

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

Механико - математический факультет

На правах рукописи

УДК 514.763.8

МОРОЗОВ ОЛЕГ ИГОРЕВИЧ

**МЕТОД ПОДВИЖНОГО КОРЕПЕРА В ГЕОМЕТРИИ
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ**

01.01.02 – дифференциальные уравнения, динамические
системы и оптимальное управление

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

МОСКВА — 2011

Работа выполнена на кафедре высшей математики Московского государственного технического университета гражданской авиации

Научный консультант: доктор физико-математических наук,
профессор Сергеев Игорь Николаевич

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук,
профессор Красильщик Иосиф Семенович

доктор физико-математических наук,
профессор Аксенов Александр Васильевич

доктор физико-математических наук,
профессор Кушнер Алексей Гурьевич

Ведущая организация: Национальный исследовательский
ядерный университет „МИФИ“

Защита состоится 30 сентября 2011 г. в 16 часов 40 минут на заседании диссертационного совета Д 501.001.85 при Московском государственном университете имени М.В. Ломоносова по адресу 119991, ГСП-1, Москва, Ленинские Горы, МГУ имени М.В. Ломоносова, механико-математический факультет, аудитория 16-24.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке механико-математического факультета Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова (Главное здание, 14 этаж).

Автореферат разослан 26 августа 2011 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
Д 501.001.85 при МГУ
доктор физико-математических наук,
профессор

Сорокин В.Н.

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Дифференциальные уравнения являются эффективным средством описания и изучения разнообразных процессов в физике, технике, химии, биологии и экономике, а также важнейшей областью исследования, приводящей к развитию большинства отраслей математики. Функциональный анализ, линейная алгебра, численный анализ и многие разделы геометрии обязаны своим возникновением потребностям совершенствования теории дифференциальных уравнений. В частности, теория непрерывных групп, объединившая методы алгебры, анализа и геометрии и ставшая одним из краеугольных камней современной математики, была создана Софусом Ли для унификации методов интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений как обобщение теории Абеля – Галуа решения алгебраических уравнений. Непрерывные группы, названные Пуанкаре группами Ли, оказали глубокое влияние на многие области математики и физики, такие как теория гравитации, гидродинамика, квантовая механика, теория управления и другие.

Основой применения групп Ли для изучения дифференциальных уравнений является конструкция группы симметрий. В настоящее время имеется большое количество книг^{1, 2, 3, 4, 5, 6}, детально описывающих этот подход. В рамках классической теории Ли группа симметрий дифференциальных уравнений состоит из тех невырожденных (обратимых) замен его независимых и зависимых переменных, которые переводят совокупность решений этого уравнения в себя. Это условие дает сложные нелинейные уравнения для функций, задающих указанные преобразования (*определяющие уравнения* или *уравнения Ли*). Фундаментальное открытие Ли состояло в том, что в случае непрерывных групп преобразований эти нелинейные уравнения можно заменить на более простые условия, перейдя от преобразований, близких к тождественному, к порождающим их векторным полям (*инфинитезимальным генераторам*), то есть, на современном языке, перейдя от группы Ли к ее алгебре Ли. Коэффициенты инфинитезимальных генераторов удовлетворяют переопределенной системе линейных уравнений в частных производных (*инфинитезимальные определяющие уравнения*). Анализ этой системы и ее интегрирование позволяет в большинстве случаев найти инфинитезимальные генераторы группы симметрий явно, хотя, например, в случае одного обыкновенного уравнения первого порядка задача явного вы-

¹Lie S. Gesammelte Abhandlungen. Bd. 1 – 6, Leipzig: Teubner, 1919–1927

²Овсянников Л.В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978

³Ибрагимов Н.Х. Группы преобразований в математической физике. М.: Наука, 1983

⁴Виноградов А.М., Красильщик И.С., Лычагин В.В. Введение в геометрию нелинейных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1986

⁵Олвер П.Дж. Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям. М.: Мир, 1989

⁶Симметрии и законы сохранения уравнений математической физики / Под ред. А.М. Виноградова и И.С. Красильщика, М.: Факториал, 1997

числения инфинитезимальных генераторов равносильна задаче нахождения его общего решения, что не всегда возможно ⁷.

