

*На правах рукописи*

**Краснова Полина Андреевна**

**Аналитическая модель разрушения хрупких материалов  
при интенсивном локальном нагреве**

01.02.04 — Механика твердого деформируемого тела

**Автореферат**

диссертации на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

**Москва — 2011**

Работа выполнена на кафедре пластичности механико-математического  
Московской Государственной Университета им. М. В. Ломоносова.

**Научный руководитель**

кандидат физико-математических наук,  
доцент

**Юмашев Михаил Владиславович**

**Официальные оппоненты**

доктор физико-математических наук,  
профессор

**Георгиевский Дмитрий Владимирович**

кандидат физико-математических наук,  
старший научный сотрудник

**Брыкин Михаил Владимирович**

**Ведущая организация**

Учреждение Российской академии наук  
Институт проблем механики  
им. А.Ю. Ишлинского РАН

Защита состоится года в 17 июня 2011 года в 16:00 ч. на заседании  
диссертационного совета Д 501.001.91 при Московском государственном  
университете им. М. В. Ломоносова по адресу: 119992, ГСП-2,  
Москва, Ленинские горы.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке  
механико-математического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова  
(Главное здание, 14 этаж).

С авторефератом диссертации можно ознакомиться на сайте  
<http://mech.math.msu.su/>.

Автореферат разослан «16» мая 2011 года.

Ученый секретарь Диссертационного Совета  
доктор физико-математических наук,  
профессор

С. В. Шешенин

# Общая характеристика работы

## Объект исследования и актуальность темы

Объектом исследования данной работы являются хрупкие материалы, подверженные быстрому локальному нагреву. Такое воздействие на образец — необходимая составляющая многих современных технологий. В качестве примеров можно привести обработку поверхностных слоев лазерным лучом с целью повышения износостойкости; лазерную резку элементов конструкций; пробивание технологических отверстий. При этом, характерные размеры элементов конструкций и зон теплового воздействия луча лазера варьируются от десятков сантиметров (поверхностная упрочняющая обработка тормозных дисков лазерным лучом) до микронного размера (технологические отверстия в керамических подложках для крепления электронных микросхем). Во всех этих случаях возникает ситуация быстрого локального нагрева материала, чреватая побочными необратимыми эффектами. Во-первых, сильный локальный нагрев приводит к большим градиентам температур и, как следствие, к большим термомеханическим напряжениям. Температурные напряжения при быстром нагреве могут вызывать внутреннее растрескивание, которое приводит к существенной деградации механических свойств элемента конструкции. Во-вторых, в зоне нагрева возможно возникновение остаточных напряжений, которые при остывании могут привести к растрескиванию поверхностных слоев. В-третьих, остаточные пластические деформации могут привести к значительным искажениям формы элемента конструкции. Все эти явления способны спровоцировать, например, повышенный износ материала. Изучение этих вопросов чрезвычайно актуально для оценки возможности разрушения конструкций при лазерном нагреве в условиях локального очага повышенной температуры.

**Цель диссертационной работы** — теоретическое описание разрушения хрупких материалов под воздействием больших градиентов температур. Для этого потребовалось решить следующие подзадачи:

- распространить приближенный метод решения уравнения теплопроводности на случаи кусочно-постоянных и нелинейных свойств материала;
- построить, исходя из найденного распределения температуры,

поле напряжений, проанализировать возможность возникновения разрушения, в том числе пластического течения, в зоне нагрева;

- построить модель разрушения хрупкого материала, подверженного интенсивному тепловому воздействию;
- выбрать способы подавления максимальных напряжений.

**Научная новизна** полученных результатов в первую очередь связана с формулировкой новой важной для фундаментальной науки математической модели термомеханического поведения хрупкого материала, проявляющего пластические свойства в зоне нагрева. В ходе работы были получены следующие новые научные результаты.

1. Разработан приближенный метод решения нелинейного уравнения теплопроводности для однородного материала и материала с кусочно-постоянными свойствами.
2. Сформулирована и реализована модель разрушения хрупких материалов, основанная на концепции фронта разрушения, с учетом нелинейных теплофизических свойств для бруса и тонкого бесконечного диска с круговым отверстием.

**Достоверность результатов** обусловлена корректной постановкой задач, применением математически обоснованных методов их решения, сравнением результатов расчетов с результатами, полученными другими методами, а также сравнением с экспериментальными данными. На протяжении нескольких лет в НИИ Механики МГУ проводились эксперименты по лазерному воздействию на образцы из карбида циркония. Результаты этих исследований хорошо коррелируют с результатами данной работы.

### **Научная и практическая ценность**

Для решения задачи температурного разрушения хрупких материалов были последовательно рассмотрены следующие этапы: задача переноса тепла, задача термоупругости и пластичности, задача хрупкого разрушения. Научная и методическая ценность данного

подхода состоит в его самосогласованности и целостности. В частности, анализируется процесс образования и развития зоны разрушения под действием термонапряжений в соответствии с критериями разрушения. Следует отметить, что использованный в работе подход представляет значительную практическую ценность. Так, результаты работы могут быть использованы для инженерных расчетов в промышленной лазерной обработке материалов.

### **Апробация работы**

Результаты работы были частично доложены на «Ломоносовских чтениях» (2007, 2008, 2009); на «Конкурсе молодых ученых» (2007, 2008); на конференции «Проблемы нелинейной механики деформируемого твердого тела» (Пермь, 2008); и доложены в полном объеме на семинарах кафедр теории пластичности, теории упругости, композитных материалов и кафедры волновой и газовой динамики МГУ; на конференциях «Equations of State for Matter» (Elbrus, Kabardino-Balkaria, Russia, 2010), а также на 8-м Российском симпозиуме «Проблемы физики ультракоротких процессов в сильнонеравновесных средах» (Новый Афон, 2010).

