МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

На правах рукописи
УДК 514.154+514.745.4+
+514.763.34+517.938.5

Зотьев Дмитрий Борисович

Симплектические многообразия с контактными особенностями.

01.01.04 — геометрия и топология

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Москва - 2011

Работа выполнена на кафедре дифференциальной геометрии и приложений механико-математического факультета Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова.

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук, профессор Голубятников Владимир Петрович

доктор физико-математических наук, профессор Мищенко Александр Сергеевич

доктор физико-математических наук, член-корреспондент РАН Трещев Дмитрий Валерьевич

Ведущая организация: Казанский (Приволжский) федеральный университет.

Защита диссертации состоится 30 сентября в 16 ч. 45 мин. на заседании диссертационного совета Д.501.001.84 при Московском государственном университете им М.В. Ломоносова по адресу: Российская Федерация, 119991, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д. 1, МГУ имени М.В. Ломоносова, Механико-математический факультет, аудитория 14-08.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Механико-математического факультета МГУ (Главное здание, 14 этаж).

Автореферат разослан 30 августа 2011 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
Д.501.001.84 при МГУ
доктор физико-математических наук,
профессор А.О. Иванов

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ.

Актуальность темы.

Также как и риманова, симплектическая геометрия исходит из предположения о невырожденности тензора структуры, что генетически связано с уравнениями У.Р. Гамильтона в их исходном виде. Широко известны глубокие приложения симплектической геометрии в небесной механике и динамике твердого тела, где фазовые пространства интегрируемых гамильтоновых систем являются симплектическими многообразиями — кокасательными расслоениями или орбитами коприсоединенных представлений[1][2][3]. Однако структурный тензор (замкнутая 2-форма), вообще говоря, вырождается при ограничении на подмногообразие. Последнее может представлять интерес, будучи инвариантным для гамильтоновой системы[4]. Такие подмногообразия действительно встречаются в физических задачах. Разумно предположить, что, по мере возрастания размерностей задач, новые интегрируемые случаи будут чаще встречаться на инвариантных многообразиях (в целом неинтегрируемых систем). Первый из таких случаев в динамике твердого тела[5] был топологически изучен в кандидатской диссертации автора и стал отправной точкой представленной работы.

С другой стороны, с точки зрения математики естественно допустить, что матрица замкнутой 2-формы является невырожденной почти всюду, но вырождается в точках, составляющих подмножество меры ноль. Тогда симплектическая геометрия имеет особенности, о которых почти ничего не известно в случае, когда ранг формы падает на $2k > 2$. Известная статья[6] содержит первое и, возможно, единственное общее исследование подобных структур. Однако, в этой глубокой работе собственно симплектическая геометрия ограничена простейшим, хотя и наиболее важным случаем $k = 1$. Другие исследования, как правило, вращаются

[1] Abraham R., Marsden J.E. *Foundations of mechanics.* Benjamin/Cummings Publishing Company, London, Amsterdam, 1978.

[2] Арнольд В.И. *Математические методы классической механики.* М.: "Наука", 1979.

[3] Фоменко А.Т. *Симплектическая геометрия. Методы и приложения.* М.: "МГУ", 1988.

[4] Пуанкаре А. *Новые методы небесной механики.* Избранные труды, 1 т. М.: "Наука", 1971.

[5] Богоявленский О.И. *Интегрируемые уравнения Эйлера на алгебрах Ли, возникающие в задачах математической физики.* Изв. АН СССР, серия мат. **48** (1984), № 5, 883-938.

[6] Martinet J. *Formes de contact sur les variretres de dimension 3.* in: Proc. Liverpool Singularities Sympos. II, Lecture Notes in Math., 209. Springer, Berlin, 1971, 142–163.

около результатов Мартине и относятся к вырождениям с двумерным ядром[7][8][9]. Во многом это связано с объективной сложностью задачи, т.к., согласно замечанию В.И. Арнольда, *отсутствие условия невырожденности в определении симплектической структуры делает локальную классификацию таких структур необозримой.* Напротив, вырожденные особенности пуассоновских структур сравнительно легко поддаются изучению, поскольку не мешают гамильтоновым полям быть всюду корректно определенными, включая и точки вырождения структурного тензора[10]. Поэтому несмотря на то, что в невырожденном случае симплектические и пуассоновские структуры являются взаимно-определяющими, их вырождения имеют принципиально разные последствия. Ключевым является вопрос о корректной определенности гамильтоновых полей, которому было уделено большое внимание в работах Пневматикоса[11][12][13], где на вырождения замкнутых 2-форм накладывается естественное условие *generiques.* Однако за исключением явно заданных в координатах 2-форм нужного вида, в случае вырождений коранга $2k > 2$ отсутствует способ проверки этого условия. Таким образом, сегодня не существует сколько-нибудь общей теории многообразий с вырожденными особенностями симплектической структуры, при которых размерности ядер формы превышают 2.

В диссертационной работе развита теория симплектических многообразий с особенностями, которые удовлетворяют некоторому условию контактности. Оно является свойством общего положения для замкнутых 2-форм, каждая из которых вырождается в точках гиперповерхности, будучи невырожденной всюду вне ее. Класс несущих на себе такие структуры многообразий, в определенном смысле, включает в себя симплектизации контактных многообразий и аналогичные

[7] Арнольд В.И., Гивенталь А.Б. *Симплектическая геометрия.* Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. М.: ВИНИТИ, **4** (1985), 7-139.

[8] Janeczko S., Kowalczyk A. *On singularities in the degenerated symplectic geometry.* Hokkaido Math. J. **19** (1990), 103-123.

[9] Domitrz W., Janeczko S., Pasternak-Winiarski Z. *Geometry and representations of the singular symplectic forms.* Geometry and topology of caustics - CAUSTICS 02. Banach Center Publ, **62** (2004), 57-71.

[10] Weinstein A. *The local structure of Poisson manifolds.* J. Diff. Geom. **18** (1983), 523–557.

[11] Pnevmatikos S. *Structures hamiltoniennes en presence de contraintes.* C. R. Acad. Sci., Paris, Ser. A-B 289. (1979), № 16, A799-A802.

[12] Pnevmatikos S. *Structures symplectiques singulieres generiques.* Ann. Inst. Fourier. **34** (1984), № 3, 201-218.

[13] Pnevmatikos S., Pliakis D. *Gauge fields with generic singularities.* Math. Phys. Anal. Geom. **3** (2000), № 4, 305-321.

конструкции для локальных алгебр Ли[14]. В связи с этим некоторые результаты данной работы, которая не имеет генетических связей с контактной геометрией, проникают в область исследований ее "вложений" в симплектическую[15][16][17]. Для симплектических многообразий с контактными особенностями оказалось возможным изучить предельное поведение гамильтоновых полей, в контексте задачи непрерывного продолжения с всюду плотного множества $\{\det\omega \neq 0\}$. На этой основе построена теория, которая следует ключевым понятиям и фактам симплектической геометрии[18], включая аналоги теорем Дарбу и Лиувилля. Применительно к контактной геометрии, отсюда возникает понятие интегрируемости по Лиувиллю контактных динамических систем, и имеет место аналогичная теорема. В случае $k = 2$, который не встречается в классической механике, источником физически–содержательных примеров оказалась теория электромагнитного поля в вакууме[19]. Понятие нулевой гиперповерхности, введенное в диссертационной работе, подразумевает постановку новой задачи — об устройстве поля вблизи пространственно-временной границы. Полученные на этом пути, первые результаты имеют ясный физический смысл.