Знание группы симметрий дифференциального уравнения позволяет явно находить решения этого уравнения, инвариантные относительно различных подгрупп этой группы, а также строить новые решения из уже известных. В случае обыкновенных дифференциальных уравнений знание однопараметрической группы симметрий позволяет понизить порядок уравнения на единицу. Как показал Ли, этот подход позволяет унифицировать различные частные приемы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. Для уравнений в частных производных функции, задающие решения, инвариантные относительно подгрупп группы симметрий, удовлетворяют редуцированным уравнениям, содержащим, как правило, меньшее число переменных, что упрощает задачу их анализа и решения.

Многие модели математической физики описываются дифференциальными уравнениями, содержащими числовые параметры или произвольные функции, присутствие которых либо отражает неполноту информации о модели, либо вызвано требованием расширить область ее применения. Поэтому возникает задача классификации таких совокупностей дифференциальных уравнений и выбора уравнений с наиболее богатой математической структурой, например, таких уравнений, для которых можно построить большое количество точных решений. Методы теории групп Ли оказываются действенными в решении таких задач. К этому кругу вопросов примыкает проблема эквивалентности дифференциальных уравнений — задача нахождения необходимых и достаточных условий, при которых два данных дифференциальных уравнения связаны некоторой заменой переменных. Изоморфизм групп симметрий дает необходимое условие эквивалентности, в то время как достаточное условие формулируется в терминах дифференциальных инвариантов — функций от переменных уравнения и их производных, не меняющихся при преобразованиях, входящих в группу симметрий. Инфинитезимальный метод С. Ли позволяет находить дифференциальные инварианты групп симметрий, если явно известны ее инфинитезимальные генераторы. Для этого требуется проинтегрировать еще одну переопределенную систему уравнений в частных производных ^{2,6,8}. Зачастую эта система оказывается весьма сложной, что вызывает значительные трудности в применении инфинитезимального подхода к нахождению дифференциальных инвариантов и решению проблемы эквивалентности для дифференциальных уравнений.

За последние сорок лет важные обобщения методов классической теории Ли групп симметрий дифференциальных уравнений были разработаны

⁷Ritt J.F. Integration in Finite Terms. Liouville's Theory of Elementary Methods. N.Y.: Columbia University Press, 1948

⁸Olver P.J. Equivalence, Invariants, and Symmetry. Cambridge: Cambridge University Press, 1995

в связи с развитием метода обратной задачи рассеяния^{9,10} и связанных с ним концепций высших симметрий^{11,12} и высших законов сохранения. Последовательная геометрическая формулировка метода обратной задачи рассеяния, а также связанных с ней представлений нулевой кривизны, структур продолжений Уолквиста–Эстабрука, преобразований Бäckлунда, операторов рекурсии, нелокальных симметрий и нелокальных законов сохранения, основана на концепции дифференциального накрытия бесконечного продолжения дифференциального уравнения^{13,14}. Существование дифференциального накрытия для данного дифференциального уравнения позволяет применять разнообразные методы для его исследования и получать значительную информацию о его решениях^{9,10,15,16,17,18,19}. Поэтому проблема нахождения накрытия для данного дифференциального уравнения является весьма важной. В случае уравнений с двумя независимыми переменными имеется хорошо разработанный подход к этой проблеме, предложенный Уолквистом и Эстабруком²⁰ и развитый в работах^{21,13,14,22,23,24,25}. Для уравнений с тремя и более независимыми переменными проблема нахождения условий суще-

⁹Bäcklund Transformations, the Inverse Scattering Method, Solitons, and Their Applications. Lect. Notes Math., 515 / Miura R.M., Ed. N.Y.: Springer-Verlag, 1976

¹⁰Захаров В.Е., Манаков С.В., Новиков С.П., Питаевский Л.П. Теория солитонов. Метод обратной задачи. М.: Наука, 1980

¹¹Виноградов А.М. Теория высших инфинитезимальных симметрий нелинейных дифференциальных уравнений с частными производными // ДАН СССР, 1979, Т. 248, № 2, С. 274–278

¹²Vinogradov A.M. Local symmetries and conservation laws // Acta Appl. Math., 1984, Vol. 2, No 1, P. 21–78

¹³Krasil'shchik, I.S., Vinogradov, A.M. Nonlocal symmetries and the theory of coverings // Acta Appl. Math., 1984, Vol. 2, P. 79–86