Результаты диссертации достаточно полно отражены в шести публикациях:

1. Краснова П.А., Юмашев М.В., Юмашева М.А. Анализ напряженного состояния образца при интенсивном тепловом воздействии с учетом температурной зависимости теплофизических и механических свойств материала // Проблемы нелинейной механики деформируемого твердого тела. 13-15 октября 2008. Пермь, Екатеринбург: УрОРАН, 2008. С.112.
2. Краснова П.А., Юмашев М.В., Юмашева М.А. Оценка остаточных напряжений при остывании образца после интенсивного теплового воздействия // Ломоносовские чтения. Тезисы докладов. М: Издательство МГУ, 2008.
3. Юмашев М.В., Юмашева М.А., Краснова П.А. Необратимые эффекты при лазерном воздействии на поверхность материала // Современные проблемы математики и механики. Прикладные исследования. М.: Издательство МГУ, 2009. Т.1. С.293–310.

4. **Yumashev M.V., Yumasheva M.A., Krasnova P.A. Irreversible effects during thermal treatment of surface of materials // Acta Astronautica. 2009. V.65 P.519–524.**
5. Юмашев М.В., Юмашева М.А., Краснова П.А. Нелинейные эффекты в задаче прожигания отверстия в керамической пластине // Ломоносовские чтения. Тезисы докладов. М: Издательство МГУ, 2009.
6. Юмашев М.В., Юмашева М.А., Краснова П.А. Моделирование процесса нагрева тела при интенсивном тепловом воздействии на поверхность // Вестн. Моск. Ун-та. Сер.1. Математика и механика. 2010. С.44–54.

**Структура диссертации и объем работы.** Диссертация состоит из введения, списка обозначений, списка иллюстраций, четырех глав, заключения и списка литературы. Объем работы составляет 110 печатных страниц и содержит 28 иллюстраций. Список литературы составлен из 88 наименований.

## Содержание работы

**Во введении** обсуждается актуальность темы, указаны цель работы, ее структура, практическая и научная ценность, новизна, изложены основные положения, выносимые на защиту, а также приводятся сведения об апробации работы.

**В обзоре литературы** излагаются результаты исследований других авторов по приближенным методам решения задачи теплопроводности, учитывающие идею конечного теплового фронта, а также по решению задач разрушения от действия теплового потока, которые являются базовыми для данной диссертационной работы.

**Первая глава** посвящена решению задачи переноса тепла в брусе при равномерном нагреве одной из боковых поверхностей образца. Считается, что в теле можно выделить одно направление, вдоль которого происходит изменение температуры. Подробно приводится модификация приближенного метода решения одномерного уравнения теплопроводности А.С. Шестерикова [9]. Основной данного метода является следующее предположение: в нагреваемом теле

условно можно выделить математическую поверхность, разделяющую «нагретую» часть образца, от той части, где температурными изменениями можно пренебречь. Данное предположение используется в работах многих авторов при решении задачи переноса тепла, а также задачи диффузии. К таким работам относятся исследования Баренблатта [1], Бубнова-Галеркина [5], Био [12] и др. Итак, рассмотрим постановку задачи теплопроводности в области с границей  $\Gamma$  в объеме  $V$  (см. [8]). В случае изотропного материала в отсутствии источников тепла в общем виде уравнение теплопроводности выглядит следующим образом ([7]):

$$\operatorname{div} (k \operatorname{grad} \theta) = \rho c \frac{\partial \theta}{\partial \tau},$$

здесь  $k$  – коэффициент теплопроводности,  $\theta$  – температура,  $\rho$  – плотность материала,  $c$  – удельная теплоемкость при постоянном объеме,  $\tau$  – время,  $\Delta$  – оператор Лапласа. На границе  $\Gamma$  могут быть заданы: температура

$$\theta_0 = \theta_0 (P, \tau),$$

где  $P$  – точка границы;  
поток тепла

$$-k \frac{\partial \theta}{\partial \mathbf{n}} = \Phi(P, \tau),$$

где  $\mathbf{n}$  – вектор внутренней нормали границы  $\Gamma$ . В дальнейшем примем стандартное обезразмеривание для всех величин:

$u, v, w$  – безразмерные криволинейные координаты, отнесенные к характерному размеру  $h$ ;

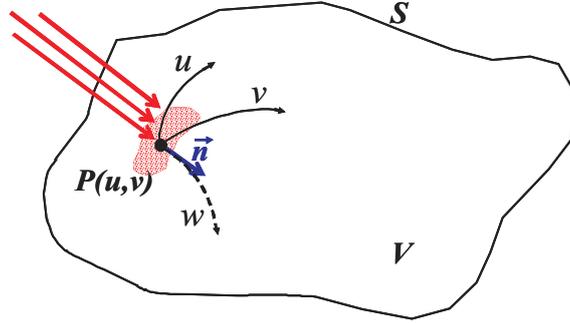
$$t = \tau \frac{1}{h^2} \frac{k}{\rho c} = \tau \frac{k_t}{h^2} \quad \text{— безразмерное время (число Фурье);}$$

$$T = \frac{\theta - \theta^*}{\theta_m - \theta^*} \quad \text{— безразмерная температура;}$$

$$T_0 = \frac{\theta_0 - \theta^*}{\theta_m - \theta^*} \quad \text{— безразмерная температура на границе;}$$

$$q_\Gamma = \frac{\Phi h}{k\theta_m - \theta^*} \quad \text{— безразмерный поток на границе,}$$

где  $\theta_m$  – температура плавления,  $\theta^*$  – температура плавления окружающей среды. Пусть тепло распространяется вдоль направления  $w$  (см. рис. 1).



**Рис. 1.** Тело с объемом  $V$ , ограниченное поверхностью  $S$ , на которой задана криволинейная система координат  $(u, v, w)$ .  $P(u, v)$  – точка на поверхности.

