Московский государственный университет
имени М.В. Ломоносова
Механико-математический факультет

На правах рукописи

УДК 517.518.47+517.518.24

Бахвалов Александр Николаевич

МНОГОМЕРНЫЕ КЛАССЫ ФУНКЦИЙ ОГРАНИЧЕННОЙ ВАРИАЦИИ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ В ТЕОРИИ РЯДОВ И ИНТЕГРАЛОВ ФУРЬЕ

01.01.01 — вещественный, комплексный и функциональный анализ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени доктора физико-математических наук

Москва, 2011

Работа выполнена на кафедре теории функций и функционального анализа механико-математического факультета Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова.

Официальные оппоненты:
доктор физико-математических наук
Антонов Николай Юрьевич,
доктор физико-математических наук, профессор
Блошанский Игорь Леонидович,
доктор физико-математических наук, профессор
Рубинштейн Александр Иосифович.

Ведущая организация:
Московский физико-технический институт
(государственный университет).

Защита диссертации состоится 25 ноября 2011 г. в 16 часов 45 минут на заседании диссертационного совета Д 501.001.85 при Московском Государственном Университете имени М.В. Ломоносова по адресу: 119991, ГСП-1, Москва, Ленинские горы, МГУ, механико-математический факультет, аудитория 16-24.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке механико-математического факультета (главное здание, 14 этаж).

Автореферат разослан "_____"________________ 2011 г.

Ученый секретарь диссертационного
совета Д 501.001.85 при МГУ,
доктор физико-математических
наук, профессор

В.Н. Сорокин

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы.

Диссертация посвящена исследованию многомерных классов функций ограниченной Λ-вариации (классов Ватермана) и задачам сходимости тригонометрических рядов и интегралов Фурье функций многих вещественных переменных из таких классов.

В одномерном случае классической является теорема Жордана о сходимости тригонометрического ряда Фурье для функции ограниченной вариации. Впоследствии рядом авторов (в частности, Н. Винером[1], Л. Юнгом[2], Р. Салемом[3], А. Гарсиа и С. Сойером[4]) были построены классы функций ограниченной обобщенной вариации и доказаны аналоги теоремы Жордана для функций из этих более широких классов.

Все эти классы и соответствующие им признаки сходимости ряда Фурье обладают следующим свойством: поскольку при гомеоморфизме $\mathfrak{T} : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ (здесь и далее через $\mathbb{T}$ обозначается отрезок $[-\pi, \pi]$) обычная вариация функции, а также ее обобщенные вариации, сохраняются, то для любого $\mathfrak{T}$ и для любой функции f из этих классов ряд Фурье функции $f \circ \mathfrak{T}$ сходится всюду, а если к тому же f непрерывна, то ряд Фурье $f \circ \mathfrak{T}$ сходится равномерно.

К. Гоффман и Д. Ватерман[5] поставили общую задачу описания класса $UGW(\mathbb{T})$ функций, ряды Фурье которых сходятся равномерно после любого гомеоморфизма отрезка $\mathbb{T}$, пробегаемого аргументом. В качестве одного из подходов к этой задаче Ватерман[6] определил в одномерном случае классы $\Lambda BV(I)$ функций ограниченной Λ-

[1]Wiener N., The quadratic variation of a function and its Fourier coefficients, J. Math. and Phys. MIT. 1924. V.3. P.72–94.

[2]Young L. C., Sur une generalisation de la notion de variation de puissance p-ieme bornee au sence de M. Wiener, et sur la convergence des series de Fourier // C. R. Acad. Sci. Paris, 1937. V.204. P.470–472.

[3]Salem R., Essais sur les series trigonometriques // Actualities Sci. Ind. No 862. Paris. 1940.

[4]Garsia, A. M., Sawyer S., On some classes of continuous functions with convergent Fourier series //J. of Math. and Mech. 1964. V.13. P.586-601.

[5]Goffman C., Waterman D., Functions whose Fourier series converge for every change of variable // Proc. Amer. Math. Soc. 1968. V.19. P.80–86.

[6]Waterman D., On convergence of Fourier series of functions of generalized bounded variation // Studia math. 1972. V.44. N2. P.107–117.

вариации и доказал для них аналог признака Жордана. Ватерманом было установлено, что его теорема не слабее предшествующих результатов такого типа. Вопрос об равенстве $HBV(\mathbb{T}) \cap C(\mathbb{T}) = UGW(\mathbb{T})$ был несколько позднее решен отрицательно А. А. Саакяном[7]. Обзор результатов, относящихся к поведению рядов Фурье при гомеоморфных заменах переменной, можно найти, в частности, в монографии Гоффмана, Нишиуры и Ватермана[8].

Другие классы функций, инвариантные относительно гомеоморфизма отрезка, в одномерном случае рассматривали, в частности, Е. А. Севастьянов[9] (классы функций с заданным порядком кусочно-монотонных аппроксимаций), З. А. Чантурия[10] (классы функций с заданным модулем изменения). Затем Е. И. Бережной[11] [12] предложил более общий подход, опирающийся на понятие симметричного пространства последовательностей, и показал, что теорема Ватермана является в смысле этого подхода самым сильным из возможных признаков равномерной сходимости.

В двумерном случае Г. Харди[13] определил класс $BV(\mathbb{T}^2)$ и доказал сходимость по Прингсхейму ряда Фурье функции из этого класса в каждой точке. Затем его результат был обобщен[14] на многомерный случай. Для функций двух переменных рассматривались также другие классы ограниченной обобщенной вариации, в частности, Φ-вариация

[7]Саакян А. А., О функциях ограниченной Λ-вариации // Докл. АН Арм. ССР. 1985. Т.81. N2. С.54–58.

[8]Goffman C., Nishiura T., Waterman D., Homeomorphisms in analysis. New York, AMS, 1997.

[9]Севастьянов Е. А., Кусочно монотонная аппроксимация и Φ-вариация //Analysis Math. 1975. V.1. N2. P.141–164.

[10]Чантурия З. А., Модуль изменения и его применение в теории рядов Фурье. //Докл. АН СССР. 1974. Т.214. N1. С.63–66.

[11]Бережной Е. И., Пространства функций обобщенной ограниченной вариации. I. Теоремы вложения. Оценки констант Лебега. // Сиб. мат. ж. 1999. Т.40. N5. С.997–1011.

[12]Бережной Е. И., Пространства функций обобщенной ограниченной вариации. II. Вопросы равномерной сходимости рядов Фурье. // Сиб. мат. ж. 2001. Т.42. N3. С.515–532.

[13]Hardy G. H., On double Fourier series and especially those which represent the double zeta-function with real and incommensurable parameters// Quart. J. Math. V.37. N1. 1906. P.53–79.

[14]Morse M., Transe W., The Frechet variation and a generalization for multiple Fourier series of the Jordan test// Rev. Mat. Univ. Parma. 1950. V.1. P.3–18.

в работах Б. И. Голубова[15 16 17], многомерные классы Чантурия в работе Г. Ш. Бекаури[18].

А. А. Саакян[19] ввел понятие Λ-вариации функции двух переменных. Он доказал, что для любой измеримой функции ограниченной гармонической вариации ее ряд Фурье сходится по Прингсхейму в каждой регулярной точке, и сходимость равномерна внутри любого открытого множества, на котором функция непрерывна.

Рядом авторов, в первую очередь, М. И. Дьяченко[20], изучался вопрос о регулярности всех точек для функций из заданного класса Ватермана, т.е. о существовании в каждой точке пределов по координатным квадрантам (октантам и т.д.). Для того, чтобы все точки были регулярными для любой функции из класса $\Lambda BV(\mathbb{T}^2)$, необходимо и достаточно условие $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\lambda_n)^2} = \infty$. Если же оно нарушено, то в классе содержатся всюду разрывные и даже неизмеримые функции. Невыполнение свойства регулярности всех точек для функций из классов Ватермана имеет и положительную сторону: благодаря этому эти классы могут оказаться шире других классов ограниченной обобщенной вариации, для которых указанное свойство выполнено.

Для классов Ватермана изучались другие виды сходимости рядов Фурье: сходимость сферических сумм в работах М. И. Дьяченко[20 21], сходимость треугольных сумм в работе автора[22], а также более об-

---

[15]Голубов Б. И., Функции обобщенной ограниченной вариации, сходимость их рядов Фурье и сопряженных тригонометрических рядов // Доклады АН СССР. 1972. Т.205. N6. С.1277–1280.

[16]Голубов Б. И., О сходимости двойных рядов Фурье функций обобщенной ограниченной вариации // Сиб. мат. ж. 1974. Т.15. N2. С.262–292.

[17]Голубов Б. И., О сходимости двойных рядов Фурье функций обобщенной ограниченной вариации. II // Сиб. мат. ж. 1974. Т.15. N4. С.767–783.

[18]Бекаури Г. Ш., О равномерной сходимости и суммируемости методом Чезаро отрицательного порядка кратных рядов Фурье // Сообщ. АН Груз. ССР. 1985. Т.118. N2. С.281–283.

[19]Саакян А. А., О сходимости двойных рядов Фурье функций ограниченной гармонической вариации // Изв. АН Арм. ССР. 1986. Т.21. N6. С.517–529.

[20]Dyachenko M. I., Waterman classes and spherical partial sums of double Fourier series //Analysis Math. 1995. V.21. N1. P.3–21.

[21]Дьяченко М. И., Сферические частичные суммы двойных рядов Фурье функций с ограниченной обобщенной вариацией // Матем. сб. 1997. Т.188. N1. С.29–58.

[22]Бахвалов А. Н., Классы Ватермана и треугольные частичные суммы двойных рядов Фурье // Analysis Math. 2001. V.27. N1. P.3–36.

щие U- и $U(K)$-сходимости в другой работе Дьяченко[23]. Позднее в совместной статье Дьяченко и Ватермана[24] было рассмотрено другое обобщение понятия Λ-вариации на двумерный случай и поведение прямоугольных сумм для такого обобщения.

Для функций одной переменной Ватерманом[25] были получены также результаты о суммируемости рядов Фурье методами Чезаро отрицательного порядка. При решении этой задачи были введены и использованы классы $C\Lambda V([a,b])$ функций, непрерывных по Λ-вариации. Эти классы представляют и самостоятельный интерес.

Задачу о совпадении классов $C\Lambda V([a,b])$ и $\Lambda BV([a,b])$, поставленную Ватерманом, рассматривали Форан и Флейсснер[26], Саблин[27] [28]. Критерий их совпадения в одномерном случае был установлен Ф. Прус-Вишнёвски[29] и состоит в том, что классы не совпадают, лишь если последовательность Λ растет достаточно медленно (неформально говоря, логарифмически).

В случае функций многих переменных, понятие непрерывности по Λ-вариации было впервые предложено автором (см. [1]). В двумерном случае такое определение одновременно рассматривалось О. С. Драгошанским[30]. Результаты Драгошанского показывают, что уже в двумерном изотропном случае картина существенно отличается от одномерной, в частности, классы $C\Lambda V$ и ΛBV могут не совпадать для последовательностей, растущих степенным образом. Во второй главе диссертации показано, что несовпадение этих классов для функций

---

[23] Дьяченко М. И., Двумерные классы Ватермана и u-сходимость рядов Фурье // Матем. сб. 1999. Т.190. N7. С.23–40.

[24] Dyachenko M. I., Waterman D., Convergence of double Fourier series and W-classes //Trans. Amer. Math. Soc. 2004. V.357. N1. P.397–407.

[25] Waterman D., On the summability of Fourier series of functions of Λ-bounded variation // Studia math. 1976. V.55. N1. P.87–95.

[26] Foran J., Fleissner R., A note on Λ-bounded variation. // Real Analysis Exchange. 1978/79. V.4. P.185–191.