¹⁴Krasil'shchik, I.S., Vinogradov, A.M. Nonlocal trends in the geometry of differential equations: symmetries, conservation laws, and Bäcklund transformations // Acta Appl. Math., 1989, Vol. 15, P. 161–209

¹⁵Geometrical Approaches to Differential Equations. Lect. Notes Math., 810. / Martini R., Ed. N.Y.: Springer-Verlag, 1980

¹⁶Калоджеро Ф., Дегасперис А. Спектральные преобразования и солитоны. Методы решения и исследования нелинейных эволюционных уравнений. М.: Мир, 1985

¹⁷Додд Р., Эйлбек Дж., Гиббон Дж., Моррис Х. Солитоны и нелинейные волновые уравнения. М.: Мир, 1988

¹⁸Богоявленский О.И. Опрокидывающиеся солитоны. Нелинейные интегрируемые уравнения. М.: Наука, 1991

¹⁹Konopelchenko B.G. Introduction to Multidimensional Integrable Equations. The Inverse Spectral Transform in 2+1 Dimensions. N.Y.: Plenum Press, 1992

²⁰Wahlquist H.D., Estabrook F.B. Prolongation structures of nonlinear evolution equations // J. Math. Phys., 1975, Vol. 16, P. 1–7

²¹Estabrook F.B.: Moving frames and prolongation algebras // J. Math. Phys., 1982, Vol. 23, P. 2071–2076

²²Hoenselaers C. More Prolongation Structures // Prog. Theor. Phys., 1986, Vol. 75, P. 1014–1029

²³Sakovich S.Yu. On zero-curvature representations of evolution equations // J. Phys. A, Math. Gen., 1995, Vol. 28, P. 2861–2869

²⁴Marvan M. A direct procedure to compute zero-curvature representations. The case $\mathfrak{sl}_2$ // Proc. Int. Conf. on Secondary Calculus and Cohomological Physics, Moscow, Russia, August 24–31, 1997

²⁵Igonin S. Coverings and the fundamental group for partial differential equations // J. Geom. Phys., 2006, Vol. 56, P. 939–998

ствования накрытий является гораздо более сложной^{26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34}. Как показано в работе³⁵, для большинства таких уравнений накрытия являются бесконечномерными. Поэтому проблема существования накрытия для дифференциального уравнения оказывается тесно связанной с бесконечномерными группами Ли (или *псевдогруппами Ли*).

Основы теории бесконечных непрерывных групп преобразований были созданы Ли (статьи в Bd. 5, S. 314–360, Bd. 6, S. 300–364 Собрания сочинений¹). Дальнейшее развитие теория псевдогрупп Ли получила в работах Э. Картана³⁶. В отличие от инфинитезимального метода Ли, подход Картана к теории псевдогрупп Ли не использует инфинитезимальные генераторы и основан на описании преобразований из псевдогруппы Ли в терминах инвариантных дифференциальных 1-форм, называемых *формами Маурера–Картана* этой псевдогруппы. Для любой псевдогруппы Ли ее формы Маурера–Картана могут быть найдены с помощью операций линейной алгебры и дифференцирования и без использования интегрирования, что делает подход Картана особенно удобным для применения в компьютерных системах аналитических вычислений, таких как MAPLE, REDUCE, MATHEMATICA и т.д. Выражения внешних дифференциалов форм Маурера–Картана в терминах самих этих форм дают *структурные уравнения* псевдогруппы Ли. Эти уравнения содержат полную информацию о псевдогруппе, в частности, их коэффициенты дают базисные дифференциальные инварианты псевдогруппы. Знание форм Маурера–Картана и дифференциальных инвариантов для псевдогруппы симметрии дифференциальных уравнений позволяет решать проблемы эквивалентности и классификации, а также явно находить отображения между эквивалентными уравнениями.