Тогда для определения температурного поля в теле как функции координат и времени необходимо найти решение уравнения

$$L(T) = \frac{\partial}{\partial u} \frac{H_v H_w}{H_u} \frac{\partial T}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial v} \frac{H_u H_w}{H_v} \frac{\partial T}{\partial v} + \frac{\partial}{\partial w} \frac{H_v H_u}{H_w} \frac{\partial T}{\partial w} - \frac{\partial T}{\partial t} (H_u H_v H_w) = 0 \quad (1)$$

с граничным условием

$$T = T_\Gamma \quad \text{при} \quad w = 0 \quad (2)$$

и с начальным условием

$$T = 0 \quad \text{при} \quad t = 0. \quad (3)$$

Здесь  $H_i$  – коэффициенты Ламе,  $i = u, v, w$ .

Пусть  $l = l(t)$  – граница между прогретой и холодной частями тела. При этом на этой поверхности выполняются условия

$$T|_{w=l(t)} = 0, \quad \left. \frac{\partial T}{\partial w} \right|_{w=l(t)} = 0. \quad (4)$$

Решение задачи теплопроводности в зоне прогрева будем искать в виде

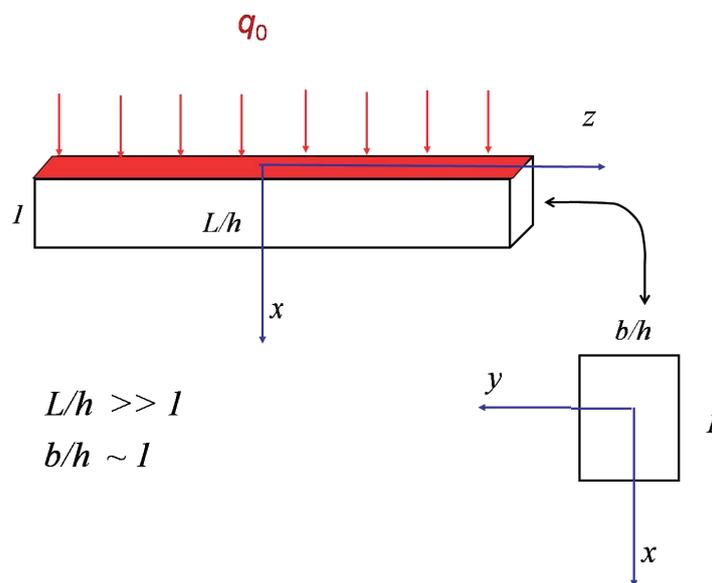
$$T(P, w, t) = \sum A_i(P, t) \varphi_i(w), \quad (5)$$

где  $\varphi_i(w)$  — некоторые базисные функции, определяемые геометрией задачи,  $A_i(P, t)$  определяются из граничных условий. Неизвестную функцию времени  $l(t)$ , определяющую положение безразмерной границы прогретой зоны, будем находить из условия интегрального удовлетворения уравнению по прогретой зоне

$$\iint_S \left\{ \int_0^l (L(T)) dw \right\} dudv = 0, \quad (6)$$

где  $S$  — поверхность тела.

Теперь рассмотрим конкретную задачу о распространении тепла в бруске, на боковой поверхности которого задается постоянная температура  $T_0 = const$ . Принимается декартова система координат, заданная следующим образом: ось  $z$  направлена вдоль образца, ось  $x$  — нормаль к поверхности нагрева (см. рис.2). Безразмерные высота 1 и ширина  $b/h$  малы по сравнению с безразмерной длиной  $L/h$ .



**Рис. 2.** Брус. Линейные размеры  $b$  и  $h$  малы по сравнению с длиной  $L$ . На одной из поверхностей задан поток тепла.

В этом случае уравнение теплопроводности и граничные условия выглядят следующим образом:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{\partial T}{\partial t} \quad (7)$$

$$T|_{x=0} = T_0, \quad (8)$$

$$T|_{x=l} = \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=l} = 0. \quad (9)$$

В качестве базисных функций будем для  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  использовать степенные функции

$$\varphi_0(x) = 1, \quad \varphi_1(x) = x, \quad \varphi_2(x) = x^2. \quad (10)$$

Обоснованием количества базисных функций является анализ точного и приближенных методов из работ [1], [5], [12], описанный в данной работе. С учетом граничных условий получим следующую зависимость для температуры в образце:

$$T = \begin{cases} T_0 \left(1 - \frac{x}{l}\right)^2, & x \leq l; \\ 0, & x > l. \end{cases} \quad (11)$$

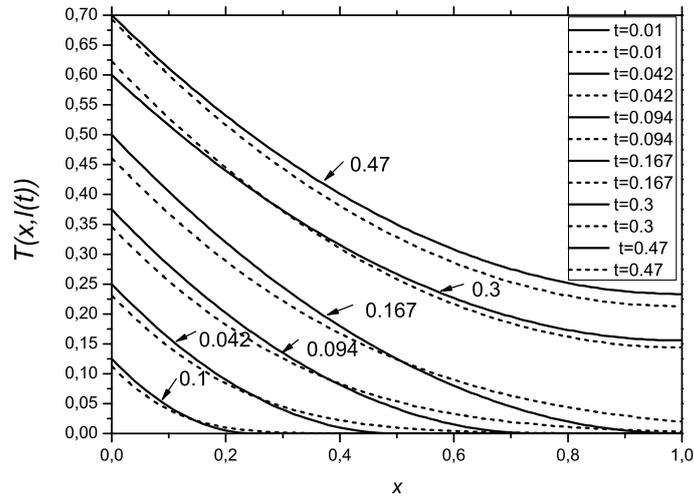
Для неизвестной функции  $l(t)$  после подстановки в интегральное уравнение теплопроводности (6) получаем обыкновенное дифференциальное уравнение

$$l \frac{dl}{dt} = 6, \quad (12)$$

из которого определяем границу температурного фронта как функцию времени

$$l = \sqrt{12t}. \quad (13)$$

В диссертационной работе было рассмотрено другое граничное условие на поверхности нагрева, а именно постоянный тепловой поток  $q = q_0$  при  $x = 0$ . Такой выбор обусловлен тем, что при задании теплового потока можно учитывать параметры эксперимента, например, мощность лазерного воздействия. К тому же равномерное повышение температуры на границе исключает возникновение сингулярности в поле температурных напряжений, речь о которых пойдет в главах 3 и 4. Для такой постановки соотношение для температуры и для положения подвижной границы примут вид:



**Рис. 3.** Распределение температуры в бруске для постоянного потока тепла на границе  $q_0 = 1$  для последовательных моментов времени. Сплошная линия — приближенное решение, пунктирная — точное.

$$T = \begin{cases} \frac{q_0 l}{2} \left(1 - \frac{x}{l}\right)^2, & x \leq l; \\ 0, & x > l; \end{cases} \quad (14)$$

$$l = \sqrt{6t}. \quad (15)$$

На рис. 3 представлено сравнение распределения точного (см. [7]) и приближенного решений задачи теплопроводности для шести моментов времени, когда на граничной поверхности задается постоянный тепловой поток  $q_0$ .

Построенные выше решения использовались для описания результатов экспериментов по лазерному воздействию на различные материалы [2]. В целом расчетные результаты и качественно, и количественно хорошо согласуются с экспериментальными данными. Но есть и некоторые различия. Расчетная температура на нагреваемой поверхности всегда оказывается несколько ниже, чем полученная в экспериментах. Одно из возможных объяснений такого положения вещей может быть связано с предположением, что теплофизические свойства материала приняты независимыми от температуры.

Предположим, что коэффициент теплопроводности линейно убывает с увеличением температуры

$$k = 1 - pT, \quad (16)$$

где  $p$  — безразмерная константа материала. Одномерное нелинейное уравнение теплопроводности для данного случая примет вид:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[ (1 - pT) \frac{\partial T}{\partial x} \right], \quad (17)$$

граничное условие на нагреваемой поверхности

$$-(1 - pT) \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0} = q_0. \quad (18)$$

Применяя приближенный метод для такой постановки, получим следующее соотношение

$$T = \begin{cases} \frac{1 - \sqrt{1 - 2q_0pl}}{2p} \left(1 - \frac{x}{l}\right)^2, & 0 \leq x \leq l; \\ 0, & x > l, \end{cases} \quad (19)$$

которое определяет приближенное решение одномерного нелинейного уравнения теплопроводности. В рамках концепции конечного температурного фронта в работе предлагается приближенное решение задачи распространения тепла для материала с кусочно-постоянной зависимостью коэффициента теплопроводности от пространственной координаты. Рассмотрим материал из двух слоев, определяемых, соответственно, коэффициентами теплопроводности  $k_1$  и  $k_2$ . Тогда, принимая во внимание непрерывность теплового потока внутри образца, должны выполняться следующие граничные условия:

$$T_{21}(x, t)|_{x=0} = T_1(x, t)|_{x=0}, \quad (20)$$

где  $T_1(x, t)$  — распределение температуры для однослойного материала,  $T_{21}(x, t)$  — температура в первом слое двуслойного материала;

$$\frac{\partial T_{21}(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=0} = \frac{\partial T_1(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=0}; \quad (21)$$

условия на подвижной границе

$$T_{22}(x, t)|_{x=l_2} = 0, \quad (22)$$

$$\left. \frac{\partial T_{22}(x, t)}{\partial x} \right|_{x=l_2} = 0, \quad (23)$$

здесь  $T_{22}(x, t)$  - температура во втором слое двухслойного материала, где  $l_2 = l_2(t)$  - граница теплового фронта для двухслойного материала;

условия на границе материалов  $b$

$$\left. \frac{\partial T_{21}(x, t)}{\partial x} \right|_{x=b} = \xi_k \left. \frac{\partial T_{22}(x, t)}{\partial x} \right|_{x=b}, \quad (24)$$

$$T_{21}(x, t)|_{x=b} = T_1(x, t)|_{x=b}, \quad (25)$$

где  $\xi_k$  - отношение коэффициентов теплопроводности для данных материалов ( $\xi_k = \frac{k_2}{k_1}$ ),

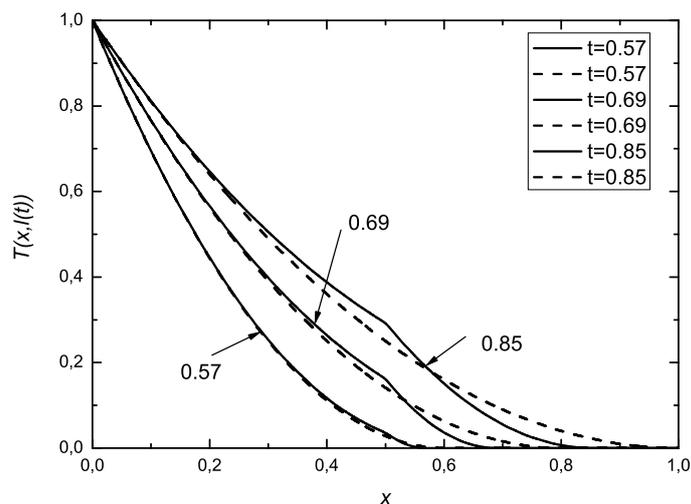
условие сохранения количества тепла

$$\int_0^{l_1} T_1(x, t) dx = \int_0^b T_{21}(x, t) dx + \int_b^{l_2} T_{22}(x, t) dx, \quad (26)$$

где  $l_1 = l_1(t)$  - граница теплового фронта для однородного материала.

Сравнение распределения температуры для однослойного и двухслойного материалов показано на рис. 4.