[27] Саблин А. И., Λ-вариация и ряды Фурье // Изв. ВУЗов. Математика. 1987. N10. С.66–68.

[28] Саблин А. И., Функции ограниченной Λ-вариации и ряды Фурье. Дисс. …канд. физ.-мат. наук. Москва, 1987.

[29] Prus-Wiśniowski F., Bounded harmonic variation and the Garsia — Sawyer class // Real Analysis Exchange. 1994/95. V.20. N1. P.37–38.

[30] Драгошанский О. С., Непрерывность по Λ-вариации функций многих переменных // Матем. сб. 2003. Т.194. N7. С.57–82.

нескольких переменных является, в некотором смысле, типичным случаем.

Для функций двух переменных Гофманом и Ватерманом[31] был получен также результат о локализации прямоугольных частичных сумм ряда Фурье в терминах неполной гармонической вариации.

Первые результаты о сходимости и локализации рядов Фурье функций из классов Ватермана для размерности $m \geqslant 3$ были получены Саблиным в цитированных выше работах. Они относились только к непрерывным функциям, а также содержали дополнительные условия на локальное поведение гармонической вариации, причем вопрос о существенности этих условий не был решен. Одновременно и независимо классы функций ограниченной Λ-вариации для функций трех и более переменных были введены В. Райтгрубером[32], но в его работе изучены только некоторые элементарные свойства этих классов.

Позднее в работе О. Г. Саргсяна[33] утверждалось без доказательства, что результат Саакяна из цитированной выше статьи[19] верен для функций трех и более переменных. Однако, как следует из результатов третьей главы нашей диссертации, такое утверждение оказалось ошибочным.

Цель работы.

Диссертация посвящена изучению свойств многомерных классов Ватермана. Рассматриваются как свойства, связанные с их внутренней структурой, так и применение этих классов к вопросам сходимости кратных рядов и интегралов Фурье. Особое внимание при этом уделяется тем результатам, которые в многомерном случае качественно отличаются от одномерного и двумерного случаев. Некоторые результаты являются новыми и для функций одной или двух переменных.

[31]Goffman C., Waterman D., The localization principle for Fourier series // Studia math. 1980. V.69. N1. P.41–57.

[32]Reitgruber W., Funktionen von beschränkter gewichteter Schwankung //Sitzungsber. Osterr. Acad. Wiss. Math - Naturwiss. Kl. Abt. 2. 1987. V.196. N8–10. P.463–494.

[33]Саргсян О. Г., О сходимости и явлении Гиббса кратных рядов Фурье функции ограниченной гармонической вариации. // Изв. НАН Армении. Математика. 1993. Т.28. N3. С.3–20.

Научная новизна.

Все результаты диссертации являются новыми. Основные из них состоят в следующем:

1. Введено и изучено понятие непрерывности по Λ-вариации в многомерном случае. В частности, задача о сравнении классов функций ограниченной Λ-вариации с классами функций, непрерывных по Λ-вариации, полностью решена для важного случая $\Lambda^j = \{n^{b_j}\}$.
2. Изучено локальное поведение многомерной Λ-вариации и его связь с принадлежностью функции более узкому классу Ватермана.
3. Получены новые результаты о сходимости кратных рядов и интегралов Фурье по прямоугольникам, при этом выявлены качественные отличия между случаем размерности два и случаем более высокой размерности, связанные с особенностями локального поведения гармонической вариации.
4. Найдены достаточные условия для локализации прямоугольных частичных сумм ряда Фурье в терминах Λ-вариаций функции по части переменных. Показано, что требования типа непрерывности функции при этом нельзя полностью отбросить.
5. Получены новые результаты о суммируемости кратных рядов Фурье методами Чезаро отрицательного порядка, при этом найдены существенные отличия от одномерного случая и от результатов о сходимости.

Методы исследования.

В работе используются различные методы метрической теории функций одного и многих действительных переменных, методы гармонического анализа. Разработаны новые подходы к построению функций с некоторыми заданными свойствами.

Теоретическая и практическая ценность.

Работа носит теоретический характер. Ее результаты могут быть полезны в теории функций многих действительных переменных, в частности, при изучении кратных тригонометрических рядов Фурье, в теории приближений, при получении различных теорем вложения.

Апробация диссертации.

Основные результаты диссертации докладывались на семинаре по теории функций действительного переменного под руководством академика РАН, профессора П. Л. Ульянова и член-корреспондента РАН, профессора Б. С. Кашина, а затем под руководством член-корреспондента РАН, профессора Б. С. Кашина, профессоров Б. И. Голубова, С. В. Конягина и М. И. Дьяченко (многократно в 2002–2010) и на семинаре по теории ортогональных и тригонометрических рядов под руководством профессоров М. К. Потапова, В. А. Скворцова, Т. П. Лукашенко и М. И. Дьяченко (неоднократно в 2002–2007) на механико-математическом факультете МГУ имени М. В. Ломоносова; на международных симпозиумах «Ряды Фурье и их приложения» (Новороссийск, 2002, 2006, 2008), на Саратовских зимних школах «Современные проблемы теории функций и их приложения» (2004, 2006, 2008, 2010), на Воронежских зимних математических школах «Современные методы теории функций и смежные проблемы» (2003, 2005, 2007, 2011), на международной конференции «Дифференциальные уравнения и смежные вопросы», посвященной памяти И. Г. Петровского (Москва, 2007); на международной конференции «Современные проблемы анализа и преподавания математики», посвященной 105-летию академика С. М. Никольского (Москва, 2010).

Публикации.

Основные результаты диссертации опубликованы в 12 статьях автора, из которых 11 — в журналах, входящих в список ВАК. Их список приведен в конце автореферата. Кроме того, имеется 16 публикаций в сборниках тезисов конференций. Работ, написанных в соавторстве, нет.

Структура и объем работы.

Диссертация состоит из введения и пяти глав, разбитых на параграфы. Общий объем диссертации составляет 212 страниц. Список литературы включает (вместе с публикациями автора) 81 наименование.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Введение.

Во введении приводятся определения используемых понятий, дается обзор ранее известных результатов, связанных с тематикой диссертации.

Приведем здесь определение основного изучаемого понятия — классов функций ограниченной Λ-вариации (классов Ватермана).

Промежутком в $\mathbb{R}^m$ будем называть декартово произведение m невырожденных промежутков на прямой, т.е. параллелепипед ненулевого объема с ребрами, параллельными осям координат, который по каждой грани может быть как открытым, так и замкнутым. При этом будут использоваться обозначения $I = I^1 \times \cdots \times I^m$ или $I = \bigotimes_{k=1}^{m} I^k$. Для промежутка Δ на прямой через $\Omega(\Delta)$ обозначим множество всех конечных систем попарно непересекающихся интервалов $\{I_n\}_{n=1}^N$ таких, что $\overline{I_n} \subset \Delta$. Чтобы не загромождать обозначения, мы будем записывать такие системы просто как $\{I_n\}$, а запись $\{I_n^k\}$ или $\{I_{n_k}^k\}$ будет означать систему вида $\{I_n^k\}_{n=1}^N$, выбранную на k-м ребре m-мерного промежутка.

Для промежутка $\Delta \subset \mathbb{R}^m$ через $\overset{\circ}{\Delta}$ обозначим его внутренность.

Рассмотрим функцию f на $\mathbb{R}^m$, точку $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$ и операторы взятия разностей

$$\Delta_{\mathbf{x},s,j}(f) = f(\mathbf{x} + s\mathbf{e}_j) - f(\mathbf{x}),$$

$j = 1, \ldots, m$, где $\mathbf{e}_j$ — единичный вектор j-й оси. Пусть $I^k = (a^k, b^k)$. Величина

$$f(I) = \Delta_{\mathbf{a},b^1-a^1,1} \circ \cdots \circ \Delta_{\mathbf{a},b^m-a^m,m}(f)$$

называется *смешанным приращением (симметрической разностью)* функции f на $I = \bigotimes_{k=1}^{m} I^k$. Хорошо известно, что операторы $\Delta_{\mathbf{x},s,j}(f)$ при разных j коммутируют друг с другом, поэтому смешанное приращение симметрично относительно перестановок переменных.

Пусть множество $\{1, \ldots, m\}$ разбито на два непересекающихся множества ξ и τ, состоящих из p и $m-p$ элементов соответственно.

Если $\mathbf{x} = (x^1, \dots, x^m)$, то x^ξ — элемент $\mathbb{R}^p$, состоящий из компонент x^j, $j \in \xi$. Для промежутка $I = \bigotimes_{j=1}^{m} I^j$ обозначим $I^\xi = \bigotimes_{j\in\xi} I^j$.

Через $f(I^\xi, x^\tau)$ обозначим смешанное приращение f как функции аргументов x^j, $j \in \xi$, на I^ξ при фиксированных значениях x^k, $k \in \tau$, то есть, если $\xi = \{j_1, \dots, j_p\}$, то

$$f(I^\xi, a^\tau) = f(a^\tau, I^\xi) = \Delta_{\mathbf{a}, b^{j_1} - a^{j_1}, j_1} \circ \dots \circ \Delta_{\mathbf{a}, b^{j_p} - a^{j_p}, j_p}(f).$$

Определение 6. Неубывающая последовательность положительных чисел $\Lambda = \{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ *задает класс функций ограниченной* Λ*-вариации (класс Ватермана)*, если $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} = \infty$.

Далее будем рассматривать только такие Λ. Множество последовательностей, удовлетворяющих перечисленным условиям, будем обозначать через $\mathbb{L}$, а подмножество последовательностей из $\mathbb{L}$, которые к тому же неограниченно растут, — через $\mathbb{L}_0$. Для последовательности $\Lambda \in \mathbb{L}$ введем обозначение

$$\Lambda(n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\lambda_k}.$$

и определим последовательности $\Lambda_n = \{\lambda_{n+k}\}_{k=1}^{\infty}$. Положим также $H = \{n\}_{n=1}^{\infty}$. Ясно, что $H \in \mathbb{L}$.

Определение 7. Пусть $\Lambda^1, \dots, \Lambda^m$ — последовательности из $\mathbb{L}$. $(\Lambda^1, \dots, \Lambda^m)$*-вариацией функции* $f(x^1, \dots, x^m)$ *относительно переменных (по переменным)* $x^1, \dots, x^m$ по промежутку (возможно, бесконечному) $\Delta = \Delta^1 \times \dots \times \Delta^m$ называется величина

$$V_{\Lambda^1,\dots,\Lambda^m}^{x^1,\dots,x^m}(f;\Delta) = \sup_{\substack{\{\{I_{k_j}^j\}\}_{j=1}^m \\ \{I_{k_j}^j\} \in \Omega(\Delta^j),\, j=1,\dots,m}} \sum_{k_1,\dots,k_m} \frac{|f(I_{k_1}^1 \times \dots \times I_{k_m}^m)|}{\lambda_{k_1}^1 \dots \lambda_{k_m}^m}.$$

Пусть непустое множество $\xi \subset \{1, \dots, m\}$ состоит из элементов $j_1 < \dots < j_p$ и $\tau = \{1, \dots, m\} \setminus \xi$. Через

$$V_{\Lambda^\xi}^{x^\xi}(f; \Delta^\xi, x^\tau) = V_{\Lambda^\xi}^{x^\xi}(f; x^\tau, \Delta^\xi) = V_{\Lambda^{j_1},\dots,\Lambda^{j_p}}^{x^\xi}(f; \Delta^\xi, x^\tau)$$

обозначим $(\Lambda^{j_1},\dots,\Lambda^{j_p})$-вариацию f как функции переменных $x^\xi = (x^{j_1},\dots,x^{j_p})$ по всем этим переменным, взятую по p-мерному промежутку $\Delta^\xi = \Delta^{j_1}\times\dots\times\Delta^{j_p}$ при фиксированных значениях x^τ остальных переменных (если τ не пусто).