Цели диссертационной работы.

1. Обосновать применимость теории инвариантов Фоменко-Цишанга к интегрируемым системам на многообразиях с особенностями симплектической структуры.

2. Исследовать вопрос о существовании интегралов гамильтоновых систем, связанных с особенностями симплектической структуры.

3. Изучить предельное поведение гамильтоновых полей в точках вырождения симплектической структуры.

4. Найти эффективный критерий корректной определенности гамильтоновых полей, при некоторых ограничениях на способ вырождения симплектической структуры.

5. Для симплектических многообразий с особенностями, удовлетворяющими

[14] Кириллов А.А. *Локальные алгебры Ли.* Успехи мат. наук. **31** (1976), № 4, 57-76.
[15] Gray J.W. *Some global properties of contact structures.* Ann. of Math. **2** (1959), № 69, 421-450.
[16] Eliashberg Y. *On symplectic manifolds with some contact properties.* J. Differential Geometry. **33** (1991), № 1, 233-238.
[17] Etnyre J. *On symplectic fillings.* Algebr. & Geom. Topology. **4** (2004), 73-80.
[18] Fomenko A.T. *Symplectic Geometry. (Second edition).* Gordon and Breach, 1995.
[19] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. *Теория поля.* М.: "Физматгиз", 1962.

введенным ограничениям, доказать аналоги теорем Дарбу и Лиувилля.

6. Найти новые примеры симплектических особенностей в физике, а также физические приложения развитой теории.

Основные методы исследования.

В работе использовались методы симплектической геометрии и гамильтоновой механики, топологии интегрируемых систем и классической теории электромагнитного поля.

Научная новизна.

Все результаты работы, за исключением §§ 1.1, 2.1, 4.1, содержащих справочный материал и историю вопроса, являются новыми и полученными самостоятельно. Основные результаты диссертации, вынесенные на защиту, состоят в следующем.

1. В предметную область теории инвариантов Фоменко-Цишанга включены интегрируемые системы общего положения, заданные на 4-мерных симплектических многообразиях с типичными особенностями (теорема 3 § **2.2**).

2. Найдены условия вырождения симплектических структур, обеспечивающие корректную определенность гамильтоновых полей при некотором естественном, известном ограничении (определение 1 **п. 3.1.2**, теорема 1 **п. 3.1.3**).

3. Найден канонический вид симплектической структуры в окрестности контактной точки (теорема 3 **п. 3.1.4**).

4. Изучено типичное предельное поведение гамильтоновых полей в контактных точках (теорема 6 **п. 3.3.1**).

5. Для интегрируемых систем, заданных на многообразиях с контактными особенностями, доказан аналог теоремы Лиувилля (теорема 7 **п. 3.3.2**)

6. Изучена геометрия электромагнитного поля вблизи контактной точки нулевой гиперповерхности (теорема 1 § **4.2**).

Теоретическая и практическая ценность.

Диссертационная работа имеет теоретический характер. Полученные результаты открывают новое направление исследований в симплектической геометрии и гамильтоновой механике. Они могут иметь приложения в контактной геометрии и теории интегрируемых контактных динамических систем, включая разработку методов явного интегрирования и анализ фазовой топологии.

Результаты диссертации также прилагаемы в электродинамике, где вводятся новые объекты исследования с ясным физическим смыслом. Предлагаемый подход и некоторые формулы могут оказаться полезными для численного моделирования электромагнитных полей вблизи пространственно-временной границы.

Апробация работы.

На протяжении работы (1999 – 2010) все ее промежуточные итоги обсуждались на семинаре А.Т. Фоменко "Современные геометрические методы". Результаты диссертации также докладывались на семинарах кафедры дифференциальной геометрии и приложений МГУ, кафедры общей физики и термоядерного синтеза МЭИ (2008), Института математики СО РАН (2011) и представлялись на следующих конференциях:

1. 8 международная конференция "Устойчивость, управление и динамика твердого тела", ИПММ НАН Украины, г. Донецк, 2002г.,

2. Международная юбилейная конференция "Классические задачи динамики твердого тела", ИПММ НАН Украины, г. Донецк, 2004г.,

3. Международная топологическая конференция "Александровские чтения", г. Москва, МГУ, 2006г.

Публикации.

Результаты диссертации публикованы в 9 статьях в ведущих рецензируемых научных журналах и изданиях из перечня ВАК, написанных без соавторов, список которых приведен в конце автореферата.

Структура диссертации.

Объем диссертационной работы составляет 218 страниц, включая 14 рисунков. Она состоит из общей характеристики и четырех глав основного текста. Теоремы и другие утверждения нумеруются внутри каждой главы, независимо от других глав. В автореферате сохраняется нумерация из текста.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ.

Глава 1 является вводной.

В § **1.1** приводятся основные понятия и факты из симплектической и контактной геометрий. В § **1.2** определяется исходный предмет исследования.

Определение 1 *Пусть M есть многообразие с замкнутой 2-формой ω, вырождающейся в точках подмножества Θ меры ноль в M. Тогда M называется симплектическим многообразием с особенностью. Если $x \in M$ и $rk(\omega_x) < \dim(M)$, то точка x называется особой.*

В дальнейшем M или M^{2n} есть симплектическое многообразие с особенностью, подмножество Θ состоит из тех точек $x \in M$, в которых $\det \omega_x = 0$, и нулевое подпространство (ядро) формы ω_x обозначается $\mathcal{Z}_x$. Если $x \in \Theta$, то подпространство $\mathcal{Z}_x$ имеет размерность $2k$, где $k \geq 1$.

Доказано, что на любом четно-мерном многообразии существует замкнутая и почти всюду невырожденная 2-форма (теорема 3). На многообразиях с симплектической или почти симплектической структурой изучено типичное предельное поведение гамильтоновых полей в точках вырождения с двумерным ядром. Оно состоит в том, что в точке $x \in \Theta$ модуль вектора $sgrad(f)$ обращается в ∞, но на прямой $\mathcal{Z}_x \cap T_x f^{-1}(f(x))$ однозначно определено его предельное направление или пара противоположных предельных направлений (теорема 4, следствие 1).

Множество Θ инвариантно относительно любого потока $sgrad(H)$, корректно определенного на M. Возникает естественный вопрос: в каком случае подмногообразие Θ является поверхностью уровня некоторого интеграла такого потока ? В § **1.3** рассмотрен практически важный случай, когда (M, ω) возникает в виде $sgrad(H)$ – инвариантного подмногообразия в некотором симплектическом многообразии (N, Ω), где $\omega = \Omega|_M$ и H есть некоторый гамильтониан на N. Тогда поле $sgrad(H|_M)$ корректно определено на M, и определитель матрицы Пуассона набора функций, задающих вложение $M \subset N$, обращается в ноль на множестве $\Theta \subset M$. Найдено необходимое и достаточное условие того, чтобы вышеуказанный определитель был интегралом гамильтоновой системы $sgrad(H|_M)$ (теорема 5). Такие ситуации нередко встречаются в динамике твердого тела[20,21], когда M является поверхностью уровня пары функций F_1 и F_2 на N (§ **2.3**). Тогда искомый интеграл равен объемлющей скобке $\{F_1, F_2\}$, ограниченной на подмногообразие M.