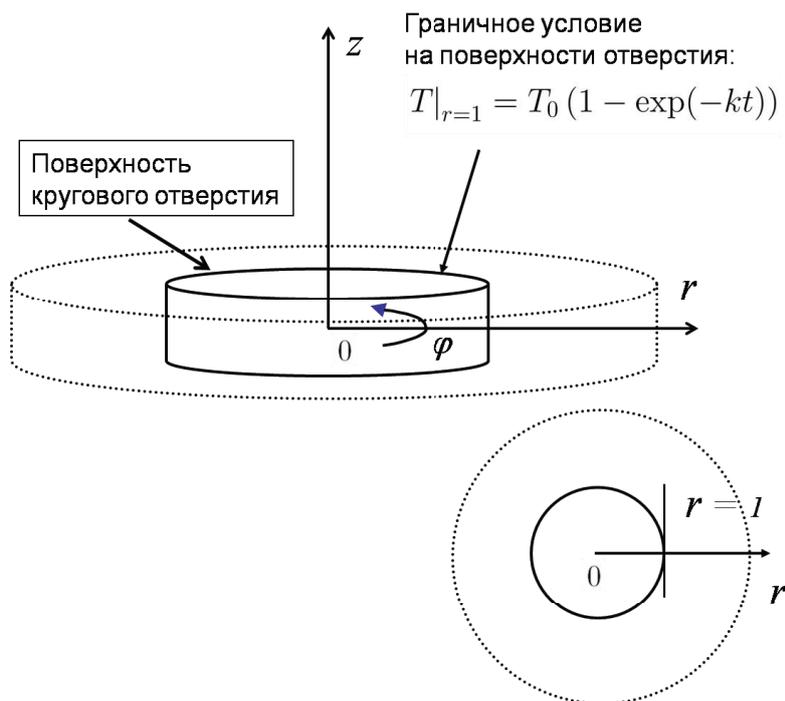
**Во второй главе** подробно описывается построение приближенного решения для диска с круговым отверстием  $r = 1$ . Цилиндрическая система координат задается согласно рис. 5, все величины в дальнейшем - безразмерные. Считается, что на поверхности отверстия задается температура, зависящая от времени  $T_0 = T_0(t)$ . Функция  $T_0(t)$  зависит от параметров нагрева, например, от мощности лазерного пучка. Для расчетов использовалась зависимость  $T_0(t) = \exp(-kt)$ , множитель  $k$  зависит от энергии лазерного излучения. Предполагается, что температура изменяется только вдоль направления оси  $r$ , поэтому зависимость температуры от координаты  $r$  будет аналогична главе 1 (рис. 3). Незначительное отличие будет заключаться в скорости распространения теплового фронта, обусловленное изменением вида уравнения теплопроводности для



**Рис. 4.** Сравнение распределения температуры в двухслойном материале (сплошная) и однослойном материале (пунктир) для трех моментов времени ( $t = 0,57, 0,69, 0,85$ ) с заданной температурой на границе  $T_0 = 1$ .

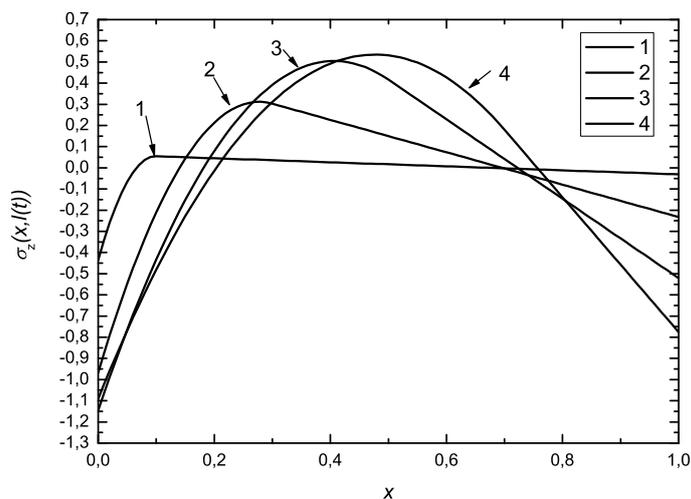
цилиндрической системы координат. Аналогично главе 1 был построен приближенный метод для материала с кусочно-постоянной зависимостью коэффициента теплопроводности от координаты. Как и для бруса, существенным является плавное нагревание поверхности образца, которое обеспечивает отсутствие особенности в окружающих напряжениях. Это обстоятельство является причиной модификации приближенного метода на вышеуказанное граничное условие, отличное от предыдущей работы [2], в которой температура меняется скачкообразно.

**В третьей главе** была построена модель разрушения бруса при интенсивном тепловом воздействии, которая опирается на результаты работы [2]. Рассматривается свободный от нагрузок брус, на одной поверхности которого задается однородное граничное условие по температуре. Длина бруса считается существенно большей, чем его ширина и высота (см. рис. 2). На основе предположений, рассмотренных в работе [3], считается, что имеет место одномерное напряженное состояние, единственной не нулевой компонентой тензора напряжений является  $\sigma_z(x)$ , соответствующая площадкам, перпендикулярным направлению теплового потока. В начале осуществля-



**Рис. 5.** Тонкий диск. Введена цилиндрическая система координат. Ось  $r'$  направлена от геометрического центра. На поверхности кругового отверстия  $r' = a$ , обозначенного красным цветом, задано условие по температуре.

ется анализ напряженного состояния для упругой постановки, полученного аналогично работе [3]. Оказывается, что внутри тела, примерно на границе теплового фронта, возникает максимум растягивающих напряжений  $\max(\sigma_z)$ , которые могут привести к разрушению образца. В тоже время на нагреваемой поверхности достигают существенных значений сжимающие напряжения (см. рис. 6). Учитывая этот факт, требуется рассмотреть пластическое течение образца. Для построения решения в рамках идеальной пластичности рассматривается постепенное увеличение температуры на поверхности, в отличие от скачкообразного изменения температуры, рассмотренного в работе [10]. Такое уточнение играет существенную роль для упруго-пластической модели, т.к. при скачкообразном изменении температуры на поверхности там же возникают бесконечные сжимающие напряжения, которые фактически для любого момента времени превышают предел текучести образца. Таким образом пластическое течение будет возникать при сколь угодно малых температурных воздействиях, что не может соответствовать действительности.