Далее, $(\Lambda^{j_1},\dots,\Lambda^{j_p})$-вариацией функции $f(x^1,\dots,x^m)$ относительно переменных x^ξ по промежутку $\Delta = \Delta^1\times\dots\times\Delta^m$ называется величина

$$V^{x^\xi}_{\Lambda^\xi}(f;\Delta) = V^{x^\xi}_{\Lambda^{j_1},\dots,\Lambda^{j_p}}(f;\Delta) = \sup_{x^\tau\in\Delta^\tau} V^{x^\xi}_{\Lambda^{j_1},\dots,\Lambda^{j_p}}(f;\Delta^\xi,x^\tau).$$

Определение 8. Величина

$$V_{\Lambda^1,\dots,\Lambda^m}(f;\Delta) = \sum_{\substack{\xi\subseteq\{1,\dots,m\}\\ \xi\neq\varnothing}} V^{x^\xi}_{\Lambda^\xi}(f;\Delta)$$

называется *(полной)* $(\Lambda^1,\dots,\Lambda^m)$*-вариацией функции* $f(x^1,\dots,x^m)$ *по промежутку* $\Delta=\Delta^1\times\dots\times\Delta^m$. Множество функций, для которых она конечна, называется *классом ограниченной* $(\Lambda^1,\dots,\Lambda^m)$*-вариации на* Δ и обозначается через $(\Lambda^1,\dots,\Lambda^m)BV(\Delta)$. Если все последовательности Λ^j совпадают и равны Λ, то класс будем называть *изотропным* и для краткости будем записывать $V^{x^\xi}_\Lambda$, V_Λ и $\Lambda BV(\Delta)$ соответственно. Если же хотя бы две из последовательностей Λ^j различны, то класс будем называть *анизотропным.* Величину V_H называют *гармонической вариацией.* Через $V_{\Lambda^\xi}(f;\Delta^\xi,x^\tau)$ или $V_{\Lambda^\xi}(f;x^\tau,\Delta^\xi)$ обозначим полную $(\Lambda^{j_1},\dots,\Lambda^{j_p})$-вариацию f как функции переменных $x^{j_1},\dots,x^{j_p}$ по p-мерному промежутку $\Delta^\xi=\Delta^{j_1}\times\dots\times\Delta^{j_p}$ при фиксированных значениях x^τ остальных переменных.

Определение 10. Функция $f\in(\Lambda^1,\dots,\Lambda^m)BV(\Delta)$ называется *непрерывной по* $(\Lambda^1,\dots,\Lambda^m)$*-вариации*, если для любого непустого множества $\xi=\{j_1,\dots,j_p\}\subset\{1,\dots,m\}$ и для любого $j_k\in\xi$ выполнено

$$\lim_{n\to\infty} V^{x^\xi}_{\Lambda^{j_1},\dots,\Lambda^{j_{k-1}},\Lambda^{j_k}_n,\Lambda^{j_{k+1}},\dots,\Lambda^{j_p}}(f;\Delta)=0.$$

Множество таких функций обозначим через $C(\Lambda^1,\dots,\Lambda^m)V(\Delta)$.

Далее во введении формулируются основные результаты диссертации. Перейдем к их изложению.

Глава 1 посвящена примерам (семействам примеров) функций, попадающих в заданный класс ограниченной Λ-вариации и не попадающих в более узкие. Поскольку не известны эффективные методы вычисления Λ-вариации даже для гладких функций, построение таких примеров оказывается достаточно сложной задачей.

В §1.1 собраны для удобства ссылок элементарные свойства классов ограниченной Λ-вариации.

В §1.2 приводится разработанная автором конструкция функций специального вида, названных «диагональными».

Пусть $m \geqslant 3$ и взят m-мерный промежуток Δ. Рассмотрим систему вложенных в Δ^1 интервалов $\{D_j^1\}_{j=1}^{\infty}$, объединение которых не равно всему Δ^1, и системы попарно непересекающихся интервалов $\{D_j^q\}_{j=1}^{\infty}$, $q = 2, \dots, m$, где $D_j^q = (a_j^q, b_j^q) \subset \Delta^q$. Пусть также выбраны точки $c_j^q \in D_j^q$, $q = 2, \dots, m$.

Возьмем любые функции $f_j(x)$ на Δ^1, удовлетворяющие условиям $f_j(t) = 0$ при $t \leqslant a_j^1$ и $f_j(t) = 0$ при $t \geqslant b_j^1$, а также такие произвольные функции $h_j^q(t)$ для $q = 2, \dots, m$, равные нулю при $t \leqslant a_j^q$ и $t \geqslant b_j^q$, что $h_j^q(c_j) = 1$ для всех j или $h_j^q(c_j) = -1$ для всех j (при данном q), и функции $h_j^q(t)$ монотонны (возможно, не строго) на $[a_j^q, c_j^q]$ и на $[c_j^q, b_j^q]$.

Назовем «*диагональной*» функцию на Δ, имеющую вид

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{\infty} \left(f_j(x^1) \prod_{q=2}^{m} h_j^q(x^q) \right). \tag{1}$$

Ясно, что носитель этой функции содержится в объединении замыканий попарно непересекающихся промежутков $D_j^1 \times \dots \times D_j^m$.

Нами доказывается принадлежность этих функций соответствующим классам Ватермана.

Теорема 1.2. *Пусть* $m \geqslant 3$ *и заданы последовательности* $\Lambda^p \in \mathbb{L}$, $p = 1, \dots, m$, *причем*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k^2 \dots \lambda_k^m} < \infty.$$

Тогда следующие условия эквивалентны:

(а) «Диагональная» функция $f(\mathbf{x})$, определенная формулой (1), принадлежит классу $(\Lambda^1, \ldots, \Lambda^m)BV(\Delta)$.

(б) При всех натуральных j выполнено $f_j \in \Lambda^1 BV(\Delta^1)$, и величины $V_{\Lambda^1}(f_j; \Delta^1)$ ограничены в совокупности некоторым числом C_0.

При этом выполняется оценка

$$V^{\mathbf{x}}_{\Lambda^1,\ldots,\Lambda^m}(f; \Delta) \leqslant C_0 \cdot C(m) \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k^2 \ldots \lambda_k^m}.$$

Конструкция «диагональных» функций применяется, в частности, для построения примеров расходящихся рядов и интегралов Фурье.

В §1.3 строятся еще две общие конструкции и соответствующие им классы примеров функций. Эти конструкции используют некоторые идеи, применявшиеся О. С. Драгошанским в его цитированной выше работе для двумерного изотропного случая.

Глава 2 посвящена изучению «внутренних» свойств классов.

В §2.1 рассматривается вопрос о вложении классов Ватермана друг в друга. Получено такое утверждение, включающее в качестве частного случая одномерный результат Перлмана и Ватермана[34]:

Теорема 2.1. *Пусть заданы последовательности $\Lambda^j \in \mathbb{L}$ и $M^j \in \mathbb{L}$, $j = 1, \ldots, m$. Класс функций $(M^1, \ldots M^m)BV(\Delta)$ вложен в класс функций $(\Lambda^1, \ldots, \Lambda^m)BV(\Delta)$ тогда и только тогда, когда при каждом $p = 1, \ldots, m$ найдется такое число C_p, что при всех натуральных N выполнено неравенство*

$$\Lambda^p(N) = \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{\lambda_n^p} \leqslant C_p M^p(N) = C_p \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{\mu_n^p}.$$

При этом, если $\tilde{C}_p = \max\{C_p, 1\}$, то выполняется оценка

$$V_{\Lambda^1,\ldots,\Lambda^m}(f; \Delta) \leqslant \tilde{C}_1 \ldots \tilde{C}_m V_{M^1,\ldots,M^m}(f; \Delta).$$

[34]Perlman S., Waterman D., Some remarks on functions of Λ-bounded variation //Proc. Amer. Math. Soc. 1979. V.74. N1. P.113–118.

Изучены также вложения одного класса Ватермана в класс функций, непрерывных по вариации другого класса. Установлена

Теорема 2.2. *(О структуре класса функций, непрерывных по Λ-вариации.) Для любых последовательностей $\Lambda^j \in \mathbb{L}_0$, $j = 1, \ldots, m$, класс функций $C(\Lambda^1, \ldots, \Lambda^m)V(\Delta)$ совпадает со следующими двумя:*

(i) Объединение классов $(M^1, \ldots, M^m)BV(\Delta)$ по всем таким последовательностям $M^j = \{\mu_n^j\} \in \mathbb{L}$, что $\dfrac{\mu_n^j}{\lambda_n^j} \downarrow 0$ при $n \to \infty$.

(ii) Объединение классов $(M^1, \ldots, M^m)BV(\Delta)$ по всем таким последовательностям $M^j = \{\mu_n^j\} \in \mathbb{L}$, что $\dfrac{\Lambda^j(n)}{M^j(n)} \to 0$ при $n \to \infty$.

Если все Λ^j совпадают, то к тому же

$$C\Lambda V(\Delta) = \bigcup_{M \in \mathbb{L}:\, \frac{\mu_n}{\lambda_n} \downarrow 0} MBV(\Delta).$$

В §2.2 подробно изучается понятие непрерывности по Λ-вариации.

Наши результаты, в отличие от предшествующих результатов других авторов, относятся к случаю произвольной размерности, как изотропному, так и анизотропному. Для более тонкой классификации, мы рассматриваем несколько способов определить понятие непрерывности по Λ-вариации в многомерном случае.

Здесь естественно взять четыре определения, получаемые из двух пар условий и совпадающие для функций одной переменной. Рассмотрим компоненту вариации

$$V^{x^\xi}_{\Lambda^{j_1}, \ldots, \Lambda^{j_p}}(f; \Delta) = \sup_{x^\tau \in \Delta^\tau} V^{x^\xi}_{\Lambda^{j_1}, \ldots, \Lambda^{j_p}}(f; \Delta^\xi, x^\tau).$$

Определим следующие условия:

(А) Для любого непустого $\xi = \{j_1, \ldots, j_p\} \subset \{1, \ldots, m\}$ и для любого $j_k \in \xi$ выполнено

$$\lim_{n \to \infty} V^{x^\xi}_{\Lambda^{j_1}, \ldots, \Lambda^{j_{k-1}}, \Lambda_n^{j_k}, \Lambda^{j_{k+1}}, \ldots, \Lambda^{j_p}}(f; \Delta^\xi, x^\tau) = 0.$$

(Б) Для любого непустого $\xi = \{j_1, \ldots, j_p\} \subset \{1, \ldots, m\}$ выполнено

$$\lim_{n \to \infty} V^{x^\xi}_{\Lambda_n^{j_1}, \ldots, \Lambda_n^{j_p}}(f; \Delta^\xi, x^\tau) = 0.$$

(1) Стремление к нулю в (А), (Б) равномерно по $x^\tau \in \Delta^\tau$ (при непустом τ).

(2) Стремление к нулю в (А), (Б) происходит для каждого $x^\tau \in \Delta^\tau$ (при непустом τ).

В определении 10 нами была взята пара условий (А1).

Теорема 2.3. *Для любого натурального m и любых $\Lambda^1, \ldots, \Lambda^m \in \mathbb{L}_0$ определения (А1), (А2) и (Б1) эквивалентны.*

Рассмотрим также более широкий (возможно, формально) класс:

Определение 15. Скажем, что функция f, принадлежащая классу $(\Lambda^1, \ldots, \Lambda^m)BV(\Delta)$ *слабо непрерывна по* Λ*-вариации* (обозначение: $f \in C^w(\Lambda^1, \ldots, \Lambda^m)V(\Delta)$), если для неё выполнена пара условий (Б2).

Конструкция «диагональных» функций (§1.2) позволяет установить следующее утверждение.