В качестве приложения теоремы 5 доказано существование интеграла на M в том случае, когда подмногообразие $M \subset N$ состоит из критических точек гамильтониана

[20] Kharlamov M.P. *Bifurcation diagrams of the Kowalevski top in two constant fields.* Regular & chaotic dynamics. **10** (2005), № 4, 381-398.

[21] Kovalev A.M. *Invariant and integral manifolds of dynamical systems and the problem of integration of the Euler-Poisson equations.* Regular & chaotic dynamics. **9** (2004), № 1, 59-72.

$H : N \to \mathbb{R}$ и является невырожденным в боттовском смысле (предложение 5).

Глава 2 посвящена вопросу о включении интегрируемых систем с симплектическими особенностями в предметную область теории А.Т. Фоменко — топологическая классификация интегрируемых гамильтоновых систем.

В § **2.1** кратко изложена теория топологических инвариантов Фоменко-Цишанга интегрируемых систем с двумя степенями свободы[22][23]. Такие инварианты изображаются т.н. мечеными молекулами $W^*(Q^3_h)$, которые представляют собой графы с рациональными числовыми метками на ребрах. При этом ребра отвечают непрерывным семействам торов Лиувилля $T^2 \subset Q^3_h$, а вершины — бифуркациям. Инвариант Фоменко-Цишанга взаимно однозначно определяет топологию слоения Лиувилля на изоэнергетическом или другом инвариантном 3-многообразии.

В § **2.3** обоснована применимость данной теории к интегрируемым системам общего положения, заданным на симплектических многообразиях с особенностями.

Предположим, что на симплектическом многообразии с особенностью (M^4, ω) корректно определена нерезонансная, интегрируемая система $sgrad\, H$ с интегралом F, и дано замкнутое, связное, регулярное, ориентированное *изоэнергетическое* подмногообразие $Q^3_h \subset H^{-1}(h)$. Назовем *гладким комплексом* объединение конечного числа непересекающихся (гладких) подмногообразий, размерности которых могут быть различными. Пусть Q^3_h трансверсально пересекается с некоторым гладким комплексом $\mathcal{S}$, состоящем из точек множества Θ, так что пересечение $Q^3_h \cap \mathcal{S}$ является гладким комплексом и $Q^3_h \cap \Theta = Q^3_h \cap \mathcal{S}$. К этому добавим следующие стандартные предположения, при которых вычисляются меченые молекулы $W^*(Q^3_h)$.

1. Почти все торы Лиувилля $T^2 \subset Q^3_h$ являются нерезонансными.

2. Интеграл $F : Q^3_h \to \mathbb{R}$ является такой функцией Ботта, что все ее критические подмногообразия являются вложенными окружностями.

3. Для некоторого $\varepsilon > 0$ и целого $m > 1$ при любом $h' \in [h-\varepsilon;\ h+\varepsilon]$ множество критических точек интеграла $F : Q^3_{h'} \to \mathbb{R}$ является несвязным объединением m вложенных окружностей $S^1_1(h'),\ S^1_2(h'),\ \ldots,\ S^1_m(h')$. При этом каждая окружность $S^1_i(h')$ гладко зависит от h', и образом цилиндра $\bigcup\ \{S^1_i(h') :\ h-\varepsilon \le h' \le h+\varepsilon\}$

[22]Фоменко А.Т., Цишанг Х. *Топологический инвариант и критерий эквивалентности интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы.* Изв. АН СССР, серия матем. **54** (1990), № 3, 546-572.

[23]Болсинов А.В., Фоменко А.Т. *Интегрируемые гамильтоновы системы. Топология. Геометрия. Классификация.* Ижевск: "Удмуртский университет", 1999.

относительно отображения $\mathcal{F} = (H, F)$ является регулярная кривая σ_i, которая трансверсально пересекает отрезок $\mathcal{F}(Q^3_h)$ в точке $(h, F(S^1_i(h)))$. Любые две кривые σ_i и σ_j не пересекаются или совпадают, где $1 \le i, j \le m$.

Тогда справедлива теорема, служащая основным результатом главы 2.

Теорема 3 *Любая связная компонента $\mathcal{S}'$ гладкого комплекса $\mathcal{S}$ имеет размерность 3 или 2. Если $\dim \mathcal{S}' = 3$, то каждая связная компонента $Q^3_h \cap \mathcal{S}'$ представляет собой тор Лиувилля или гладкое многообразие, которое является подмножеством некоторого, критического уровня интеграла $F : Q^3_h \to \mathbb{R}$. Если $\dim \mathcal{S}' = 2$, то связные компоненты $Q^3_h \cap \mathcal{S}'$ представляют собой вложенные окружности, которые являются критическими или состоят из регулярных точек интеграла $F : Q^3_h \to \mathbb{R}$.*

Для любого, достаточно малого $\varepsilon > 0$ многообразие Q^3_h склеено из связных компонент $U(\mathcal{N}_c)$ подмногообразий $F^{-1}[f_c - \varepsilon\ ;\ f_c + \varepsilon]$, выбранных по всем критическим значениям f_c интеграла $F : Q^3_h \to \mathbb{R}$. При этом каждое подмногообразие $U(\mathcal{N}_c)$ несет на себе структуру атома, который топологически эквивалентен атому некоторой интегрируемой системы на симплектическом многообразии без особенностей, и определена меченая молекула $W^*(Q^3_h)$. Любая интегрируемая система $sgrad\, \widetilde{H}$ на многообразии $\widetilde{Q}^3$ с меченой молекулой $W^*(\widetilde{Q}^3)$ топологически эквивалентна системе $sgrad\, H$ на Q^3_h тогда и только тогда, когда $W^*(\widetilde{Q}^3) = W^*(Q^3_h)$ или эти молекулы могут быть сделаны равными после изменения ориентаций некоторых ребер.

По существу теорема 3 означает, что в процессе вычисления молекул $W^*(Q^3_h)$, т.е., инвариантов Фоменко-Цишанга можно проигнорировать симплектические особенности, если Q^3_h трансверсально пересекается с гладкими кусками Θ.

В § **2.3** рассмотрен пример интегрируемой системы, удовлетворяющей условиям теоремы 3, который называется случаем Богоявленского. Он отвечает намагниченному волчку Ковалевской в двух силовых полях (гравитационном и магнитном), движение которого рассматривается на 4-мерном подмногообразии $\mathcal{M}$ нулевого уровня интеграла типа Ковалевской (обобщенный I класс Аппельрота).