**Рис. 6.** Зависимость напряжения  $\sigma_z$  от  $x$  в балке с заданным на границе тепловым потоком  $q_0 = 1$  для четырех моментов времени: 1 — 0,002, 2 — 0,012, 3 — 0,022, 4 — 0,032.

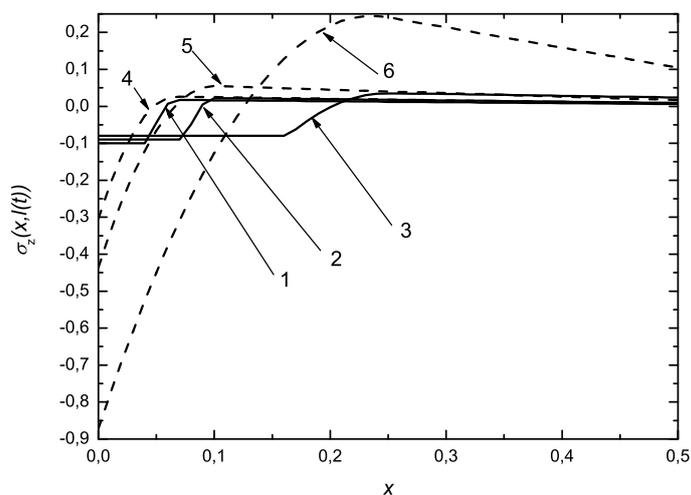
сти. В данной работе этот недостаток устранен. На рис. 7 видно, что учет пластического течения является важным фактором при анализе  $\max(\sigma_z)$  внутри образца.

Все расчеты температурных полей берутся из первой главы. Полученное в первой главе приближенное решение нелинейного уравнения теплопроводности дает возможность учитывать зависимость коэффициента теплопроводности от температуры. Такое уточнение, как видно на рис. 8 существенно отражается на значении  $\max(\sigma_z)$ .

После всестороннего анализа максимальных напряжений строится модель хрупкого разрушения образца, аналогичная [4]. Предполагается, что при достижении  $\max(\sigma_z)$  предела прочности материала на растяжение, внутри образца мгновенно в рамках квазистатики возникает зона «растресканности», в которой напряжения обращаются в нуль (рис. 9).

Границы этой области  $a(t)$  и  $b(t)$  являются функциями времени, расчеты для которых представлены на рис. 10.

С учетом нелинейных свойств материала, который представлен в данной работе, Область разрушения не распространяется мгновенно на весь образец, а локализуется внутри него, в зависимости



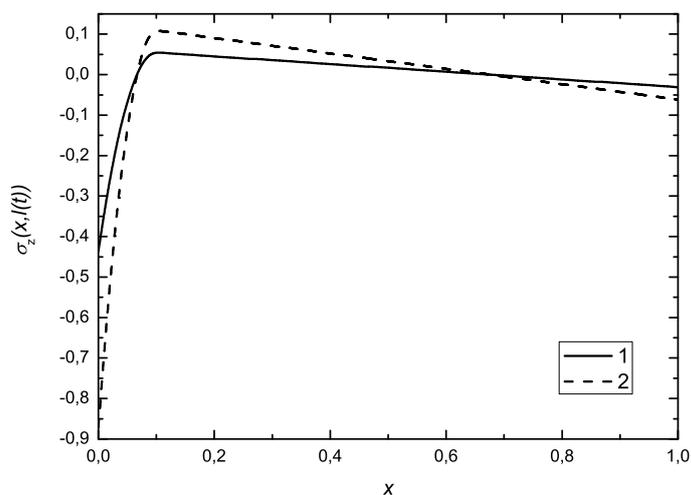
**Рис. 7.** Зависимость напряжения  $\sigma_z$  от  $x$  в брус с постоянным тепловым потоком на границе  $q_0 = 1$  для упругого (пунктир (4–6)) и упруго-пластического (сплошная (1–3)) решений для трех моментов времени: 0,044 (1, 4), 0,075 (2, 5) и 0,165 (3, 6).

от интенсивности воздействия. Этот факт подтверждается экспериментальными работами, проведенными в НИИ Механики МГУ С.А. Шестериковым и его сотрудниками, и является важным для промышленных приложений. Образец, подверженный тепловой обработке может не разрушиться целиком, но утратить свои прочностные свойства за счет внутренних повреждений.

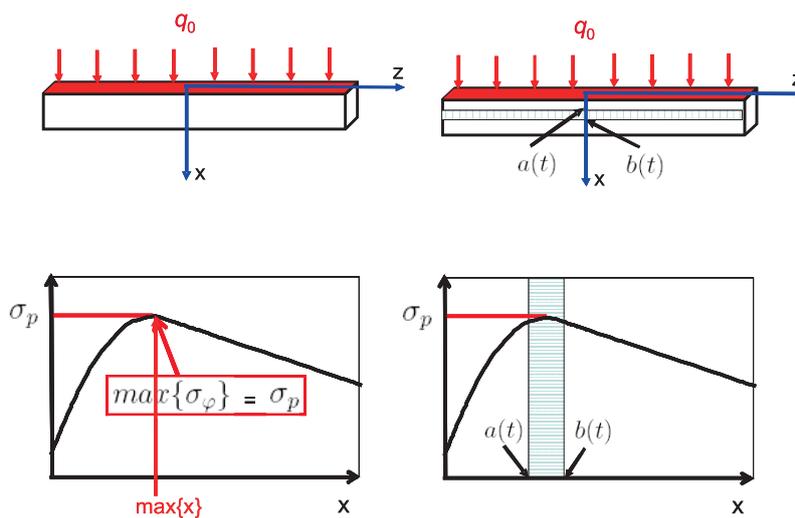
**В четвертой главе** рассматривается разрушение тонкого диска с круговым отверстием под действием теплового потока, с системой координат, заданной на рис. 5.