Теорема 2.4. *Пусть $m \geqslant 3$, Δ — промежуток в $\mathbb{R}^m$, а последовательности $\Lambda^1, \ldots, \Lambda^m \in \mathbb{L}$ таковы, что для некоторого $p \in \{1, \ldots, m\}$ выполнено условие*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \prod_{\substack{q=1 \\ q \neq p}}^{m} \frac{1}{\lambda_k^q} < \infty. \tag{2}$$

Тогда в классе функций ограниченной $(\Lambda^1, \ldots, \Lambda^m)$-вариации найдется непрерывная функция, которая не принадлежит классу непрерывных по $(\Lambda^1, \ldots, \Lambda^m)$-вариации функций. Если к тому же $\Lambda^1 \in \mathbb{L}_0$, то в классе слабо непрерывных по $(\Lambda^1, \ldots, \Lambda^m)$-вариации функций найдется непрерывная функция, которая не принадлежит классу непрерывных по $(\Lambda^1, \ldots, \Lambda^m)$-вариации функций.

При $m = 2$ пары последовательностей (Λ^1, Λ^2) с указанными в теореме свойствами не существует, так как условие (2) при $m = 2$ противоречит определению класса $\mathbb{L}$.

В свою очередь, конструкции, построенные в §1.3, позволяют построить другие примеры несовпадения классов.

Теорема 2.5. *Пусть $m \geqslant 2$, Δ — промежуток в $\mathbb{R}^m$, а последовательности $\Lambda^1, \ldots, \Lambda^m \in \mathbb{L}$ таковы, что для каждого $k \in \{1, \ldots, m\}$*

выполнено условие

$$\varlimsup_{n\to\infty}\frac{\lambda^k_{2n}}{\lambda^k_n}\leqslant 2^{d_k}$$

при некотором $d_k\in(0,1)$, *причем* $\sum_{k=1}^m d_k\leqslant m-1$. *Тогда класс слабо непрерывных по* $(\Lambda^1,\ldots,\Lambda^m)$*-вариации функций строго у́же, чем весь класс функций ограниченной* $(\Lambda^1,\ldots,\Lambda^m)$*-вариации, причем существует непрерывная функция, принадлежащая последнему классу и не принадлежащая первому.*

Теорема 2.6. *Пусть* $m\geqslant 2$, Δ *— промежуток в* $\mathbb{R}^m$ *и заданы последовательности* $\Lambda^j\in\mathbb{L}_0$, *причем существуют такие* $d\in(0,1)$ *и* $j_1,j_2\in\{1,\ldots,m\}$, $j_1\neq j_2$, *что*

$$\varlimsup_{n\to\infty}\frac{\lambda^{j_2}_{2n}}{\lambda^{j_2}_n}\leqslant 2^d,\qquad \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\lambda^{j_1}_k}\right)^{1/d}<\infty.$$

Тогда в классе $(\Lambda^1,\ldots,\Lambda^m)BV(\Delta)$ *найдется непрерывная функция, не попадающая в класс* $C(\Lambda^1,\ldots,\Lambda^m)V(\Delta)$, *но слабо непрерывная по* $(\Lambda^1,\ldots,\Lambda^m)$*-вариации.*

Затем результаты этого параграфа иллюстрируются на примере последовательностей вида $\Lambda^j=\{n^{b_j}\}_{n=1}^\infty$.

Следствие 2.1. *Если* $m\geqslant 2$, Δ *— промежуток в* $\mathbb{R}^m$ *и выбраны числа* $b_j\in[0,1)$, $j=1,\ldots,m$, *где* $\sum_{j=1}^m b_j\leqslant m-1$, *то*

$$(\{n^{b_1}\},\ldots,\{n^{b_m}\})BV(\Delta)\neq C^w(\{n^{b_1}\},\ldots,\{n^{b_m}\})V(\Delta).$$

Следствие 2.2. *Если* $m\geqslant 2$, Δ *— промежуток в* $\mathbb{R}^m$ *и выбраны числа* $b_j\in(0,1)$, $j=1,\ldots,m$, *где либо не все* b_j *одинаковы, либо* $b_1=\cdots=b_m=b>\frac{1}{m-1}$, *то*

$$C(\{n^{b_1}\},\ldots,\{n^{b_m}\})V(\Delta)\neq C^w(\{n^{b_1}\},\ldots,\{n^{b_m}\})V(\Delta).$$

В частности, если не все b_j одинаковы и их сумма не больше $(m-1)$, то все три класса попарно различны. Также они различны, если $b_1=\cdots=b_m=b\in(\frac{1}{m-1},\ 1-\frac{1}{m}]$.

Следствие 2.3. *Если* $m \geqslant 2$, Δ *— промежуток в* $\mathbb{R}^m$ *и выбраны числа* $b_j \in [0,1]$, $j = 1, \ldots, m$, *то равенство*

$$(\{n^{b_1}\}, \ldots, \{n^{b_m}\})BV(\Delta) = C(\{n^{b_1}\}, \ldots, \{n^{b_m}\})V(\Delta)$$

выполнено тогда и только тогда, когда $m = 2$ *и* $b_1 = b_2 > \frac{1}{2}$.

В §2.3 рассматривается проблема локального поведения вариации.

Пусть $\boldsymbol{\delta} \in (0, \infty)^m$, а $\boldsymbol{\zeta} \in \{-1, 1\}^m$. Будем обозначать через $(\mathbf{x}, \mathbf{x} + \boldsymbol{\zeta\delta})$ промежуток $\bigotimes\limits_{j=1}^{m} I^j$, где $I^j = (x^j, x^j + \delta^j)$ при $\zeta^j = 1$ и $I^j = (x^j - \delta^j, x^j)$ при $\zeta^j = -1$. Через $(\mathbf{x} - \boldsymbol{\delta}, \mathbf{x} + \boldsymbol{\delta})$ обозначим промежуток $\bigotimes\limits_{j=1}^{m}(x^j - \delta^j, x^j + \delta^j)$. В качестве нормы в $\mathbb{R}^m$ возьмем, для определенности, $\|\boldsymbol{\delta}\| = \max |\delta^j|$.

Как хорошо известно, для функции ограниченной вариации на отрезке справедливо следующее свойство: если в точке x_0 функция непрерывна справа, то ее вариация по отрезку $[x_0, x_0 + h]$ стремится к нулю при $h \to +0$. Используя введенные выше определения, его можно переформулировать следующим образом: для функции ограниченной вариации ее вариация по промежутку $(x_0, x_0 + h]$ стремится к нулю при $h \to +0$. В цитированных выше работах Д. Ватермана, А. А. Саакяна и А. И. Саблина при получении результатов о сходимости рядов Фурье доказывались аналогичные свойства для некоторых классов ограниченной Λ-вариации.

Автором [1, теорема 4] было впервые показано, что для некоторых классов Ватермана локальное стремление вариации к нулю в окрестности точки непрерывности может не иметь места (см. ниже следствие 2.4). В той же работе было впервые отмечено, что для таких случаев локальное стремление вариации к нулю тем не менее можно гарантировать, если функция попадает в некоторый более узкий класс Ватермана. Общее решение этой проблемы дают наши теоремы 2.8 и 2.9. Но вначале мы выделяем следующий частный результат, который был получен раньше ([1, теорема 2]) и доказывается короче и нагляднее.

Теорема 2.7. *Пусть* $\Lambda^1, \ldots, \Lambda^m \in \mathbb{L}$, Δ *— промежуток в* $\mathbb{R}^m$, *и пусть* $f \in C(\Lambda^1, \ldots, \Lambda^m)V(\Delta)$. *Тогда для любой регулярной точки*

$\mathbf{x} \in \overset{\circ}{\Delta}$ *и для любого* $\boldsymbol{\zeta} \in \{-1, 1\}^m$ *справедливо*

$$\lim_{\|\boldsymbol{\delta}\| \to +0} V_{\Lambda^1,\ldots,\Lambda^m}(f; (\mathbf{x}, \mathbf{x} + \boldsymbol{\zeta}\boldsymbol{\delta})) = 0.$$

Если к тому же $f(\mathbf{x})$ *непрерывна в окрестности компакта* K, *то*

$$\lim_{\|\boldsymbol{\delta}\| \to +0} V_{\Lambda^1,\ldots,\Lambda^m}(f; (\mathbf{x} - \boldsymbol{\delta}, \mathbf{x} + \boldsymbol{\delta})) = 0$$

равномерно по $\mathbf{x}$ *на* K.

В следующей общей теореме, если при каждом p выполнено (3), то в силу теоремы 2.2 получается то же утверждение, что и выше в теореме 2.7.

Теорема 2.8. *Пусть* $m \geqslant 2$, *последовательности* $\Lambda^p \in \mathbb{L}$ *и* $M^p \in \mathbb{L}$, $p = 1, \ldots, m$, *таковы, что для каждого* p *выполнено либо условие*

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\Lambda^p(n)}{M^p(n)} = 0, \tag{3}$$

либо пара условий

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \frac{\Lambda^p(n)}{M^p(n)} < \infty, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \prod_{\substack{q=1 \\ q \neq p}}^{m} \frac{1}{\mu_k^q} = \infty. \tag{4}$$

Тогда для любого промежутка $\Delta \subset \mathbb{R}^m$, *для произвольной функции* f *из класса* $(M^1, \ldots, M^m)BV(\Delta)$, *любой ее регулярной точки* $\mathbf{x} \in \overset{\circ}{\Delta}$ *и для каждого* $\boldsymbol{\zeta} \in \{-1, 1\}^m$ *выполнено условие*

$$\lim_{\|\boldsymbol{\delta}\| \to +0} V_{\Lambda^1,\ldots,\Lambda^m}(f; (\mathbf{x}, \mathbf{x} + \boldsymbol{\zeta}\boldsymbol{\delta})) = 0.$$

Если к тому же f *непрерывна в окрестности компакта* K, *то*

$$\lim_{\|\boldsymbol{\delta}\| \to +0} V_{\Lambda^1,\ldots,\Lambda^m}(f; (\mathbf{x} - \boldsymbol{\delta}, \mathbf{x} + \boldsymbol{\delta})) = 0.$$

равномерно по $\mathbf{x} \in K$.

Теорема 2.9. *Пусть последовательности* $\Lambda^p \in \mathbb{L}$ *и* $M^p \in \mathbb{L}$, $p = 1, \ldots, m$, *таковы, что для некоторого* p *нарушены условия* (3) *и (4). Тогда найдется непрерывная функция f, принадлежащая классу $(M^1,\ldots,M^m)BV([-1,1]^m)$, для которой*

$$\lim_{\delta\to+0} V_{\Lambda^1,\ldots,\Lambda^m}(f;(0,\delta)^m) > 0.$$

Отметим также непосредственно вытекающее из теорем 2.8 и 2.9

Следствие 2.4. *Пусть последовательности $\Lambda^1,\ldots,\Lambda^m\in\mathbb{L}$ таковы, что для каждого $p\in\{1,\ldots,m\}$ выполнено условие*

$$\sum_{j=1}^{\infty}\prod_{k\neq p}\frac{1}{\lambda_j^k}=\infty. \tag{5}$$

Тогда для любого промежутка $\Delta\subset\mathbb{R}^m$, для произвольной функции f из класса $(\Lambda^1,\ldots,\Lambda^m)BV(\Delta)$, любой ее регулярной точки $\mathbf{x}\in\mathring{\Delta}$ и для каждого $\boldsymbol{\zeta}\in\{-1,1\}^m$ выполнено условие

$$\lim_{\|\boldsymbol{\delta}\|\to+0} V_{\Lambda^1,\ldots,\Lambda^m}(f;(\mathbf{x},\mathbf{x}+\boldsymbol{\zeta}\boldsymbol{\delta}))=0.$$

Если к тому же f непрерывна в окрестности компакта K, то

$$\lim_{\|\boldsymbol{\delta}\|\to+0} V_{\Lambda^1,\ldots,\Lambda^m}(f;(\mathbf{x}-\boldsymbol{\delta},\mathbf{x}+\boldsymbol{\delta}))=0.$$

равномерно по $\mathbf{x}\in K$. Если же для некоторого p условие (5) нарушено, то существует непрерывная функция $f\in(\Lambda^1,\ldots,\Lambda^m)BV(\Delta)$, для которой

$$\lim_{\delta\to+0} V_{\Lambda^1,\ldots,\Lambda^m}(f;(0,\delta)^m)\geqslant 1.$$

Второе из трех утверждений этого следствия ранее было получено Саблиным.