В **2.3.2** доказано, что каждая точка 3-многообразия Θ является *контактной* (это понятие вводится в главе 3). С каждым изоэнергетическим подмногообразием Q^3_h гиперповерхность Θ пересекается по нескольким торам (1, 2 или 4). Для интеграла F данной системы, дополнительного к гамильтониану H, в предложении

5 описано предельное поведение потока $sgrad(F)$ на торах $T^2 \subset Q_h^3 \cap \Theta$. При этом скорость потока обращается в ∞, но предельные траектории образуют квазипериодические обмотки торов, которые трансверсальны квазипериодическим траекториям поля $sgrad(H)$. С точки зрения топологии слоения Лиувилля симплектические особенности данной задачи ничем себя не проявляют. Однако они отразились в значениях некоторых ε - меток ($\varepsilon = \pm 1$), что обусловлено наличием периодических траекторий, состоящих из критических точек гамильтониана H и вложенных в подмногообразие Θ. Например, ε - метки в молекуле a) и на ребрах $r = \infty$ в молекуле b) (рис. 1) имели бы значения с противоположным знаком, если бы объемлющая симплектическая структура не вырождалась в точках инвариантного подмногообразия $\Theta = F^{-1}(0)$. Следует заметить, что на симплектическом многообразии (без особенностей) подобные динамические эффекты невозможны, т.к. критические точки гамильтониана всегда являются стационарными траекториями, в силу чего не могут лежать на периодических траекториях потока.

Случай Богоявленского также является содержательным примером к теореме 5 из § **1.3**, где роль надмногообразия $N \supset \mathcal{M}$ играет 6-мерная орбита $\mathcal{O}^6$ копредставления полупрямого произведения группы $SO(3)$ с двумя экземплярами $\mathbb{R}^3$. При этом дополнительный интеграл F, существующий на инвариантном подмногообразии $\mathcal{M} = Z^{-1}(0)$, пропорционален объемлющей скобке Пуассона $\{Z_1, Z_2\}$, где $Z = Z_1^2 + Z_2^2$ есть интеграл типа Ковалевской на $\mathcal{O}^6$. В предложении 7 для гладкой гиперповерхности Θ установлен ее топологический тип $S^1 \times \mathbb{R}^2$.

Таким образом, в главе 2 предметная область теории инвариантов Фоменко-Цишанга расширена за счет интегрируемых систем с симплектическими особенностями общего положения, которые встречаются в физически содержательных задачах. По-видимому, такие системы станут преобладающими в связи с увеличением размерностей исходных фазовых пространств, внутри которых, т.е., на инвариантных подмногообразиях могут быть найдены интегрируемые случаи с двумя степенями свободы.

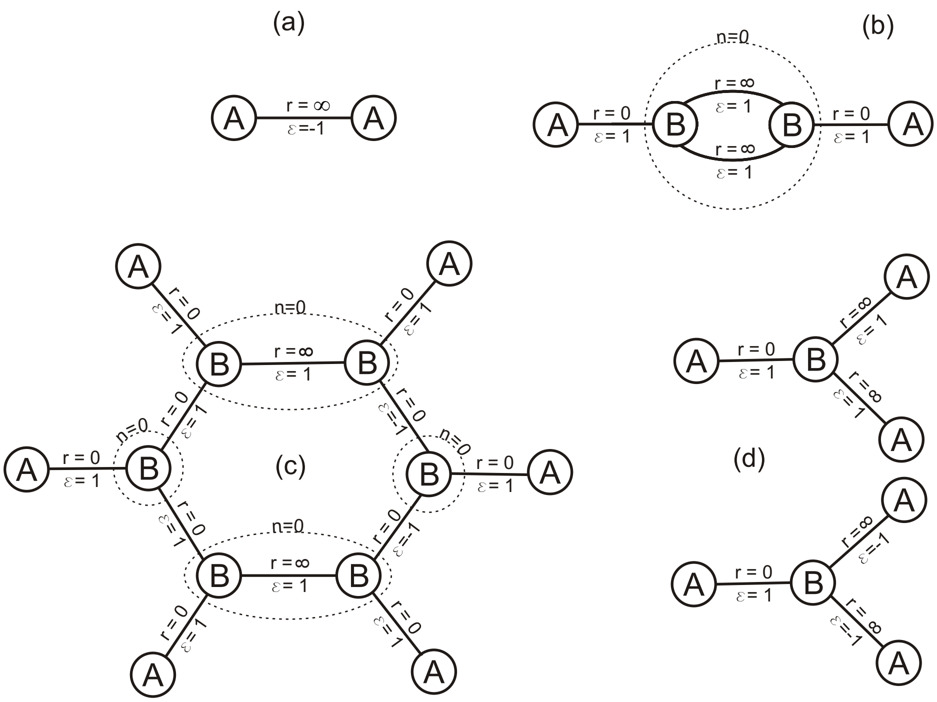

Рис. 1 Меченые молекулы $W^*(Q_h^3)$ в случае Богоявленского.

Глава 3 заключает в себе теорию симплектических многообразий с контактными особенностями. Рассматриваются многообразия M с замкнутой 2-формой ω, вырождающейся в точках гладкой гиперповерхности Θ и невырожденной вне ее.

В § **3.1** вводится условие контактности точек $\rho \in \Theta$, которое является свойством общего положения для замкнутых 2-форм указанного вида, а в случае $\dim \mathcal{Z}_\rho = 2$ является свойством общего положения в классе всех замкнутых 2-форм на M.

Для каждой кососимметрической матрицы $\omega = (\omega_{ij})$ с точностью до знака определен такой многочлен $P \in \mathbb{Z}[\omega_{1,2}, \dots, \omega_{i,j}, \dots, \omega_{2n-1,2n}]$, что $P^2 = \det(\omega)$. Он называется пфаффианом и обозначается $Pf(\omega)$.

Определение 1 *Пусть (M, ω) – симплектическое многообразие с особенностью, $\dim \mathcal{Z}_\rho = 2k$ в некоторой точке $\rho \in \Theta$ и существует такая гладкая гиперповерхность S в M, что $\rho \in S \subset \Theta$ и $\dim \mathcal{Z}_y = 2k$ в каждой точке $y \in S$. Тогда при условиях $\quad \mathcal{Z}_\rho \not\subset T_\rho S, \quad d^{2k-1} Pf(\omega)_\rho \neq 0$ точка ρ называется контактной.*

Условие $d^{2k-1} Pf(\omega)_\rho \neq 0$ означает, что в любых координатах хотя бы одна из частных производных порядка $2k-1$ отлична от нуля. При этом для любых координат $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{2n}$ в окрестности ρ, в каждой близкой точке $y \in \Theta$ равны нулю все производные функции $Pf\big(\omega_{ij}(\mathbf{x})\big)$, порядков от 0 до $2k-2$ включительно (лемма 3).

В предложении 2 дан алгоритм проверки условия контактности в том случае, когда симплектическая структура ограничена на четно-мерное подмногообразие некоторого симплектического многообразия (в связи с чем возникли особенности).

В работе показано, что очевидное необходимое условие $df(\mathcal{Z}_x) \equiv 0$ для корректной определенности поля $sgrad(f)$ на M, вообще говоря, не является достаточным. В случае контактных вырождений его достаточность вытекает из следующей теоремы

Теорема 1 *Пусть ρ – контактная точка и f – гладкая функция на M. Если $df(\mathcal{Z}_y) = 0$ для всех $y \in \Theta$, достаточно близких к ρ, то существует предел*

$$\lim_{\Theta \not\ni y \to \rho} sgrad(f)(y),$$

принадлежащий $T_\rho \Theta$ и гладко зависящий от точки ρ.

Таким образом, найден критерий корректной определенности гамильтоновых полей в контактных точках вырождения симплектической структуры.