В то время как методу Ли посвящена обширная литература, нам известно

²⁶Кузьмина Г.М. О геометрии системы двух дифференциальных уравнений в частных производных // Ученые записки МГПИ, 1965, № 243, С. 99 – 108

²⁷Кузьмина Г.М. О возможности сведения системы двух уравнений с частными производными первого порядка к одному уравнению второго порядка // Ученые записки МГПИ, 1967, № 271, С. 67 – 76

²⁸Morris H.C. Prolongation structures and nonlinear evolution equations in two spatial dimensions // J. Math. Phys., 1976, Vol. 17, P. 1870–1872

²⁹Morris H.C. Prolongation structures and nonlinear evolution equations in two spatial dimensions: a general class of equations // J. Phys. A, Math. Gen., 1979, Vol. 12, P. 261–267

³⁰Tondo G.S. The eigenvalue problem for the three-wave resonant interaction in (2+1) dimensions via the prolongation structure // Lett. Nuovo Cimento, 1985, Vol. 44, P. 297–302

³¹Nucci M.C. Pseudopotentials for nonlinear evolution equations in 2+1 orders // Int. J. Non-Linear Mech., 1988, Vol. 23, P. 361–367

³²Harrison B.K. On methods of finding Bäcklund transformations in systems with more than two independent variables // J. Nonlinear Math. Phys., 1995, Vol. 2, P. 201–215

³³Harrison B.K. Matrix methods of searching for Lax pairs and a paper by Estévez // Proc. Inst. Math. NAS Ukraine, 2000, Vol. 30, Part 1, P. 17–24

³⁴Palese M. Bäcklund loop algebras for compact and non-compact non-linear spin models in (2+1) dimensions // Theor. Math. Phys., 2005, Vol. 144, No 1, P. 1014–1021

³⁵Marvan M. On zero-curvature representations of partial differential equations // Proc. Conf. on Diff. Geom. and Its Appl., Opava (Czech Republic), 1992, P. 103–122

³⁶Cartan É. Œuvres Complètes, Part II, Vol. 2, Paris: Gauthier - Villars, 1953

сравнительно небольшое количество публикаций, в которых метод Картана применяется к симметриям дифференциальных уравнений.

В работах^{37,38,39} метод Картана был использован для нахождения симметрий и решения проблем эквивалентности обыкновенных дифференциальных уравнений. А.М. Васильев⁴⁰ и К.П. Суровихин^{41,42,43} нашли формы Маурера–Картана и структурные уравнения групп симметрий стационарных уравнений двумерной газодинамики и нестационарных уравнений одномерной газодинамики. Статьи Гарднера, Камрана, Шэдвика и Те^{44,45,46,47} посвящены использованию метода Картана для нахождения симметрий квазилинейных уравнений в частных производных второго порядка с двумя независимыми переменными.

В работах Г.М. Кузьминой^{26,27} метод Картана был применен к проблеме нахождения накрытий для уравнений с тремя независимыми переменными.

В работах Р.Л. Брайнта, Ф.А. Гриффитса и Л. Сю^{48,49} был предложен основанный на методе Картана подход к изучению законов сохранения гиперболических и параболических уравнений второго порядка с двумя независимыми переменными. Этот подход был обобщен Дж. Н. Клеелланд⁵⁰ на случай параболических уравнений второго порядка с тремя независимыми

³⁷Kamran N., Lamb K.G., Shadwick W.F. The local equivalence problem for $y'' = F(x, y, y')$ and the Painlevé transcendents // J. Diff. Geom., 1985, Vol. 22, P. 139 – 150

³⁸Hsu L., Kamran N. Classification of second-order ordinary differential equations admitting Lie groups of fiber-preserving symmetries // Proc. London Math. Soc., 1989, Vol. 58, P. 387 – 416

³⁹Anderson I.M., Fels M.E. Transformations of Darboux integrable systems // Differential Equations: Geometry, Symmetries, and Integrability: The Abel Symposium 2008, Abel Symposia 5, Berlin: Springer-Verlag, 2009. P. 21 – 48

⁴⁰Васильев А.М. Системы трех дифференциальных уравнений с частными производными первого порядка при трех неизвестных функциях и двух независимых переменных (локальная теория) // Матем. сборник, 1996, Т. 70 (112), С. 457 – 480

⁴¹Суровихин К.П. Внешние формы Картана и отыскание основной группы, допускаемой данной системой уравнений // Вестник МГУ, Сер. Мат. Мех., 1965, № 6, С. 70 – 81

⁴²Суровихин К.П. О групповой классификации методом Картана уравнений одномерного течения газа // ДАН СССР, 1966, Т. 171, № 1, С. 55 – 58