Заключительный §2.4 этой главы посвящен классам ограниченной неполной Λ-вариации. Такие классы находят применение в задаче о локализации частичных сумм рядов Фурье, о чем будет сказано ниже при изложении результатов четвертой главы.

Первый тип таких классов был введен в работе Гоффмана и Ватермана ($m = 2$), а позднее — Саблина ($m\geqslant 3$) (см. выше сноски [27] [28] [31]). В этом определении налагаются условия на все компоненты вариации, кроме вариации по полному набору переменных.

Для удобства введем для числа $k \in \{1, \dots, m\}$ обозначение для множества $\bar{k} = \{1, \dots, m\} \setminus \{k\}$.

Определение 16. Пусть $\Lambda^1, \dots, \Lambda^m \in \mathbb{L}$, а Δ — m-мерный промежуток. Скажем, что $f \in (\Lambda^1, \dots, \Lambda^m)\bar{B}V(\Delta)$, если она интегрируема по Лебегу на Δ, при каждом $k = 1, 2, \dots, m$ функция

$$\varphi_k(x^k) = V_{\Lambda^{\bar{k}}}(f; x^k, \Delta^{\bar{k}}) = V_{\Lambda^1, \dots, \Lambda^{k-1}, \Lambda^{k+1}, \dots, \Lambda^m}(f; x^k, \Delta^{\bar{k}})$$

конечна п.в. на Δ^k и существуют такие функции $v_k \in L(\Delta^k)$, что

$$|\varphi_k(x^k)| \leqslant v_k(x^k) \text{ п.в.}$$

Мы выделим в классе $(\Lambda^1, \dots, \Lambda^m)\bar{B}V(\Delta)$ следующий подкласс.

Определение 17. Скажем, что $f \in (\Lambda^1, \dots, \Lambda^m)\bar{B}_0V(\Delta)$, если она интегрируема по Лебегу на Δ и при $k = 1, 2, \dots, m$ выполнены условия

$$\sup_{x^k \in \Delta^k} V_{\Lambda^{\bar{k}}}(f; x^k, \Delta^{\bar{k}}) < \infty,$$

т.е. полная вариация по $(m-1)$ переменной равномерно ограничена как функция от оставшейся переменной.

Определение 18. Пусть заданы последовательности $\Lambda^j \in \mathbb{L}$, $j = 1, \dots, m$. Скажем, что функция f принадлежит $(\Lambda^1, \dots, \Lambda^m)\widehat{B}V(\Delta)$, если она измерима и конечны все величины $V_{\Lambda^j}^{x^j}(f; \Delta)$, т.е. одномерные вариации по каждой переменной ограничены равномерно по всем значениям оставшихся $(m-1)$ переменной.

Из определений сразу следует, что

$$\begin{gathered}
(\Lambda^1, \dots, \Lambda^m)\bar{B}_0V(\Delta) \subset (\Lambda^1, \dots, \Lambda^m)\widehat{B}V(\Delta), \\
(\Lambda^1, \dots, \Lambda^m)\bar{B}_0V(\Delta) \subset (\Lambda^1, \dots, \Lambda^m)\bar{B}V(\Delta), \\
(\Lambda^1, \dots, \Lambda^m)BV(\Delta) \subset (\Lambda^1, \dots, \Lambda^m)\bar{B}_0V(\Delta).
\end{gathered}$$

Мы сравниваем условия на полную вариацию функции с условиями на одномерные компоненты вариации, и в качестве следствия получаем сравнение условий на $(m-1)$-мерные компоненты вариации с условиями на одномерные компоненты вариации. Получены следующие результаты.

Теорема 2.10. *Пусть* $m \geqslant 2$, $a \in [-1, m-1)$, *и* $\lambda_n = \frac{n}{\ln^a(n+1)}$. *Тогда класс* $\Lambda\widehat{B}V(\Delta)$ *не вкладывается в класс* $HBV(\Delta)$.

Теорема 2.11. *Пусть* $m \geqslant 2$, $a > m-1$ *и* $\lambda_n = \frac{n}{\ln^a(n+1)}$. *Тогда для любого промежутка* $\Delta \subset \mathbb{R}^m$ *класс* $\Lambda\widehat{B}V(\Delta)$ *вложен в класс* $HBV(\Delta)$.

В случае $m = 2$ эти теоремы являются частным случаем результатов Гогинавы и Саакяна[35].

Следствие 2.6. *Пусть* $m \geqslant 3$, $a \geqslant -1$ *и* $\lambda_n = \frac{n}{\ln^a(n+1)}$. *Тогда, если* $a > m-2$, *то для любого промежутка* $\Delta \subset \mathbb{R}^m$ *класс* $\Lambda\widehat{B}V(\Delta)$ *вложен в класс* $H\bar{B}_0V(\Delta)$. *Если же выполнено неравенство* $-1 \leqslant a < m-2$, *то класс* $\Lambda\widehat{B}V(\Delta)$ *не вложен в класс* $H\bar{B}V(\Delta)$.

Случай $a < -1$ не рассматривается, т.к. последовательность $\{\lambda_n\} = \{\frac{n}{\ln^a(n+1)}\}$ не попадает в класс $\mathbb{L}$.

В **главе 3** получены результаты о сходимости и расходимости рядов и интегралов Фурье для функций из классов ограниченной Λ-вариации. Напомним, что *прямоугольной частичной суммой* ряда Фурье называется

$$S_{\mathbf{N}}(f, \mathbf{x}) = S_{N_1,\ldots,N_m}(f, \mathbf{x}) = \sum_{n_1=-N_1}^{N_1} \cdots \sum_{n_m=-N_m}^{N_m} c_{\mathbf{n}} e^{i\langle \mathbf{n}, \mathbf{x}\rangle},$$

где

$$c_{\mathbf{n}} = c_{\mathbf{n}}(f) = c_{n_1,\ldots,n_m}(f) = \frac{1}{(2\pi)^m} \int\limits_{\mathbb{T}^m} f(\mathbf{x}) e^{-i\langle \mathbf{n}, \mathbf{x}\rangle} dx^1 \ldots dx^m \text{ –}$$

коэффициенты Фурье функции f. Если $N_1 = \cdots = N_m = N$, то такая частичная сумма называется *кубической* и обозначается $S_N(f, \mathbf{x})$. Ряд Фурье функции f называется *сходящимся по прямоугольникам (по*

[35] Goginava U., Sahakian A., On the convergence of double Fourier series of functions of bounded partial generalized variation. // East J. Approx. 2010. V.16. N2. P.109–121.

Прингсхейму) в точке $\mathbf{x}$, если существует предел прямоугольных частичных сумм при независимом стремлении N_j к бесконечности. Ряд Фурье функции f называется *сходящимся по кубам в точке* $\mathbf{x}$, если существует предел кубических частичных сумм при $N \to \infty$.

В цитированных выше работах А. И. Саблина была получена

Теорема J. *Пусть $f(x) \in HBV(\mathbb{T}^m)$ — непрерывная 2π-периодическая по каждому аргументу функция, и*

$$\lim_{\operatorname{diam} I \to 0} V_H(f; I) = 0$$

равномерно по всем промежуткам I. Тогда ее ряд Фурье равномерно сходится к ней по Прингсхейму.

Если $f(x) \in (\Lambda^1, \ldots, \Lambda^m)BV(\mathbb{T}^m)$ — непрерывная 2π-периодическая по каждому аргументу функция, причем $\lambda_k^q \leqslant k$ и для любого $p \in \{1, \ldots, m\}$ справедливо условие

$$\sum_{k=1}^{\infty} \prod_{\substack{q=1 \\ q \neq p}}^{m} \frac{1}{\lambda_k^q} = \infty, \tag{6}$$

то ее ряд Фурье равномерно сходится к ней по Прингсхейму.

Вопрос, можно ли в этой теореме отбросить условие (6) или хотя бы заменить его более слабым условием, послужил отправной точкой для результатов первых двух параграфов третьей главы.

В §3.1 находятся достаточные условия сходимости в регулярной точке, а для непрерывных функций — и равномерной сходимости. Вначале доказывается теорема о сходимости интегралов Фурье. В одномерном случае из результатов Ватермана и принципа равносходимости[36] следует, что если $f \in HBV(\mathbb{R}) \cap L(\mathbb{R})$, то в каждой точке $\mathbb{R}$ интеграл Фурье f сходится в смысле главного значения к величине $\frac{1}{2}(f(x+0) + f(x-0))$, и сходимость равномерна на любом отрезке, лежащем внутри интервала непрерывности функции, а для более широких классов это неверно. В многомерном случае свойство равносходимости, вообще говоря, не выполняется (см. в этой связи работу

[36]см., например, Зигмунд А., Тригонометрические ряды. Т.2. гл. 16, п.1; М., Мир, 1965.

И. Л. Блошанского[37]), более того, сходимость интеграла Фурье может существенно зависеть от поведения функции в окрестности бесконечности. Поэтому вопрос о представимости функции интегралом Фурье представляет самостоятельный интерес.

Введем обозначение

$$\mathfrak{S}_{\mathbf{A}}(f,\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{m/2}} \int\limits_{-A^1}^{A^1} \cdots \int\limits_{-A^m}^{A^m} \hat{f}(\boldsymbol{\xi}) e^{i\langle \boldsymbol{\xi},\mathbf{x}\rangle}\, d\boldsymbol{\xi},$$

где $\hat{f}(\boldsymbol{\xi})$ — преобразование Фурье функции f, а $A^j \in (0,+\infty)$. Наш основной результат состоит в следующем.

Теорема 3.1. *Пусть* $f \in L(\mathbb{R}^m) \cap HBV(\mathbb{R}^m)$. *Для заданных* $\delta > 0$ *и* $B > \delta$ *и точки* $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$ *положим*

$$E_{\delta,B}(\mathbf{x}) = \{\mathbf{t} \in \mathbb{R}^m \,:\, \exists j\, |x^j - t^j| \leqslant \delta,\, \exists k\, |x^k - t^k| \geqslant B\}.$$

Тогда в каждой регулярной точке $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$ *функции* f, *для которой выполнены два условия:*

(А)

$$\lim_{\|\boldsymbol{\delta}\|\to+0} \sum_{\boldsymbol{\zeta}\in\{-1,1\}^m} V_H(f;(\mathbf{x},\mathbf{x}+\boldsymbol{\zeta}\boldsymbol{\delta})) = 0;$$

(Б) найдутся $\delta_0 > 0$ *и* $B > \delta_0$, *такие, что* $f \in CHV(\Delta)$ *для любого параллелепипеда* $\Delta \subset E_{\delta_0,B}(\mathbf{x})$;
имеет место равенство

$$\lim_{\mathbf{A}\to+\infty} \mathfrak{S}_{\mathbf{A}}(f,\mathbf{x}) = f^*(\mathbf{x}).$$

Здесь $\mathbf{A} \to +\infty$ *означает, что* $\min\limits_j A^j \to +\infty$, *то есть сходимость понимается в смысле Прингсхейма.*

На основе этой теоремы мы получаем теорему о рядах Фурье, которая обобщает первую часть теоремы J. Мы избавляемся от условия

[37] Блошанский И. Л., О равносходимости разложений в кратный тригонометрический ряд Фурье и интеграл Фурье. //Матем. заметки. 1975. Т.18. N2. С.153-168.