Доказана локальная гамильтоновость фазовых потоков, сохраняющих симплектическую форму с контактными особенностями (предложение 6).

Решена задача о каноническом виде замкнутой 2-формы в окрестности контактной точки, т.е., доказан следующий аналог теоремы Дарбу.

Теорема 3 *Пусть ρ – контактная точка и $\dim \mathcal{Z}_\rho = 2k \geq 2$. Тогда в некоторой окрестности ρ существуют координаты $(\mathbf{x}, \mathbf{p}, \mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{2k} \times \mathbb{R}^{n-k} \times \mathbb{R}^{n-k}$, в которых:*

$$\omega = d\Big(\frac{x_1^2}{2}\Big(dx_2 + \sum_{j=2}^{k} x_{2j-1}dx_{2j}\Big)\Big) + \sum_{i=1}^{n-k} dp_i \wedge dq_i.$$

Такие координаты называются каноническими. В **3.1.5** изучены свойства формы объема $\Omega = \wedge_{i=1}^{n}\omega$. Доказан аналог теоремы Мозера о том, что для замкнутого и ориентируемого многообразия M с контактными особенностями группа $\mathbf{H}^2(M, \mathbb{R})$ нетривиальна (теорема 4). Показано, что объем симплектического многообразия с контактными особенностями может быть отрицательным или равным нулю.

В § **3.2** описана каноническая структура Ли на гиперповерхности Θ, состоящей из контактных точек (теорема 5, следствия 4,5,6). Поле $2k$ - мерных ядер $\mathcal{Z}_x$ определяет $2k-1$ мерное распределение $x \longmapsto \mathcal{Z}_x \cap T_x\Theta$, которое вполне интегрируемо в силу леммы 1 из § **1.2**. Таким образом Θ расслоено на $2k-1$ мерные, инъективно погруженные, интегральные многообразия данного распределения. Каждое их них несет на себе точную контактную структуру, которая инвариантно определяется формой ω и в любых канонических координатах $\mathbf{x}, \mathbf{p}, \mathbf{q}$ локально задается 1-формой $dx_2 + \sum_{j=2}^{k} x_{2j-1}dx_{2j}$. Такое расслоение на контактные многообразия эквивалентно заданию на Θ структуры регулярного многообразия Ли с нечетно-мерными, транзитивными слоями, а при $n = k$ само Θ является точным контактными многообразием. Этим обусловлен термин *контактная точка.*

Доказана реализуемость любого точного контактного многообразия гиперповерхностью $\Theta \subset M$, состоящей из контактных точек вырождения замкнутой 2-формы ω на M (равной нулю на $T_\Theta M$). Для этого введена конструкция S – симплектизации, которая является модификацией обычной симплектизации и не зависит от выбора контактной 1-формы (определение 4, предложение 9). Грубо говоря, стандартные координаты на 1-мерных слоях симплектизации заменяются из квадратами. Аналогичный локальный результат получен для нечетно-мерных многообразий Ли с нечетно-мерными слоями (предложение 8). В **3.2.3** рассмотрен физически содержательный пример S – симплектизации, связанный с метрикой

Фридмана стандартной модели расширяющейся Вселенной, где соответствующее контактное многообразие имеет размерность 7.

Таким образом, все точные контактные многообразия являются гиперповерхностями Θ в симплектических многообразиях с контактными особенностями, отвечающими обнулению формы ω. При этом класс последних отнюдь не исчерпывается S – симплектизациями, т.к. введенная в работе конструкция контактно-связной суммы порождает симплектические многообразия с контактными особенностями, которые не являются S – симплектизациями. Эта конструкция определяет на связной сумме симплектических $2n$-многообразий симплектическую форму ω с контактными особенностями в точках сферы S^{2n-1}, по которой происходит склейка. При этом вне бесконечно малой окрестности сферы форма ω согласована с симплектическими формами слагаемых (определение 5). Данная конструкция может быть легко обобщена на случай склеивания по подмногообразиям типа $S^m \times S^r$, так что при этом возникают многообразия с контактными особенностями, отвечающими любым размерностям ядер формы ω .

Из теоремы 3 следует, что в окрестности контактной точки $\rho \in \Theta$ гамильтонова система $sgrad(f)$, рассматриваемая на $M \setminus \Theta$, приводится к следующему виду:

$$\left(\begin{array}{c} \dot{x}_1 = -\frac{1}{x_1}\frac{\partial f}{\partial x_2} \\ \dot{x}_2 = \frac{1}{x_1}\frac{\partial f}{\partial x_1} - \frac{2}{x_1^2}\left(x_3\frac{\partial f}{\partial x_3} + x_5\frac{\partial f}{\partial x_5} + \ldots + x_{2k-1}\frac{\partial f}{\partial x_{2k-1}}\right) \\ \dot{x}_{2j+1} = \frac{2}{x_1^2}\left(x_{2j+1}\frac{\partial f}{\partial x_2} - \frac{\partial f}{\partial x_{2j+2}}\right), \\ \dot{x}_{2j+2} = \frac{2}{x_1^2}\frac{\partial f}{\partial x_{2j+1}} \\ \dot{p}_i = -\frac{\partial f}{\partial q_i} \\ \dot{q}_i = \frac{\partial f}{\partial p_i}, \end{array} \right)$$

где $1 \le i \le n-k$ и $1 \le j \le k-1$ и $\dim \mathcal{Z}_\rho = 2k$.

В § **3.3** изучено типичное предельное поведение гамильтоновых полей в контактных точках, где $k > 1$.

Теорема 6 *Пусть* $\dim \mathcal{Z}_\rho = 2k \ge 4$ *и* f *есть гладкая функция на некоторой окрестности контактной точки* $\rho \in \Theta$, *удовлетворяющая условию* $df(\Pi_\rho) \neq 0$. *Тогда найдется такая окрестность* O *точки* ρ, *что* $\forall y \in O \cap \Theta$ *поле* $sgrad(f)$ *имеет только одно предельное положение в точке* y. *Оно инцидентно* $2k-3$ *мерной плоскости* $\Pi_y \cap \mathcal{H}_y(f)$ *и является несобственным квази-порядка* 2. *При этом на множестве* O *определено гладкое поле направлений, продолжающее поле* *направлений потока $sgrad(f)$ и включающее в себя его предельные положения в точках $O \cap \Theta$.*

Здесь Π_ρ есть $2k-2$ мерная плоскость канонической структуры Ли на Θ, а $\mathcal{H}_y(f)$ обозначает касательную гиперплоскость к поверхности уровня $f^{-1}(f(y))$. Пространство Π_ρ натянуто на предельные направления всевозможных косых градиентов, являющихся бесконечно большими порядка χ^{-2} при $y \to \rho$, $y \notin \Theta$ (предложение 10), где $\chi(y)$ есть расстояние от точки y до гиперповерхности Θ в произвольной римановой метрике. Утверждение теоремы о предельном положении квази-порядка 2 означает следующее. Имеет место

$$\lim_{\Theta \not\ni y' \to y} \chi^2(y') \cdot sgrad(f)(y') = v \neq 0 \ , \qquad \lim_{\Theta \not\ni y' \to y} |sgrad(f)(y')| = +\infty \ .$$

Таким образом, в каждой точке $y \in O \cap \Theta$ хотя бы одна из координат вектора $sgrad(f)$ обращается в ∞, но данное гамильтоново поле имеет предельное направление.

