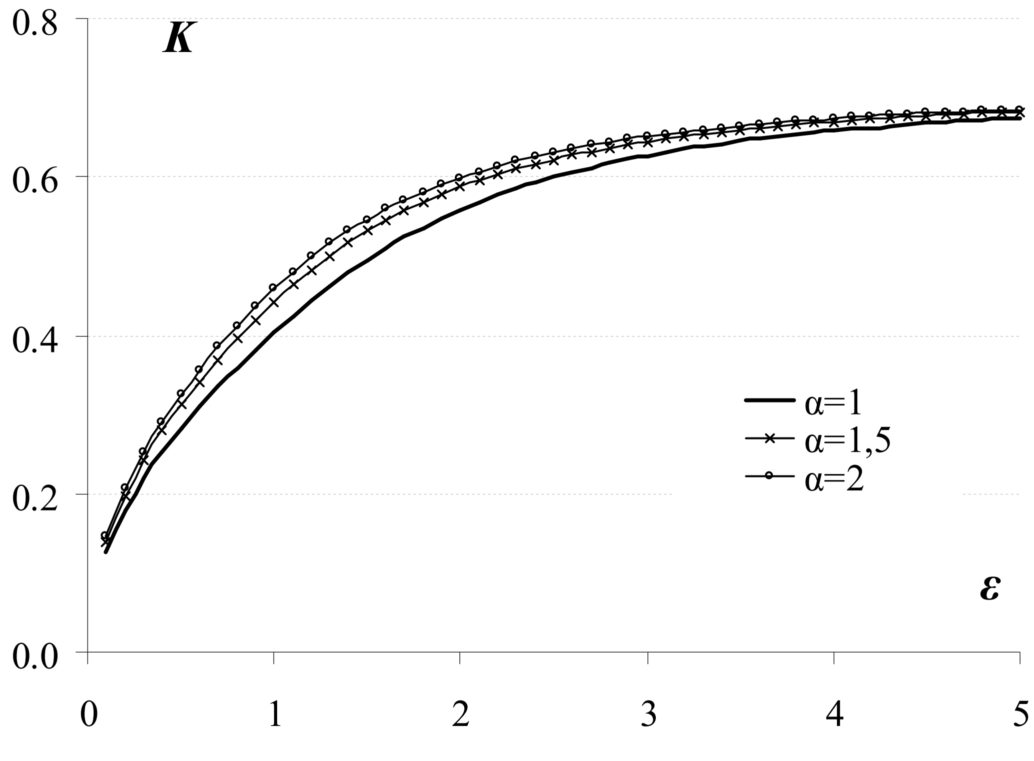

Рис. 3 Коэффициент интенсивности нормальных напряжений при скользящей и жесткой заделке граней слоя

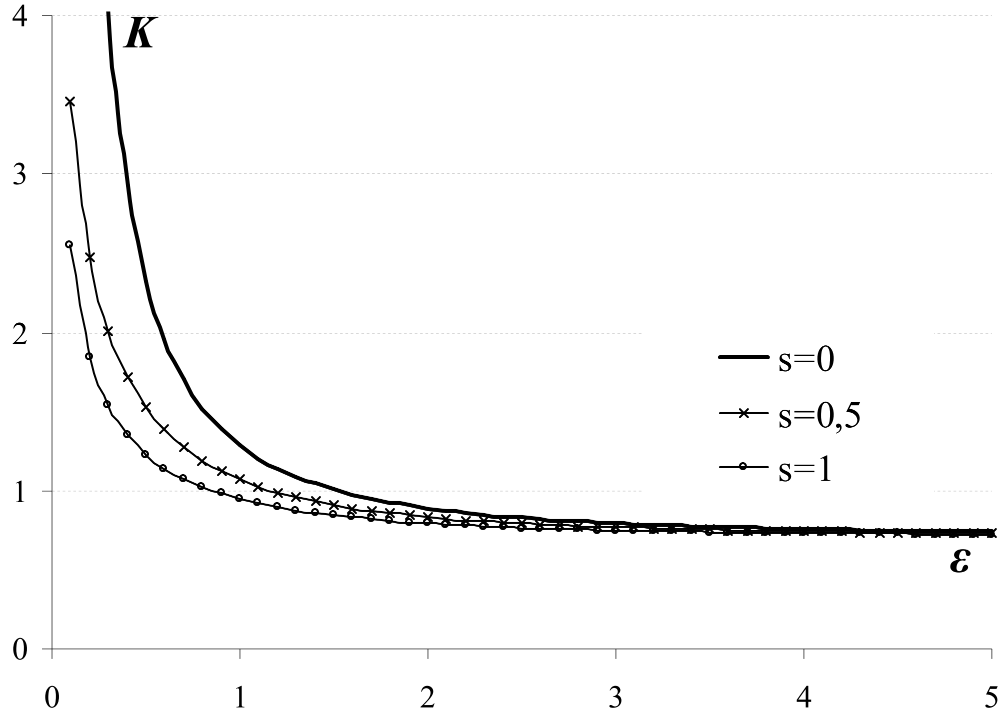

Рис. 4 Коэффициент интенсивности нормальных напряжений в случае свободных граней слоя

В *приложении* в таблицах представлены результаты численного расчета контактного давления, момента вдавливающей силы (для контактных задач) и коэффициента интенсивности нормальных напряжений в вершине трещины на ее продолжении при различных величинах начальной нагрузки и относительной толщины слоя.