непрерывности, при этом, естественно, равномерная сходимость заменяется поточечной.

Теорема 3.3. *Пусть* $f \in HBV(\mathbb{T}^m)$. *Тогда в каждой регулярной точке* $\mathbf{x} \in \mathbb{T}^m$ *функции* f, *для которой*

$$\lim_{\|\boldsymbol{\delta}\| \to +0} \sum_{\boldsymbol{\zeta} \in \{-1,1\}^m} V_H(f; (\mathbf{x}, \mathbf{x} + \boldsymbol{\zeta}\boldsymbol{\delta})) = 0,$$

ее ряд Фурье сходится по Прингсхейму к величине $f^*(\mathbf{x})$.

Затем мы применяем результаты §2.3, чтобы получить условия сходимости в терминах принадлежности функции более узкому классу. Полученные условия являются обобщением второй части теоремы J. Вместе с тем следует подчеркнуть их отличие. Саблин нашел условие на класс $\Lambda BV(\mathbb{T}^m)$, гарантирующее «хорошее» локальное поведение Λ-вариации, из чего делался вывод о «хорошем» локальном поведении гармонической вариации. Следствие 2.4 показывает, что на этом пути усилить вторую часть теоремы J не получится.

Мы же приводим условия на класс $\Lambda BV(\mathbb{T}^m)$, гарантирующие «хорошее» локальное поведение *гармонической* вариации, и эти условия оказываются качественно слабее.

Прежде всего, комбинируя первую часть теоремы J и теорему 2.7, получаем такое утверждение.

Следствие 3.1. *Пусть* $f(x) \in CHV(\mathbb{T}^m)$ *— непрерывная* 2π-*периодическая по каждому аргументу функция. Тогда ее ряд Фурье равномерно сходится к ней по Прингсхейму на* $\mathbb{T}^m$.

В частности, рассмотрим классы $\Lambda BV(\mathbb{T}^m)$ для $\Lambda = \{n^\gamma\}_{n=1}^\infty$. Такая последовательность удовлетворяет условию (6) при $0 < \gamma \leqslant \frac{1}{m-1}$. В то же время $\Lambda BV(\mathbb{T}^m) \subset CHV(\mathbb{T}^m)$ для любого $\gamma \in (0,1)$ независимо от размерности по теореме 2.2. Таким образом, при $m \geqslant 3$ следствие 3.1 оказывается сильнее второй части теоремы J, и чем выше размерность, тем более существенным оказывается это усиление.

Аналогично из теоремы 3.3 и теоремы 2.7 вытекает

Следствие 3.2. *Пусть* $f \in CHV(\mathbb{T}^m)$. *Тогда в каждой регулярной точке* $\mathbf{x} \in \mathbb{T}^m$ *функции* f *ее ряд Фурье сходится по Прингсхейму к величине* $f^*(\mathbf{x})$.

Сходный результат получается и для интегралов Фурье.

Следствие 3.3. *Пусть* $f \in L(\mathbb{R}^m) \cap CHV(\mathbb{R}^m)$. *Тогда в каждой регулярной точке* $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$ *функции* f *имеет место равенство*

$$\lim_{\mathbf{A}\to+\infty} \mathfrak{S}_{\mathbf{A}}(f, \mathbf{x}) = f^*(\mathbf{x}).$$

Отметим также, что для размерности $m = 2$ упоминавшиеся выше результаты Драгошанского позволяет формально ослабить условия в следствии 3.3.

Следствие 3.5. *Пусть* $f \in L(\mathbb{R}^2) \cap HBV(\mathbb{R}^2)$. *Тогда в каждой регулярной точке* $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ *функции* f *имеет место равенство*

$$\lim_{\mathbf{A}\to+\infty} \mathfrak{S}_{\mathbf{A}}(f, \mathbf{x}) = f^*(\mathbf{x}).$$

Более точные условия для рядов получаются, если вместо теоремы 2.7 применить теорему 2.8.

Теорема 3.4. *Пусть* $m \geqslant 2$, *последовательности* $\Lambda^p \in \mathbb{L}$, $p = 1, \ldots, m$, *таковы, что для каждого* p *выполнено либо условие*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n+1)}{\Lambda^p(n)} = 0, \tag{7}$$

либо пара условий

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{\ln(n+1)}{\Lambda^p(n)} < \infty, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \prod_{\substack{q=1\\ q\neq p}}^{m} \frac{1}{\lambda_k^q} = \infty. \tag{8}$$

Тогда для произвольной функции f *из класса* $(\Lambda^1, \ldots, \Lambda^m)BV(\mathbb{T}^m)$ *и любой ее регулярной точки* $\mathbf{x}$ *ряд Фурье функции* f *сходится по Прингсхейму в точке* $\mathbf{x}$ *к величине* $f^*(\mathbf{x})$. *Если к тому же* f *непрерывна, то ее ряд Фурье сходится по Прингсхейму равномерно.*

§3.2 посвящен построению примеров функций из классов ограниченной гармонической вариации с расходящимся в точке рядом или интегралом Фурье. Эти теоремы показывают существенность условий на локальное поведение вариации и на класс в результатах §3.1.

Теорема 3.5. *Пусть* $m \geqslant 3$, *а последовательности* $\Lambda^1, \ldots, \Lambda^m \in \mathbb{L}$ *таковы, что*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\ln(n+1)}{\Lambda^1(n)} > 0, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k^2 \ldots \lambda_k^m} < \infty.$$

Тогда в классе $(\Lambda^1, \ldots, \Lambda^m)BV(\mathbb{T}^m)$ *существует непрерывная функция, ряд Фурье которой расходится по кубам в точке* $\mathbf{0} = (0, \ldots, 0)$.

В частности, условия этой теоремы выполнены, если $m \geqslant 3$ и $\Lambda^j = H$ при всех j. Таким образом, для размерности $m \geqslant 3$ нельзя заменить в следствии 3.2 класс $CHV(\mathbb{T}^m)$ классом $HBV(\mathbb{T}^m)$.

Теорема 3.5 показывает окончательность условий на класс в теореме 3.4. Действительно, если хотя бы для одного p нарушено первое из условий (8), то найдется функция из одномерного класса $\Lambda^p BV(\mathbb{T})$, ряд Фурье которой расходится в точке. Если же первое из условий (8) выполнено при всех p, но хотя бы при одном p нарушено как условие (7), так и второе из условий (8), то применима теорема 3.5.

Аналогичный пример строится и для интегралов Фурье.

Теорема 3.6. *Пусть* $m \geqslant 3$, *а последовательности* $\Lambda^1, \ldots, \Lambda^m \in \mathbb{L}$ *таковы, что*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\ln(n+1)}{\Lambda^1(n)} > 0, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k^2 \ldots \lambda_k^m} < \infty. \tag{9}$$

Тогда в классе $(\Lambda^1, \ldots, \Lambda^m)BV(\mathbb{R}^m)$ *существует непрерывная функция* $f(\mathbf{x}) \in L(\mathbb{R}^m)$, *тождественно равная нулю вне* $(-\pi, \pi)^m$, *такая, что величины* $\mathfrak{S}_{\mathbf{A}}(f, \mathbf{0})$ *расходятся даже в смысле сходимости по кубам.*

Но для интегралов строится и пример другого рода.

Теорема 3.7. *Пусть* $m \geqslant 3$, *а последовательности* $\Lambda^2, \ldots, \Lambda^m \in \mathbb{L}$ *удовлетворяют второму из условий (9). Тогда существует непрерывная функция* $f(\mathbf{x})$ *из класса* $(H, \Lambda^2, \ldots, \Lambda^m)BV(\mathbb{R}^m) \cap L(\mathbb{R}^m)$, *тождественно равная нулю на* $(-\pi, \pi)^m$, *такая, что величины* $\mathfrak{S}_{\mathbf{A}}(f, \mathbf{0})$ *расходятся даже в смысле сходимости по кубам.*

Таким образом, при $m \geqslant 3$ в классе $L(\mathbb{R}^m) \cap HBV(\mathbb{R}^m)$ не выполняется свойство локализации для кратных интегралов Фурье, в то время как в классе $HBV(\mathbb{T}^m)$ свойство локализации для рядов Фурье выполнено по теореме 3.3. При $m = 2$ свойство локализации для кратных интегралов Фурье выполнено в силу следствия 3.5.

Отметим также, что построенные в теоремах 3.5 — 3.7 функции - контрпримеры слабо непрерывны по гармонической вариации, то есть среди разных обобщений понятия непрерывности по вариации именно введенное и рассмотренное нами в качестве основного определение непрерывности по Λ-вариации оказывается полезным для изучения сходимости рядов Фурье.

Для наглядности посмотрим теперь, что дают результаты первых двух параграфов главы 3 для некоторых простых примеров последовательностей. Определим, гарантирует ли принадлежность измеримой 2π-периодической функции классу $(\Lambda^1, \ldots, \Lambda^m)BV(\mathbb{T}^m)$ сходимость её тригонометрического ряда Фурье по прямоугольникам в каждой регулярной точке.

Пусть вначале $\Lambda^j = \{n^{b_j}\}$, где $b_j \in [0,1]$, $j = 1, \ldots, m$. Здесь выделяется ряд подслучаев в зависимости от того, при скольких $j \in \{1, \ldots, m\}$ выполнено условие $b_j = 1$, т.е. $\Lambda^j = H$.

- Если $b_j < 1$ при каждом j, то соответствующий класс по теореме 2.2 вложен в класс функций, непрерывных по гармонической вариации, и по следствию 3.1 сходимость гарантируется.

- Если найдутся три различных j, при которых $b_j = 1$, то такой класс будет удовлетворять условиям теоремы 3.5, и в нем существует непрерывная функция с расходящимся в точке рядом Фурье.

- Если $b_j < 1$ при всех j, кроме одного, например, кроме $j = 1$, то результат будет зависеть от величины $S = \sum_{j=2}^m b_j$. Если $S \leqslant 1$, то мы оказываемся в условиях теоремы 3.4, и сходимость гарантируется, а если $S > 1$ — в условиях теоремы 3.5, и существует пример расходимости.

- Если $b_j = 1$ при двух j, то гарантировать сходимость можно лишь в том случае, когда $b_j = 0$ при остальных j.

Для варианта, когда среди Λ^j есть две последовательности H, интересен также пример, когда остальные последовательности растут логарифмически.

- Пусть для определенности $\Lambda^1 = \Lambda^2 = H$, $\Lambda^j = \{\ln^{d_j}(n+1)\}$ при $j \geqslant 3$. Тогда результат будет зависеть от величины $S^* = \sum_{j=3}^m d_j$. Если $S^* \leqslant 1$, то мы оказываемся в условиях теоремы 3.4, и сходимость гарантируется, а если $S^* > 1$ — в условиях теоремы 3.5, и существует пример расходимости.

В заключительном параграфе третьей главы (§3.3) изучается поведение коэффициентов Фурье функций из многомерных классов Ватермана. В одномерном случае Шрамм и Ватерман[38] получили следующий результат.

Теорема. *Для функции f из класса $\Lambda BV(\mathbb{T})$ при $n \to \infty$ справедлива оценка*

$$|c_n(f)| \leqslant \frac{CV_\Lambda(f;\mathbb{T})}{\Lambda(n)}.$$

Позднее Саблин показал, что для функции f из класса $C\Lambda V(\mathbb{T})$ справедлива оценка $|c_n(f)| = o(1/\Lambda(n))$ при $n \to \infty$.