Пусть $[v]_+ = \cup_{\lambda>0}\{\lambda v\}$ есть направление вектора $v \neq 0$ и $[v] = \cup_{\lambda \in \mathbb{R}}\{\lambda v\}$. Нам также потребуются следующие обозначения. Пусть на симплектическом многообразии с особенностью (M, ω) задана гладкая функция f, и точка ρ лежит в множестве Θ.

1. Если существует $\lim_{\Theta \not\ni y \to \rho} sgrad(f)(y) = w \in T_\rho M$, то вектор w обозначается $sgrad(f)(\rho)$ и называется косым градиентом f в ρ.

2. Если при $\lim_{\Theta \not\ni y \to \rho} |sgrad(f)(y)| = +\infty$ существует

$$\lim_{\Theta \not\ni y \to \rho} [sgrad(f)(y)]_+ = l^+_\rho \subset T_\rho M \ ,$$

то несобственное предельное положение l^+_ρ обозначается $sgrad^\infty(f)(\rho)$.

3. Если при $\lim_{\Theta \not\ni y \to \rho} |sgrad(f)(y)| = +\infty$ найдется шаровая окрестность O точки ρ, разделяемая гиперповерхностью $O \cap \Theta$ на два открытых полушария O^+ и O^-, и существуют противонаправленные пределы

$$\lim_{O^+ \ni y \to \rho} [sgrad(f)(y)]_+, \qquad \lim_{O^- \ni y \to \rho} [sgrad(f)(y)]_+ \ ,$$

то каждое из этих двух направлений в $T_\rho M$ обозначается $sgrad^\infty_\pm(f)(\rho)$.

Доказаны следующие аналоги теоремы Лиувилля для интегрируемых систем, заданных на симплектических многообразиях с контактными особенностями.

Теорема 7 *Пусть на симплектическом многообразии с особенностью (M^{2n}, ω) заданы гладкие функции $f_1, \ldots, f_n$, определяющие нерезонансное, пуассоново* *действие группы $\mathbb{R}^n$ на симплектическом многообразии $(M^{2n}\backslash\Theta,\ \omega)$. Предположим, что образ Θ относительно отображения момента $\mathcal{F}: M \to \mathbb{R}^n$ имеет меру ноль, и некоторый тор Лиувилля $T_0^n \subset \Theta$ состоит из контактных точек y, в которых*

$$\dim T_y T_0^n \cap \mathcal{Z}_y = k, \qquad \dim \mathcal{Z}_y = 2k \geq 2\ .$$

Тогда на некоторой окрестности U тора T_0^n определены такие функции $F_1, \ldots, F_n$, являющиеся интегралами на $U \setminus \Theta$, что $\Theta \cap U = F_1^{-1}(0)$ и ковекторы $dF_1, \ldots, dF_n$ линейно независимы на U. При этом поле прямых $\big[sgrad(F_1)\big]$, поля направлений $[sgrad(F_\alpha)]_+$ и векторные поля $sgrad(F_i)$ гладко продолжаются с $U \setminus \Theta$ на все множество U, где $2 \leq \alpha \leq k$ и $k+1 \leq i \leq n$. Для любого тора Лиувилля $T^n \subset U \cap \Theta$ в каждой точке $\rho \in T^n$ имеет место

$$T_\rho T^n = \big(\mathcal{Z}_\rho \cap T_\rho T^n\big) \oplus \big[sgrad(F_{k+1})(\rho), \ldots, sgrad(F_n)(\rho)\big]\ ,$$
$$\mathcal{Z}_\rho \cap T_\rho T^n = \big[sgrad^\infty_\pm(F_1)(\rho),\ sgrad^\infty(F_2)(\rho), \ldots, sgrad^\infty(F_k)(\rho)\big]\ .$$

При этом интегральные траектории полей $sgrad(F_i)$ и интегральные кривые распределений $\big[sgrad^\infty_\pm(F_1)\big]$, $[sgrad^\infty(F_\alpha)]$ являются квазипериодическими обмотками относительно некоторых угловых координат, гладко зависящих от тора $T^n \subset U$; при $k > 1$ в каждой точке $\rho \in T^n$ имеет место

$$\Pi_\rho \cap T_\rho T^n = \big[sgrad^\infty(F_2)(\rho), \ldots, sgrad^\infty(F_k)(\rho)\big]\ ,$$

где Π_ρ есть плоскость канонической контактной структуры на любом, проходящем через точку ρ интегральном многообразии интегрируемого, $2k-1$ мерного распределения $y \longmapsto \mathcal{Z}_y \cap T_y\Theta$, определенного на гиперповерхности $U \cap \Theta$.

Интегралы F_i могут быть явно выражены формулами (3.27), и в этом случае все интегральные траектории полей $sgrad(F_i)$ являются 2π - периодическими.

Формула (3.27) имеет обычный вид

$$F_i = \frac{1}{2\pi}\int_{\gamma_i} \beta\ , \qquad k+1 \leq i \leq n,$$

где β есть первообразная от ω и циклы γ_i гомологичны линиям каких-нибудь угловых координат φ_i , так что определяемый ими тор $T^{n-k} \subset T^n$ в каждой своей точке y трансверсален k - мерной плоскости $\mathcal{Z}_y \cap T_y T^n$, если $T^n \subset \Theta$.

В условиях теоремы 7 каждая компактная связная компонента прообраза любого регулярного значения отображения $\mathcal{F} = f_1 \times \ldots \times f_n$ является тором T^n (предложение

2 § **2.2**), который не пересекается с множеством Θ или целиком лежит в нем (предложение 3 § **2.2**). В последнем случае он называется тором Лиувилля, и теорема 7 описывает поведение потоков интегралов вблизи такого тора. Размерность подпространства $T_\rho T_0^n \cap \mathcal{Z}_\rho$ не может быть меньше k (предложение 13). Поэтому в теореме 7 описан случай общего положения. Согласно предложению 14, набор интегралов $F_1, \ldots, F_n$ нельзя улучшить в смысле предельного поведения на $U \cap \Theta$.

Теорема 8 *Пусть $n > 1$ и на симплектическом многообразии с особенностью (M^{2n}, ω) заданы функции $f_1, \ldots, f_n$, определяющие нерезонансное, пуассоново действие группы $\mathbb{R}^n$ на симплектическом многообразии $(M^{2n} \backslash \Theta,\ \omega)$. Предположим, что образ множества Θ относительно отображения момента $\mathcal{F} = (f_1, \ldots, f_n)$ имеет меру ноль в $\mathbb{R}^n$, и некоторый тор Лиувилля $T_0^n \subset \Theta$ состоит из контактных точек ρ, в которых $\mathcal{Z}_\rho = T_\rho M$.*

Тогда на некоторой окрестности U тора T_0^n определены независимые функции $x, s_2, \ldots, s_n$, являющиеся интегралами пуассонова действия на $U \setminus \Theta$. На открытом множестве U определены такие координаты

$$(x,\ s_2,\ \ldots,\ s_n,\ \varphi_1 \mod 2\pi,\ \ldots,\ \varphi_n \mod 2\pi)\ ,$$