Основные результаты и выводы

1. В работе изучены плоские задачи для упругого преднапряженного слоя из сжимаемого и несжимаемого материалов с упругими потенциалами конкретного вида (потенциал гармонического типа для сжимаемого материала и потенциал Муни для несжимаемого), включающие в себя постановки следующих типов:

а) контактная задача для слоя, закрепленного по нижней грани;

б) контактная задача для слоя, опирающегося без трения на жесткое основание;

в) задача о продольной трещине в слое с жестко закрепленными гранями;

г) задача о продольной трещине со скользящей заделкой граней;

д) задача о продольной трещине со свободными гранями.

2. Изучен характер особенности вблизи точек смены граничных условий. Построены аналитические асимптотические решения для ранее не исследованных задач по методу больших и малых λ. Для промежуточных значений относительных толщин получены приближенные численные решения при помощи модифицированного метода Мультоппа-Каландии.

3. Решен ряд конкретных примеров в случае различных значений параметров начального нагружения, позволяющий получить представление об общем характере зависимости напряженно-деформированного состояния от начального нагружения.

Анализируя численные результаты, можно сделать вывод, что для контактных задач наличие начальных растягивающих напряжений приводит к снижению контактных давлений, обеспечивающих внедрение штампа на заданную глубину, и, наоборот, начальное сжатие слоя приводит к их увеличению.

В случае слоя с закрепленными гранями, ослабленного продольной трещиной, начальные напряжения приводят к росту концентраций напряжений вблизи кончика трещины. Тогда как характер распределения напряжений в слое со свободными гранями совершенно иной. Здесь предварительное растяжение приводит к снижению коэффициентов интенсивности напряжений.

Необходимо отметить, что для сжимаемого и несжимаемаого материалов не наблюдается принципиальных различий в характере зависимости напряженно-деформированного состояния от начального нагружения.

Список цитируемой литературы

1. Griffith A. A. The phenomenon of rupture and flow in solids, Phil. Trans. Roy. Soc. A221. 1920, pp. 163-198.
2. Гузь А. Н. Механика хрупкого разрушения материалов с начальными напряжениями. Киев: Наукова думка, 1983. 296 с.
3. Гузь А. Н. Упругие волны в телах с начальными напряжениями. Т. 1. Общие вопросы. Киев: Наук. думка. 1986. 280 с.
4. Гузь А. Н. Упругие волны в телах с начальными напряжениями. Т. 2. Закономерности распространения. Киев: Наук. думка. 1986. 536 с.
5. Гузь А. Н. Устойчивость трехмерных деформируемых тел. Киев: Наук. думка. 1971. 276 с.

6. Гузь А. Н., Рудницкий В. Б. Основы контактного взаимодействия упругих тел с начальными (остаточными) напряжениями. Хмельницкий. 2006. 710 с.
7. Лурье А. И. Нелинейная теория упругости. Наука, 1980.

Список публикаций по теме диссертации

1. Александров В. М., Костырева Л. А. Плоская контактная задача для преднапряженного несжимаемого упругого слоя // ПММ, 2009. Т. 73. Вып. 6. С. 977-982.
2. Костырева Л. А. Плоская контактная задача и задача о трещине для преднапряженного упругого слоя // Экологический вестник научных центров ЧЭС, 2009, № 3, с. 56-63.
3. Костырева Л. А. Продольная трещина в преднапряженном физически нелинейном упругом слое со свободными гранями // ПММ. 2009. Т. 74. Вып. 6. С. 1068-1072.
4. Александров В. М., Костырева Л. А. Плоская контактная задача для преднапряженного упругого слоя // Ломоносовские чтения. Тезисы докладов научной конференции. – М.: Изд-во Московского университета, 2008.– С. 19.
5. Александров В. М., Костырева Л. А. Об одном интегральном уравнении, встречающемся в ряде задач механики контактных взаимодействий // Современные проблемы механики сплошной среды. Научная конференция. Тезисы докладов. – Ростов-на-Дону, Изд-во ЮФУ, 2010. – С. 8.
6. Александров В. М., Костырева Л. А. Продольная трещина в преднапряженном несжимаемом упругом слое с шарнирно опертыми гранями // Сб. «Упругость и неупругость». М.: Издательство Московского университета, 2011. С.287-291.