⁴³Суровихин К.П. Структурные уравнения при наличии интранзитивной группы в случае общих одномерных течений газа // Вестник МГУ, Сер. Мат. Мех., 1967, № 1, С. 56 – 64

⁴⁴Gardner R.B., Kamran N. Characteristics and the geometry of hyperbolic equations in the plane // J. Diff. Eq., 1993, Vol. 104, P. 60-116

⁴⁵Gardner R.B., Kamran N. Normal forms and focal systems for determined systems of two first-order partial differential equations in the plane // Indiana Math. J., 1995, Vol. 44, P. 1127–1161

⁴⁶Kamran N., Shadwick W.F. Équivalence locale des équations aux dérivées partielles quasi lineares du deuxième ordre et pseudo-groupes infinis // Comptes Rendus Acad. Sc. (Paris), Série I, 1986, Vol. 303, P. 555–558

⁴⁷The D. Contact geometry of hyperbolic equations of generic type // Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications, 2008, Vol. 4, Paper 058

⁴⁸Bryant R.L., Griffiths Ph.A., Hsu L. Hyperbolic exterior differential systems and their conservation laws. I // Selecta Math. New Ser., 1995, Vol. 1, No 1, P. 21–112

⁴⁹Bryant R.L., Griffiths Ph.A. Characteristic cohomology of differential systems (II): conservation laws for a class of parabolic equations // Duke Math. J., 1995, Vol. 78, P. 531–676

⁵⁰Clelland J.N. Geometry of conservation laws for a class of parabolic partial differential equations I // Selecta Mathematica, New Series, 1997, Vol. 3, P. 1–77

переменными и К. Фолтинеком⁵¹ на случай эволюционных уравнений высших порядков с двумя независимыми переменными.

Как показано в статьях^{52,53}, метод Картана является удобным инструментом для изучения интегрируемости по Дарбу гиперболических уравнений второго порядка с двумя независимыми переменными.

Работы^{54,55} посвящены разработке метода для нахождения структурных уравнений псевдогрупп симметрий дифференциальных уравнений из их инфинитезимальных определяющих уравнений. Этот метод применим только в случае транзитивных псевдогрупп и не позволяет находить явно их формы Маурера–Картана.

Новый метод изучения псевдогрупп Ли был предложен в работах П. Олвера, Ю. Похъянпелто и их сотрудников^{56,57,58,59,60}. Он позволяет находить структурные уравнения и формы Маурера–Картана непосредственно из инфинитезимальных определяющих уравнений псевдогрупп симметрий, в том числе и в интранзитивном случае. При этом метод дает бесконечные наборы форм Маурера–Картана и бесконечные системы структурных уравнений, так что необходимо совершить дополнительные действия для выделения их конечных подсистем, необходимых для эффективной работы с изучаемыми псевдогруппами.

В работе П. Олвера и М. Фелса⁶¹ был развит намеченный Э. Картаном подход к нахождению форм Маурера–Картана псевдогрупп симметрий обыкновенных дифференциальных уравнений, названный *методом подвижного корепера* (*the moving coframe method*).

⁵¹Foltinek K. Third-order scalar evolution equations with conservation laws // Selecta Math., New Ser., 2002, Vol. 8, P. 201–235

⁵²Anderson I.M., Juráš M. Generalized Laplace invariants and the method of Darboux // Duke J. Math., 1997, Vol. 89, P. 351–375

⁵³Anderson I.M., Fels M.E. Transformations of Darboux integrable systems // Differential Equations: Geometry, Symmetries, and Integrability: The Abel Symposium 2008, Abel Symposia 5, Berlin: Springer-Verlag, 2009. P. 21 – 48

⁵⁴Lisle I.G., Reid G.J., Boulton A. Algorithmic determination of structure of infinite Lie pseudogroups of symmetries of PDEs // Proceedinds of ISSAC'95 New York: ACM Press, 1995

⁵⁵Lisle I.G., Reid G.J. Geometry and structure of Lie pseudogroups from infinitesimal defining equations // Journal of Symbolic Computation, 1998, Vol. 26, P. 355–379

⁵⁶Olver P.J., Pohjanpelto J. Maurer-Cartan forms and the structure of Lie pseudo-groups // Selecta Math., 2005, Vol. 11, P. 99–126