что (многозначные) функции $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ являются угловыми координатами на торах Лиувилля $T^n \subset U$, и форма ω имеет на множестве U канонический вид:

$$\omega = d\Big(\frac{x^2}{2}\big(d\varphi_1 + \sum_{j=2}^{n} s_j d\varphi_j\big)\Big)\ .$$

В случае $\dim \mathcal{Z}_\rho < \dim M$ приведение формы ω к каноническому виду на U возможно в том и только в том случае, когда для каждого тора $T^n \subset U \cap \Theta$ все максимальные интегральные подмногообразия (k - мерного, интегрируемого) распределения $T^n \ni y \longmapsto \mathcal{Z}_y \cap T_y T^n$ являются компактными (предложения 15, 16). Эти подмногообразия отнюдь не обязаны быть компактными (предложение 5 § **2.3**). Если же они оказались компактными, то форма ω приводится к каноническому виду:

$$\omega = d\Big(\frac{x^2}{2}\big(d\varphi_1 + \sum_{j=2}^{k} s_j d\varphi_j\big)\Big) + \sum_{i=k+1}^{n} ds_i \wedge d\varphi_i\ .$$

В § **3.4** введено понятие интегрируемой по Лиувиллю, контактной динамической системы, где роль скобки Пуассона играет скобка Лагранжа $[*, *]$. При этом необходимо добавить условие, согласно которому равны нулю производные интегралов вдоль (1-мерных) ядер формы $d\theta$, где θ есть контактная 1-форма. Формально это эквивалентно тому, что все интегралы коммутируют с произвольной константой. Для таких функций скобка Лагранжа имеет гамильтоново выражение $[f,g] = X_f(g) = -X_g(f)$, где X_f есть контактное векторное поле с контактным гамильтонианом f. Обозначим $\mathcal{L}(X_1,\ldots,X_m)$ плоскость, натянутую на векторы $X_1,\ldots,X_m$. Из теоремы 8 вытекает следующий аналог теоремы Лиувилля.

Теорема 9 *Пусть на точном $2n-1$ мерном контактном многообразии (K,Π) фиксирована контактная 1-форма θ, и даны почти всюду независимые функции $f_1,\ldots,f_{n-1}$, так что $[f_i,f_j]=0$ для всех $1\le i,j\le n-1$. Предположим, что для каждой функции f_i справедливо $df_i(Ker(d\theta))=0$, и прообраз любого регулярного значения отображения $f_1\times\ldots\times f_{n-1}:K\to\mathbb{R}^{n-1}$ является компактным.*

Тогда каждая из функций f_i является интегралом каждого потока X_{f_j} , и произвольная связная компонента регулярной поверхности уровня интегралов $f_1,\ldots,f_{n-1}$ является вложенным в K тором T^n, на котором каждое из полей X_{f_i} определяет квазипериодическое движение.

При этом некоторая нормальная окрестность U тора $T^n\subset K$ расслоена вложенными, X_{f_i} – инвариантными n-торами. Любое интегральное многообразие распределения плоскостей $\mathcal{L}(X_{f_1},\ldots,X_{f_{n-1}})$, которое проходит через некоторую точку U, является лежандровым и инъективно погруженным в X_{f_i} – инвариантный n-тор, где $1\le i\le n-1$.

На U определены независимые функции $s_2,\ldots,s_n$, являющиеся интегралами каждого из потоков X_{f_i} . На многообразии U определены координаты

$$(s_2,\ \ldots,\ s_n,\ \varphi_1 \mod 2\pi,\ \ldots,\ \varphi_n \mod 2\pi),$$

где $\varphi_1,\ldots,\varphi_n$ есть угловые координаты на торах $\mathbf{s}=const$. В этих координатах контактная форма θ имеет канонический вид

$$\theta = d\varphi_1 + \sum_{j=2}^{n} s_j d\varphi_j\ .$$

Таким образом, теория контактных симплектических особенностей нашла интересное приложение в контактной геометрии.

7**Глава 4** посвящена примерам и приложениям теории симплектических многообразий с контактными особенностями, найденным в электродинамике.

Исходным соображением является следующее. Традиционно электромагнитное поле рассматривается локально, а его граница считается расположенной в бесконечности. Между тем поле имеет край (передний фронт), который быстро удаляется от источников, заметая гиперповерхность в пространстве-времени. Естественно предположить, что электромагнитное поле обнуляется на этой 3-поверхности. Таким образом, классическая электродинамика может быть источником примеров симплектических многообразий с контактными особенностями, которые отвечают полному обнулению структурной формы

$$\omega = -cdt \wedge (E_x dx + E_y dy + E_z dz) + dx \wedge (H_z dy - H_y dz) + H_x dy \wedge dz$$

(замкнутой в силу уравнений Максвелла), т.е., тензора электромагнитного поля.

Пространство-время $\mathbb{R}^4$ рассматривается с *галилеевыми* координатами $(\mathbf{r}, t) = (x, y, z, t)$, которые определены с точностью до преобразования Пуанкаре, и с метрикой $ds^2 = c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$. Пусть $\mathbb{R}^3_t = \{(\mathbf{r}, t) \in \mathbb{R}^4 : \ \mathbf{r} \in \mathbb{R}^3\}$.

В § **4.1** собраны необходимые сведения из теории поля и рассмотрены наводящие примеры. В § **4.2** даны формальные определения и при некоторых, естественных предположениях изучена геометрия поля вблизи нулевой гиперповерхности. Данное понятие служит формализацией представления о пространственно-временной границе, хотя может рассматриваться и само по себе.

Определение 1 *Пусть на 4-мерном подмногообразии $U \subset \mathbb{R}^4$ (возможно с краем) дана замкнутая 2-форма*

$$\omega = -cdt \wedge (E_x dx + E_y dy + E_z dz) + dx \wedge (H_z dy - H_y dz) + H_x dy \wedge dz \ ,$$

и фиксирована гладкая гиперповерхность $\Theta \subset U$. Предположим, что в каждой точке $p \in \Theta$ форма ω_p равна нулю, и существует ненулевой вектор $\xi \in T_p\Theta$, который изотропен относительно ds^2.

Тогда будем говорить, что Θ является нулевой гиперповерхностью электромагнитного поля, определяемого тензором ω. Если в некоторых галилеевых координатах при фиксированном t множество $\mathcal{F}_t = \mathbb{R}^3_t \cap \Theta$ непусто, то поверхность $\mathcal{F}_t \subset \mathbb{R}^3_t$ называется нулевым фронтом электромагнитного поля.

Условие об изотропном векторе ξ весьма естественно с физической точки зрения. Оно потребовалось для того, чтобы в любых галилеевых координатах было корректно определено гладкое (неинвариантное) 2-мерное подмногообразие $\mathcal{F}_t$.