На поверхности задается температура  $T_0$  и решается уравнение теплопроводности согласно второй главе.

Аналогично работе [3] и третьей главе решается осесимметричная задача для напряжений. Оказывается, что внутри образца могут возникать окружные напряжения  $\sigma_\varphi$ , превышающие предел прочности материала на растяжение. Аналогично главе 3 была построена модель идеальной пластичности, отличающейся от работы [11]. Как и для бруса, внутри диска возникает зона «растресканности», представленная на рис. 12.

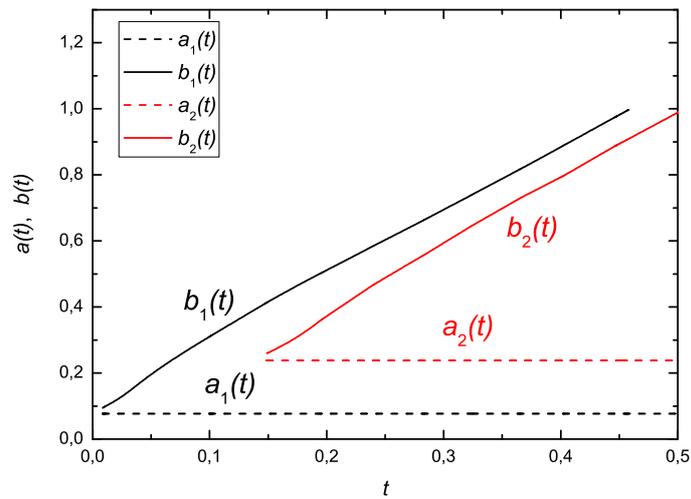


**Рис. 8.** Сравнение зависимости напряжения  $\sigma_z$  от  $x$  в брус с заданным на границе непрерывным тепловым потоком  $q_0 = 1$  с учетом (черная – (1)) и без учета (красная – (2)) зависимости коэффициента теплопроводности от температуры.

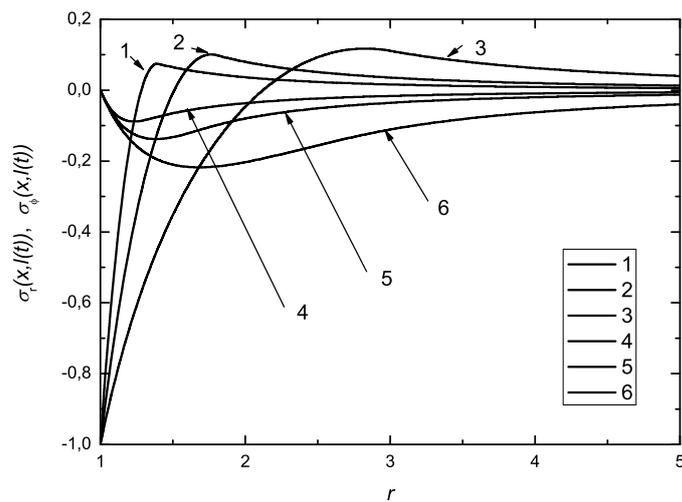


**Рис. 9.** Процесс разрушения балки: слева — брус и распределение напряжений перед образованием зоны разрушения, справа — брус и распределение напряжений после образования зоны растресканности.

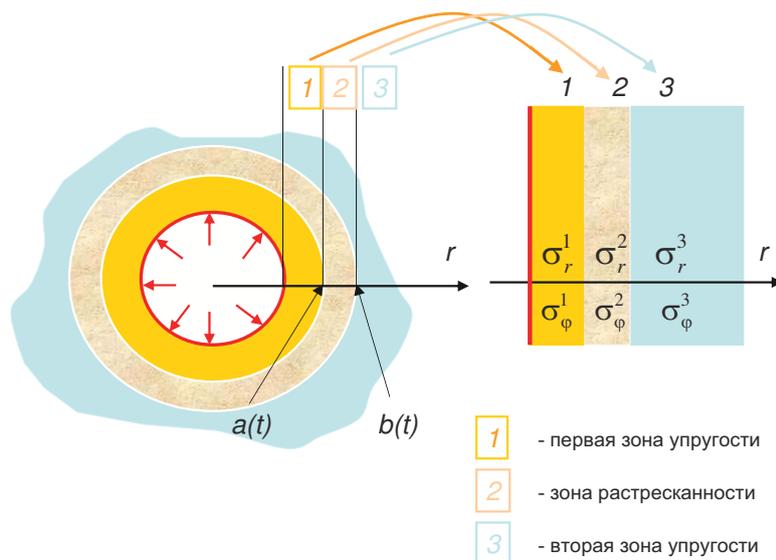
Учитывая предположение о том, что внутри зоны окружающие напряжения обращаются в нуль, можно получить решение задачи с учетом образования и эволюции зоны разрушения, представленное



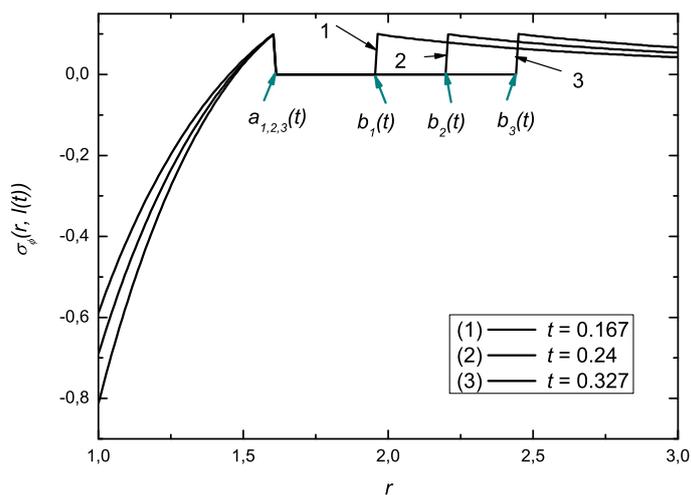
**Рис. 10.** Расположение границ области разрушения  $a(t)$  и  $b(t)$  в брус в зависимости от времени для двух различных безразмерных пределов прочности:  $a_1(t)$  и  $b_1(t)$  для  $\sigma_p = 0,1$ ;  $a_2(t)$  и  $b_2(t)$  для  $\sigma_p = 0,2$ .