В многомерном случае, мы вначале доказываем оценки сверху.

Теорема 3.8. *Пусть $\Lambda^1, \dots \Lambda^m \in \mathbb{L}$. Для любой функции f из класса $(\Lambda^1, \dots, \Lambda^m)BV(\mathbb{T}^m)$ ее тригонометрические коэффициенты Фурье при $n_j \neq 0$ удовлетворяют оценке*

$$|c_{\mathbf{n}}(f)| \leqslant \frac{C(m)V_{\Lambda^1,\dots,\Lambda^m}(f;\mathbb{T}^m)}{\Lambda^1(|n_1|)\dots\Lambda^m(|n_m|)}. \tag{10}$$

Следствие 3.6. *Пусть $\Lambda^1, \dots \Lambda^m \in \mathbb{L}$, дана функция f из класса $(\Lambda^1, \dots, \Lambda^m)BV(\mathbb{T}^m)$, множество $\{1, \dots, m\}$ разбито на две непустые*

[38]Schramm M., Waterman D., On the magnitude of Fourier coefficients // Proc. Amer. Math. Soc. 1982. V.85. N3. P.407–410.

части γ *и* ξ. *Если номер* $\mathbf{n}$ *таков, что* $n_j = 0$ *тогда и только тогда, когда* $j \in \gamma$, *то тригонометрические коэффициенты Фурье функции* f *удовлетворяют оценке*

$$|c_{\mathbf{n}}(f)| \leqslant \frac{C(m)V_{\Lambda^1,\dots,\Lambda^m}(f;\mathbb{T}^m)}{\prod_{j\in\xi}\Lambda^j(|n_j|)}.$$

Следствие 3.7. *Пусть* $\Lambda^1,\dots\Lambda^m \in \mathbb{L}$, $M^1 \in \mathbb{L}$, *и пусть функция* f *принадлежит классу* $(M^1,\Lambda^2,\dots,\Lambda^m)BV(\mathbb{T}^m)$, *где*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\Lambda^1(n)}{M^1(n)} = 0.$$

Тогда ее тригонометрические коэффициенты Фурье при $\min_j |n_j| \to \infty$ *удовлетворяют оценке*

$$|c_{\mathbf{n}}(f)| = o\left(\frac{1}{\Lambda^1(|n_1|)\dots\Lambda^m(|n_m|)}\right). \qquad (11)$$

В частности, если $f \in C(\Lambda^1,\dots,\Lambda^m)V(\mathbb{T}^m)$, *то для её коэффициентов Фурье выполнено условие* (11).

Теорема 3.9. *Пусть* $\Lambda^1,\dots\Lambda^m \in \mathbb{L}$ *и* $f \in (\Lambda^1,\dots,\Lambda^m)BV(\mathbb{T}^m)$, *где последовательность* Λ^1 *такова, что* $\Lambda^1 BV(\mathbb{T}) = C\Lambda^1 V(\mathbb{T})$. *Тогда для любых фиксированных* $n_2,\dots,n_m \neq 0$ *справедлива оценка*

$$|c_{\mathbf{n}}(f)| = o\left(\frac{1}{\Lambda^1(|n_1|)}\right)$$

при $n_1 \to \infty$.

Замечание: Оценки, аналогичные установленым выше, верны, очевидно, также для коэффициентов Фурье по системе произведений синусов и косинусов.

Затем в некоторых случаях несовпадения классов устанавливаются оценки снизу и показывается, что для всего большего класса нельзя поставить “o” вместо “O”. Точнее имеет место

Теорема 3.10. *Пусть* $m \geqslant 2$ *и заданы неограниченные последовательности* $\Lambda^j \in \mathbb{L}$, $j = 1,\dots,m$, *причем при каждом* j *выполнено* *условие*

$$\varlimsup_{n\to\infty} \frac{\lambda^j_{2n}}{\lambda^j_n} \leqslant 2^{d_j},$$

где числа $d_j \in [0,1)$ *удовлетворяют неравенству* $\sum_{j=1}^m d_j \leqslant m-1$. *Тогда в классе* $(\Lambda^1,\ldots,\Lambda^m)BV(\mathbb{T}^m)$ *найдется непрерывная функция, синус-коэффициенты Фурье которой удовлетворяют условию*

$$\varlimsup_{n\to\infty} b_{n,\ldots,n}(f)\cdot\Lambda^1(n)\ldots\Lambda^m(n) > 0.$$

Интересно сопоставить этот пример с теоремой 3.9. В частности, если $\Lambda^j = \Lambda = \{n^a\}_{n=1}^\infty$ при $0 < a \leqslant \frac{m-1}{m}$, то класс удовлетворяет условиям и теоремы 3.10, и теоремы 3.9, т.е. в оценке (10) можно поставить "o" вместо "O", когда мы увеличиваем только один индекс, и нельзя этого сделать, если мы увеличиваем сразу все индексы.

В **главе 4** рассматриваются вопросы локализации прямоугольных частичных сумм.

Первый результат о локализации в терминах неполной гармонической вариации был получен Гофманом и Ватерманом (см. сноску [31]).

Теорема. *Пусть функция* $f \in L(\mathbb{T}^2)$ *равна нулю в окрестности нуля* $(-\delta,\delta)^2$, *и* $f \in H\bar{B}V(\mathbb{T}^2)$.

Тогда двойной тригонометрический ряд Фурье функции f *равномерно сходится к нулю по прямоугольникам на любом компакте* $K \subset (-\delta,\delta)^2$. *Для любого более широкого класса* $\Lambda\bar{B}V(\mathbb{T}^2)$ *утверждение перестаёт быть верным.*

Саблин распространил эту теорему на случай $m \geqslant 3$, но лишь для непрерывных функций, а при $m \geqslant 4$ — еще и наложив дополнительное условие на локальное поведение вариации.

В §4.1 нами изучена существенность условия на локальное поведение вариации в этом результате. Установлено, что, как и для случая сходимости, его можно заменить условием принадлежности более узкому классу, но нельзя отбросить.

Теорема 4.1. *Пусть* $\Lambda^1,\ldots\Lambda^m \in \mathbb{L}$, *и пусть непрерывная функция* f *равна нулю на открытом множестве* $G \subset \mathbb{T}^m$ *и принадлежит классу*

$(\Lambda^1, \ldots, \Lambda^m)\bar{B}V(\mathbb{T}^m)$, где $H(n)/\Lambda^j(n) \to 0$ при $n \to \infty$ для каждого $j = 1, \ldots, m$. Тогда кратный тригонометрический ряд Фурье этой функции равномерно сходится к нулю по прямоугольникам на любом замкнутом множестве $K \subset G$.

Теорема 4.2. *Существует непрерывная на $\mathbb{T}^4$ функция F, равная нулю при $|x^1| < \pi/2$, для которой*

$$\int\limits_{\mathbb{T}} V_{H^{\bar{k}}}(F; x^k, \mathbb{T}^3)\, dx^k < \infty$$

при $k = 1, 2, 3, 4$, но ее 4-кратный тригонометрический ряд Фурье не сходится к нулю по кубам в точке $\mathbf{0}$.

Для разрывных функций трех и более переменных результатов о локализации в терминах неполных Λ-вариаций известно не было. В §4.2 мы показываем, что непрерывность можно заменить подходящими условиями на регулярность точек. Эти условия относятся только к поведению функции в точках, у которых хотя бы одна координата совпадает с точкой, в которой рассматривается локализация. Таким образом, они существенно слабее, чем непрерывность функции всюду.

Теорема 4.3. *Пусть функция f равна нулю в окрестности точки $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{T}^m$ и принадлежит классу $H\bar{B}V(\mathbb{T}^m)$, причем для любого разбиения множества $\{1, \ldots, m\}$ на два непустых множества ξ и τ выполнены следующие условия:*

1. *для любых значений x_1^ξ точка x_0^τ является регулярной точкой функции $g(x^\tau) = f(x_1^\xi, x^\tau)$;*
2. *в каждой такой точке (x_1^ξ, x_0^τ)*

$$\lim_{\delta^\tau \to (+0)^{|\tau|}} \sum_{\zeta^\tau \in \{-1,1\}^{|\tau|}} V_{H^\tau}(f; x_1^\xi, (x_0^\tau, x_0^\tau + \zeta^\tau \delta^\tau)) = 0. \qquad (12)$$

Тогда кратный тригонометрический ряд Фурье этой функции сходится к нулю по прямоугольникам в точке $\mathbf{x}_0$.

Замечание. Для $m = 3$ условие (12) следует из остальных условий теоремы. Для $m \geqslant 4$ условие (12) нельзя отбросить, как видно из сравнения теоремы 4.3 с теоремой 4.2.

С другой стороны, в §4.3 мы показываем, что при $m \geqslant 3$ от указанных выше условий на регулярность отказаться нельзя.

Теорема 4.4. *Пусть последовательности* Λ^1 *и* Λ^2 *из* $\mathbb{L}$ *удовлетворяют условию* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^1 \lambda_n^2} < \infty$, *а* Λ^3 *— произвольная последовательность из* $\mathbb{L}$. *Тогда существует функция* F *на* $\mathbb{T}^3$, *равная нулю при* $|x^3| < \pi/2$ *и принадлежащая классу* $(\Lambda^1, \Lambda^2, \Lambda^3)\bar{B}V(\mathbb{T}^3)$, *3-кратный тригонометрический ряд Фурье которой не сходится к нулю по прямоугольникам в точке* $\mathbf{0}$.

Затем в §4.4 мы рассматриваем классы функций, для которых ограничения наложены лишь на одномерные компоненты Λ-вариации. Оказывается, что и в терминах таких классов можно установить условия локализации, причем не требующие регулярности точек, если ограничиться «не слишком вытянутыми» прямоугольными суммами.

Определение 19. Пусть $d \geqslant 1$. Скажем, что m-кратный ряд *сходится* d*-квазирегулярно* к числу S, если существуют такие постоянные $C_{j,l} \geqslant 1$, $l \neq j$, что все прямоугольные частичные суммы с номерами $\mathbf{n}$, удовлетворяющие оценкам

$$n_l \leqslant C_{j,l}(n_j)^d,$$

сходятся к S при увеличении $\min_j n_j$.

В частности, при $d = 1$ и $\lambda = \max_{j,l} C_{j,l}$ получаем известное определение λ-регулярной сходимости, или λ-сходимости.

Теорема 4.5. *Пусть* $m \geqslant 2$ *и заданы последовательности* $\Lambda^k \in \mathbb{L}$, $k = 1, \ldots, m$, *причем при каждом* k *выполнено условие*

$$\frac{\ln^{m-1}(n+1)}{\Lambda^k(n)} \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

Пусть функция f *равна нулю на открытом множестве* $G \subset \mathbb{T}^m$ *и принадлежит классу* $(\Lambda^1, \ldots, \Lambda^m)\widehat{B}V(\mathbb{T}^m)$. *Тогда для любого* $d \geqslant 1$ *кратный тригонометрический ряд Фурье этой функции равномерно*

d-квазирегулярно сходится к нулю на любом замкнутом множестве $K \subset G$.

Границы возможного усиления этой теоремы дает

Теорема 4.6. *Пусть $m \geqslant 2$, а последовательность $\Lambda \in \mathbb{L}$ такова, что*

$$\varlimsup_{n\to\infty} \frac{\ln^{m-1}(n+1)}{\Lambda(n)} = \infty.$$

Тогда существует непрерывная функция f из класса $\Lambda\widehat{B}V(\mathbb{T}^m)$, которая равна нулю на $[-1,1]^m$, но кубические частичные суммы ее ряда Фурье в точке $\mathbf{0}$ не сходятся к нулю.