Теорема 1 *Пусть Θ – нулевая гиперповерхность поля с формой ω, имеющей контактное вырождение в некоторой точке $p_0 \in \Theta$. Тогда существует такая окрестность $O \ni p_0$, что $S = O \cap \Theta$ является гладкой гиперповерхностью и матрица ω невырождена на $O \setminus \Theta$. Если плотность зарядов ρ равна нулю на S, то для любой точки $p = (\mathbf{r}, t) \in S$ существуют гладко зависящие от p, взаимно ортогональные в $\mathbb{R}^3_t$ пределы*

$$\lim_{\Theta \not\ni q \to p} [\mathbf{E}(q)]_+ \subset T_\mathbf{r}\mathcal{F}_t \quad и \quad \lim_{\Theta \not\ni q \to p} [\mathbf{H}(q)]_+ \subset T_\mathbf{r}\mathcal{F}_t \ ,$$

и каждая из величин $|\mathbf{E}(q)|$ и $|\mathbf{H}(q)|$ при $\Theta \not\ni q \to p$ имеет порядок $\chi(q)$, где $\chi(\mathbf{r}, t)$ – евклидово расстояние в $\mathbb{R}^3_t$ от точки $\mathbf{r}$ до нулевого фронта $\mathcal{F}_t$.

Если плотность зарядов на нулевом фронте тождественно равна нулю, то, согласно теореме 1, в пространственно-временной близости от контактной точки $(\mathbf{r}_0, t_0) \in \Theta$ электромагнитное поле устроено следующим образом. Величины векторов $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ пропорциональны расстоянию до нулевого фронта $\mathcal{F}_t$, при этом предельные направления $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ касаются фронта и являются взаимно ортогональными. Угол между векторами $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ отличается от прямого на величину, которая пропорциональна расстоянию до фронта $\mathcal{F}_t$ (рис. 2).

В § **4.3** рассмотрен случай электромагнитного поля, у которого нулевая гиперповерхность $\Theta \subset \mathbb{R}^4(\mathbf{r}, t)$ вложена в световой конус $c^2t^2 - r^2 = 0$, где $t > 0$. Представлены формальные примеры контактных вырождений тензора электромагнитного поля (примеры 4, 5), а также техника получения таких примеров в неограниченном количестве (предложение 3). Пример нулевой гиперповерхности с контактными точками, имеющий ясный физический смысл, приводится в § **4.2** (пример 3). Описана каноническая контактная структура на световом конусе Θ. При $(\mathbf{r}, t) \in \Theta$ контактная плоскость $\Pi^2_{(\mathbf{r},t)}$ натянута на вектор $(\mathbf{r}, t)$ и предельное направление магнитного поля $\mathbf{H}$ (предложение 4). Для электромагнитных полей со сферическим фронтом введены калибровочные условия на потенциалы, обеспечивающие обнуление зарядов на нулевой гиперповерхности (предложение 3). При этих условиях получены дифференциальные уравнения I порядка для потенциалов поля в бесконечно тонком пространственно-временном слое, прилегающем к световому конусу (предложение 5).

Таким образом, электродинамика является естественным источником примеров и приложений теории, развитой в главе 3.

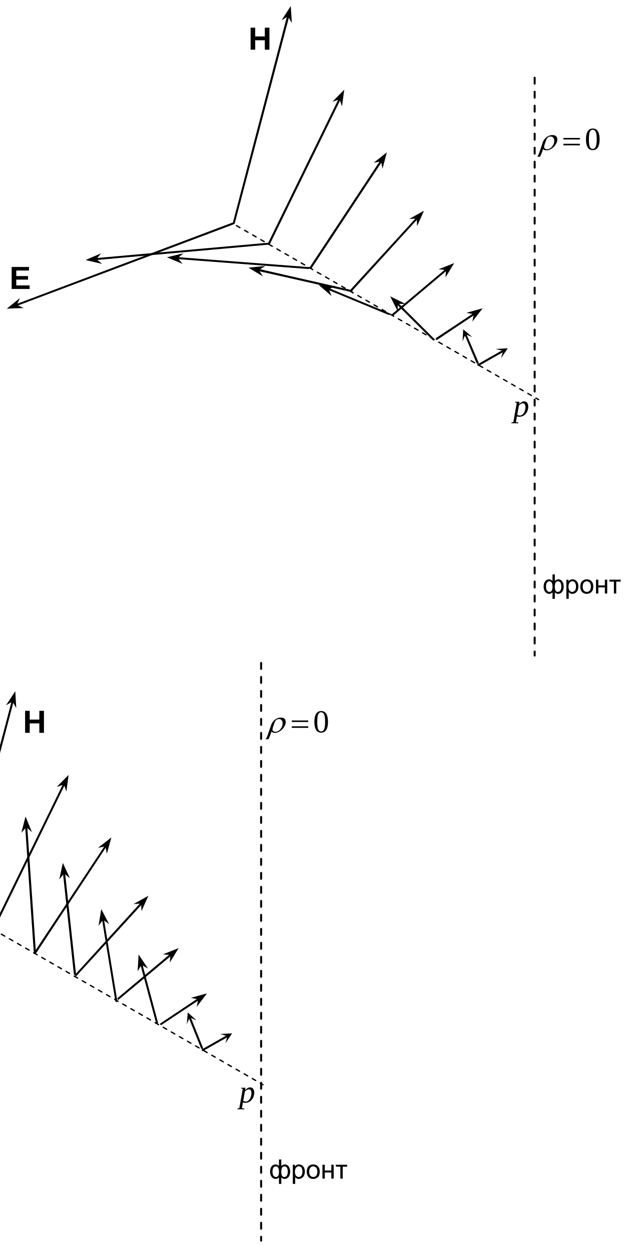

Рис. 2 Возможные конфигурации поля вблизи контактной точки p.

БЛАГОДАРНОСТИ

Автор глубоко признателен профессору Алексею Викторовичу Болсинову за регулярные обсуждения и важные критические замечания на всем протяжении диссертационной работы, без которых она не могла быть осуществлена, академику РАН Анатолию Тимофеевичу Фоменко за неоценимую поддержку всей научной деятельности, начиная с первых самостоятельных шагов.

Список работ автора по теме диссертации.

1. Zotev D.B. *Fomenko-Zieschang Invariant in the Bogoyavlenskyi Integrable Case.* Regular & chaotic dynamics, **5** (2000), № 4, 437-458.

2. Зотьев Д.Б. *О симплектической геометрии многообразий с почти всюду невырожденной замкнутой 2-формой.* Математические заметки, **76** (2004), вып. 1, 66-77.

3. Зотьев Д.Б. *Фазовая топология волчка Ковалевской в* $SO(2)$ *- симметричном двойном силовом поле.* Механика твердого тела, **34**(2004), 66-71.

4. Зотьев Д.Б. *Фазовая топология I класса Аппельрота волчка Ковалевской в магнитном поле.* Фундаментальная и прикладная математика, **12** (2006), № 1, 95-128.

5. Зотьев Д.Б. *Об одном частном интеграле, который можно извлечь из матрицы Пуассона.* Нелинейная динамика. **3** (2007) № 1, 75-80.

6. Зотьев Д.Б. *Контактные вырождения замкнутых 2-форм.* Математический сборник, **198** (2007), № 4, 47-78.

7. Zotev D.B. *On a partial integral which can be derived from Poisson Matrix.* Regular & chaotic dynamics, **12** (2007), № 1, 81-85.

8. Зотьев Д.Б. *Контактные вырождения тензора электромагнитного поля.* Вестник МЭИ, (2011), № 2 (в разделе математика).

9. Zotev D.B. *Topology of integrable systems: The Fomenko theory.* Reviews in Mathematics and Mathematical Physics (2011).