**Рис. 11.** Упругое решение для окружных  $\sigma_\varphi$  (1, 3, 5) и радиальных  $\sigma_r$  (2, 4, 6) напряжений в тонком диске для трех моментов времени: 1 — 0,027 (1, 2), 2 — 0,06 (3, 4) и 3 — 0,375 (5, 6).

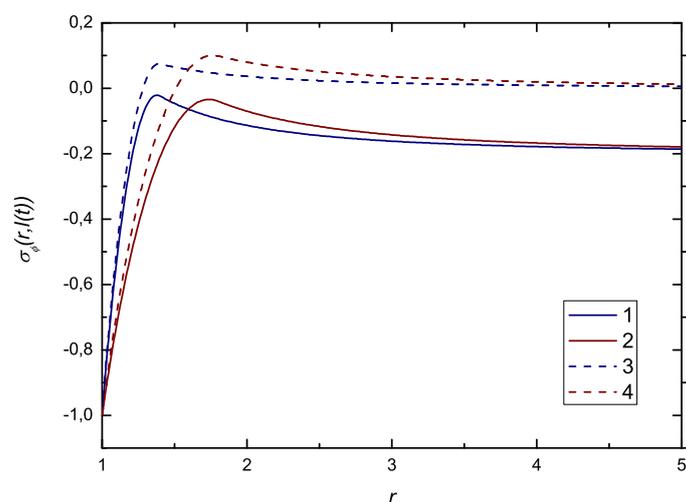


**Рис. 12.** Расположение трех расчетных зон для напряжений в диске с круговым отверстием, на котором задается переменная во времени температура.



**Рис. 13.** Напряжения в диске для трех моментов времени (1 — 0,167, 2 — 0,24, 3 — 0,33) после образования зоны растресканности в области  $a(t) < r < b(t)$ .

на рис. 13. Эта область имеет конечную скорость распространения, что является существенным выводом при анализа процесса разрушения образцов такого типа. Конечная скорость распространения



**Рис. 14.** Сравнение распределения напряжений с учетом дополнительного давления  $\sigma_0$  (сплошная линия) и без учета (пунктирная линия).

зоны разрушения исследуется в работе [6].

В качестве предупреждения возникновения растягивающих напряжений может быть использовано наложение механической нагрузки, противодействующей температурным напряжениям. Для случая диска может быть использовано приложение давления на поверхность отверстия. Изменения напряжений в таком случае представлены на рис. 14.

## Основные положения, выносимые на защиту:

- Приближенный метод решения нелинейного уравнения теплопроводности с использованием идеи конечного теплового фронта, а также приближенный метод решения уравнения теплопроводности для материала с кусочно-постоянными свойствами;
- Реализация модели разрушения хрупких материалов, основанная на концепции фронта разрушения, с учетом нелинейных

теплофизических свойств для бруса и диска с круговым отверстием.

# Литература

- [1] Г.И. Баренблатт *О некоторых приближенных методах в теории одномерной неустановившейся фильтрации в упругом режиме* ИЗВ АН СССР. Отд.тех.наук.1954 №9 С. 108-112
- [2] М. С. Бахарев, Л. М. Миркин, С. А. Шестериков, М. А. Юмашева, *Структура и прочность материалов при лазерном воздействии*, «Издательство Московского университета», М., 1988
- [3] Боли Б., Уэйнер Дж. *Теория температурных напряжений*. М.: Мир, 1964. – 517 с.
- [4] Газуко И.В., Шестериков С.А., Юмашев М.В. *Хрупкое разрушение керамики при изгибе в условиях импульсного нагрева* // Проблемы прочности. 1983. №4. С. 66-70.
- [5] Галёркин Б. Г. *Стержни и пластинки. Ряды в некоторых вопросах упругого равновесия стержней и пластинок.* // Вестник инженеров. — 1915. — Т. 1. — С. 897—908.
- [6] Григорян С.С. *Некоторые вопросы математической теории деформирования и разрушения твердых горных пород*// Прикл. мат и мех.. 1967. Т.31. № 2. С. 643-669.
- [7] Г. Карслоу, Д. Егер, *Теплопроводность твердых тел*, «Наука», М., 1964
- [8] А.В. Лыков *Теория теплопроводности* Высшая школа 1967.599с.
- [9] Шестериков С.А., Юмашева М.А. *Приближенный метод оценки нестационарных температурных полей* //

Сб. "Деформирование и разрушение твердых тел". М.: Изд. МГУ. 1973. №23.С. 15-20.

- [10] С. А. Шестериков, М.В. Юмашев, М.А. Юмашева *Терморазрушение упругого пространства при быстром нагреве* Деформирование и разрушение твердых тел, ИХД. Моск. ун-та. 1985 С. 106-111.
- [11] С. А. Шестериков, М.В. Юмашев, М.А. Юмашева *Хрупкое разрушение диска и сферы при быстром нагреве* Смешанные задачи механики деформируемого тела. Всесоюзн. конференция. Харьков, 1985. С. 108
- [12] М. А. Biot *Generalized Variational Principles for Convective Heat Transfer and Irreversible Thermodynamics* // Journal of Mathematics and Mechanics, Vol. 15, № 2, 1966. p. 177-186