В частности, из этих теорем вытекает

Следствие 4.2. *Пусть $m \geqslant 2$, а $\Lambda = \{\frac{n}{\ln^a(n+1)}\}$ для некоторого $a \geqslant -1$. Пусть $a > m-2$, функция f равна нулю на открытом множестве $G \subset \mathbb{T}^m$ и принадлежит классу $\Lambda\widehat{B}V(\mathbb{T}^m)$. Тогда для любого $d \geqslant 1$ кратный тригонометрический ряд Фурье этой функции равномерно d-квазирегулярно сходится к нулю на любом замкнутом множестве $K \subset G$. Если же $-1 \leqslant a < m-2$, то существует непрерывная функция f из класса $\Lambda\widehat{B}V(\mathbb{T}^m)$, которая равна нулю на $[-1,1]^m$, но кубические частичные суммы ее ряда Фурье в точке $\mathbf{0}$ не сходятся к нулю.*

Отметим также, что теоремы вложения, полученные в §2.4, показывают некоторую согласованность следствия 4.2 с результатами из §§4.1, 4.2 о локализации в терминах $(m-1)$-мерных вариаций. А именно, в силу следствия 2.6 класс $\Lambda\widehat{B}V(\mathbb{T}^m)$ с последовательностью $\Lambda = \{\frac{n}{\ln(n+1)^a}\}$ вкладывается при $a > m-2$ в класс $H\bar{B}_0V(\mathbb{T}^m)$, а при $-1 \leqslant a < m-2$ вложение даже в более широкий класс $HB_0V(\mathbb{T}^m)$ уже не имеет места.

В **главе 5** изучается суммируемость рядов Фурье функций ограниченной Λ-вариации методами Чезаро отрицательного порядка. Напомним соответствующие определения. Для заданного $\alpha > -1$ числа A_n^α определяются из формулы

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n^\alpha x^n = (1-x)^{-\alpha-1}, \text{ т.е. } A_n^\alpha = \frac{(\alpha+1)\dots(\alpha+n)}{n!}.$$

Пусть задан вектор $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$, где $\alpha_j > -1$. Тогда *прямоугольными средними Чезаро ряда Фурье порядка* $\boldsymbol{\alpha}$ называются величины

$$\sigma_{\mathbf{n}}^{\boldsymbol{\alpha}}(f, \mathbf{x}) = \left(\prod_{j=1}^{m} A_{n_j}^{\alpha_j}\right)^{-1} \sum_{\mathbf{k}=0}^{\mathbf{n}} \left(\prod_{j=1}^{m} A_{n_j-k_j}^{\alpha_j-1}\right) S_{\mathbf{k}}(f, \mathbf{x}),$$

где $S_{\mathbf{k}}(f, \mathbf{x})$ — прямоугольные суммы ряда Фурье. Мы рассматриваем сходимость таких средних в смысле Прингсхейма, т.е. при независимом стремлении n_j к бесконечности. Ряд называется $(C, \boldsymbol{\alpha})$-*ограниченным*, если его чезаровские средние указанного порядка ограничены.

В одномерном случае эта задача была впервые рассмотрена Ватерманом (см. сноску [25]), который установил такой результат.

Теорема. *Пусть* $\alpha \in (-1, 0)$. *Тогда для любой функции* f *из класса* $\{n^{\alpha+1}\}BV(\mathbb{T})$ *ее ряд Фурье всюду* (C, α)*-ограничен, и равномерно* (C, α)*-ограничен внутри каждого интервала непрерывности. Если к тому же* f *непрерывна по* $\{n^{\alpha+1}\}$*-вариации, то ее ряд Фурье всюду* (C, α)*-суммируется к среднему арифметическому пределов слева и справа, и сходимость средних равномерна внутри каждого интервала непрерывности.*

Было также показано, что класс $\{n^{\alpha+1}\}BV(\mathbb{T})$ нельзя заменить на более широкий. Саблин в качестве следствия своего упоминавшегося выше результата о совпадении классов показал, что во втором утверждении дополнительное условие непрерывности по $\{n^{\alpha+1}\}$-вариации можно отбросить.

Основной результат §5.1 заключается в следующем.

Теорема 5.1. *Пусть* $\alpha_j \in (-1, 0)$ *и* $\beta_j = \alpha_j + 1$, $j = 1, \ldots, m$. *Тогда для любой функции* f *из класса* $(\{n^{\beta_1}\}, \ldots, \{n^{\beta_m}\})BV(\mathbb{T}^m)$ *ее ряд Фурье равномерно* $(C, \boldsymbol{\alpha})$*-ограничен. Если к тому же* f *непрерывна по* $(\{n^{\beta_1}\}, \ldots, \{n^{\beta_m}\})$*-вариации, то ее ряд Фурье* $(C, \boldsymbol{\alpha})$*-суммируется к* $f^*(\mathbf{x}_0)$ *в каждой регулярной точке* $\mathbf{x}_0$, *и суммируемость равномерна на любом компакте, в окрестности которого функция непрерывна.*

Напомним, что для $m = 2$ также известны случаи, в которых совпадают классы $(\{n^{\beta_1}\}, \{n^{\beta_2}\})BV(\mathbb{T}^2)$ и $C(\{n^{\beta_1}\}, \{n^{\beta_2}\})V(\mathbb{T}^2)$. А именно, согласно упомянутому выше результату Драгошанского, совпадение имеет место при $\beta_1 = \beta_2 > \frac{1}{2}$. В этих случаях условие непрерывности по вариации оказывается несущественным.

В §5.2 показывается, что для размерности $m \geqslant 3$, а при некоторых α_j — и для размерности $m = 2$, условие непрерывности по вариации оказывается существенным для суммируемости и (в отличие от теоремы 3.3 о сходимости) даже для локализации средних. Точнее, имеют место следующие теоремы, первая из которых опирается на конструкцию из §1.2, а вторая и третья — на конструкции из §1.3.

Теорема 5.2. *Пусть $m \geqslant 3$, а числа $\alpha_j \in (-1, 0)$ и $\beta_j = \alpha_j + 1$, $j = 1, \ldots, m$ таковы, что при некотором $p \in \{1, \ldots, m\}$ выполнено условие*

$$\left(\sum_{j=1}^{m} \beta_j\right) - \beta_p > 1.$$

Тогда в классе $(\{n^{\beta_1}\}, \ldots, \{n^{\beta_m}\})BV(\mathbb{T}^m)$ найдется непрерывная функция f, равная тождественно нулю на $[-1, 1]^m$, ряд Фурье которой $(C, \boldsymbol{\alpha})$-не суммируется к нулю в нуле, даже если рассматривать только кубические средние.

Теорема 5.3. *Пусть $m \geqslant 2$, а числа $\alpha_j \in (-1, 0)$ и $\beta_j = \alpha_j + 1$, $j = 1, \ldots, m$ таковы, что $\sum_{k=1}^{m} \beta_k \leqslant m - 1$. Тогда существует непрерывная функция f из класса $(\{n^{\beta_1}\}, \ldots, \{n^{\beta_m}\})BV(\mathbb{T}^m)$, равная тождественно нулю на $\mathbb{T}^m \setminus (1, \pi)^m$, ряд Фурье которой $(C, \boldsymbol{\alpha})$-не суммируется к нулю в нуле, даже если рассматривать только кубические средние.*

Теорема 5.4. *Пусть $\alpha_j \in (-1, 0)$ и $\beta_j = \alpha_j + 1$, $j = 1, 2$, причем $\alpha_1 \neq \alpha_2$. Тогда существует непрерывная функция f из класса $(\{n^{\beta_1}\}, \{n^{\beta_2}\})BV(\mathbb{T}^2)$, равная тождественно нулю на $[-1, 1]^2$, ряд Фурье которой $(C, \boldsymbol{\alpha})$-не суммируется к нулю в нуле, даже если рассматривать только кубические средние.*

Из этих теорем вытекает

Следствие 5.2. *Пусть $m \geqslant 2$, $\alpha_j \in (-1, 0)$ и $\beta_j = \alpha_j + 1$, $j =$*

$1, \ldots, m$, *причем эти числа таковы, что*

$$(\{n^{\beta_1}\}, \ldots, \{n^{\beta_m}\})BV(\Delta) \neq C(\{n^{\beta_1}\}, \ldots, \{n^{\beta_m}\})V(\Delta)$$

(см. выше следствие 2.3). Тогда в классе $(\{n^{\beta_1}\}, \ldots, \{n^{\beta_m}\})BV(\mathbb{T}^m)$ *найдется непрерывная функция, равная нулю всюду на* $[-1, 1]^m$, *ряд Фурье которой* $(C, \boldsymbol{\alpha})$*-не суммируется к нулю в нуле, даже если рассматривать только кубические средние.*

Автор выражает искреннюю благодарность всем руководителям и участникам семинаров по теории функций действительного переменного и по теории ортогональных и тригонометрических рядов на механико-математическом факультете МГУ имени М. В. Ломоносова за внимание к результатам диссертации, за конструктивные обсуждения рассматриваемого круга задач.

В особенности автор благодарен профессору М. И. Дьяченко и профессору М. К. Потапову за поддержку при работе, а также за советы и предложения, которые помогли значительно улучшить изложение материала в диссертации.

Список основных работ автора по теме диссертации

[1] *А. Н. Бахвалов.* Непрерывность по Λ-вариации функций многих переменных и сходимость кратных рядов Фурье. // Матем. сборник. 2002. Т.193. N12. С.3–20.

[2] *А. Н. Бахвалов.* Представление непериодических функций ограниченной Λ-вариации интегралом Фурье в многомерном случае. // Известия РАН, Сер. матем. 2003. Т.67. N6. С.3–22.

[3] *А. Н. Бахвалов.* О локальном поведении многомерной Λ-вариации. //Матем. сборник. 2010. Т.201. N11. С.3-18.

[4] *А. Н. Бахвалов.* Суммирование методами Чезаро рядов Фурье функций из многомерных классов Ватермана. //Доклады АН. 2011. Т.437. N6. С.731–733.

[5] *А. Н. Бахвалов.* О коэффициентах Фурье функций из многомерных классов ограниченной Λ-вариации. //Вестник Моск. Ун-та, Сер.1. Математика. Механика. 2011. N1. С.10–18.

[6] *А. Н. Бахвалов.* О локальном поведении многомерной гармонической вариации. //Известия РАН, Сер. матем. 2006. Т.70. N4. С.3–20.

[7] *А. Н. Бахвалов.* О сходимости и локализации кратных рядов Фурье для классов функций ограниченной Λ-вариации. //Вестник Моск. Ун-та, Сер.1. Математика. Механика. 2008. N3. С.6–12.

[8] *А. Н. Бахвалов.* Примеры расходящихся рядов Фурье для классов функций ограниченной Λ-вариации. //Матем. заметки. 2009. Т.86. N5. С.664-672.

[9] *А. Н. Бахвалов.* О локализации для кратных рядов Фурье функций ограниченной гармонической вариации. //Вестник Моск. Ун-та, Сер.1. Математика. Механика. 2007. N1. С.13–18.

[10] *А. Н. Бахвалов.* О представлении непериодических функций ограниченной Λ-вариации интегралом Фурье. // Вестн. Моск. Ун-та, Сер. 1. Математика. Механика. 1998. N3. С. 6–12.

[11] *А. Н. Бахвалов.* О понятии непрерывности по Λ-вариации функций многих переменных.// Вестн. Моск. Ун-та, Сер. 1. Математика. Механика. 2003. N2. С.47–50.

[12] *А. Н. Бахвалов.* О локализации кратных рядов Фурье для функций ограниченной неполной Λ-вариации. //Современные проблемы математики и механики. Т.6. Математика. Выпуск 1. К 105-летию С. М. Никольского. М., изд-во Моск. ун-та. 2011. С.27-51.

Статьи [1]–[11] опубликованы в изданиях, входящих в список ВАК.