⁵⁷Olver P.J., Pohjanpelto J. Moving frames for Lie pseudo-groups // Canadian J. Math., 2008, Vol. 60, P. 1336–1386

⁵⁸Cheh J., Olver P.J., Pohjanpelto J. Maurer-Cartan equations for Lie symmetry pseudo-groups of differential equations // J. Math. Phys., 2005, Vol. 46, Paper 023504

⁵⁹Cheh J., Olver P.J., Pohjanpelto J. Algorithms for differential invariants of symmetry groups of differential equations // Foundations of Computational Mathematics, 2008, Vol. 8, P. 501–532

⁶⁰Valiquette F. Structure equations of Lie pseudo-groups // Journal of Lie theory, 2008, Vol. 18, No 4, P. 869–895

⁶¹Fels M., Olver P.J.: Moving coframes. I. A practical algorithm // Acta. Appl. Math., 1998, Vol. 51, P. 161–213

Отметим также работы^{62,63,64,65,66}, в которых с помощью метода Картана изучались преобразования Бэклунда для уравнений с двумя независимыми переменными.

Цель работы. Основными целями изложенных в диссертации исследований являются:

- разработка эффективной и универсальной техники применения метода эквивалентности Картана к нахождению инвариантных форм и структурных уравнений псевдогрупп симметрий дифференциальных уравнений в частных производных;
- решение с помощью этого подхода ряда проблем эквивалентности для дифференциальных уравнений (проблема Лапласа для линейных уравнений второго порядка с двумя независимыми переменными, линеаризуемость и интегрируемость обобщенного уравнения Калоджеро–Хантера–Сакстона, проблема эквивалентности для уравнений Христиановича–Рыжова);
- разработка процедуры применения метода Картана и структурной теории псевдогрупп Ли к задаче нахождения накрытий дифференциальных уравнений с тремя независимыми переменными;
- нахождение с помощью этой процедуры новых накрытий дифференциальных уравнений и соответствующих им преобразований Бэклунда.

Методы исследования. Методологической основой изложенных в диссертации исследований являются теория псевдогрупп Ли и теория накрытий дифференциальных уравнений. Наряду с классическим методом Э. Картана в диссертации применяются метод подвижного корепера, который обобщен в главах 4 и 5 на случай уравнений в частных производных, а также метод контактных интегрируемых расширений, который обобщен в параграфе 7.2 на случай дифференциальных уравнений с бесконечномерными накрытиями.

⁶²Звягин М.Ю. Преобразования Бэклунда уравнений Монжа–Ампера. Дисс. ... к.ф.-м.н., Москва, МГУ, 1985

⁶³Ферапонтов Е.А. Преобразования Бэклунда квазилинейных систем дифференциальных уравнений с частными производными первого порядка при двух независимых переменных. Дисс. ... к.ф.-м.н., Москва, МГУ, 1987

⁶⁴Clelland J.N. Homogeneous Bäcklund transformations of hyperbolic Monge-Ampère systems // Asian J. Math., 2002, Vol. 6, P. 433 – 480

⁶⁵Clelland J.N., Ivey T.A. Parametric Bäcklund transformations I: phenomenology // Trans. Amer. Math. Soc. 2005, Vol. 357, P. 1061 – 1093

⁶⁶Clelland J.N., Ivey T.A. Bäcklund transformations and Darboux integrability for nonlinear wave equations // Asian J. Math., 2009, Vol. 13, P. 15 – 64

Научная новизна. Все результаты диссертации являются новыми. Основные из них следующие:

- С помощью метода подвижного корепера получено полное решение проблемы Ли–Лиувилля–Тресса нахождения необходимых и достаточных условий эквивалентности обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка относительно псевдогруппы точечных преобразований.
- Метод подвижного корепера распространен на случай дифференциальных уравнений в частных производных, разработана универсальная и эффективная процедура применения метода эквивалентности Э. Картана для нахождения инвариантных форм псевдогрупп симметрий дифференциальных уравнений с частными производными.
- Эта процедура применена к решению ряда задач эквивалентности дифференциальных уравнений, в том числе
 - получено полное решение проблемы Лапласа для классов линейных гиперболических и параболических уравнений с двумя независимыми переменными;
 - на основе решения проблемы Лапласа установлена линеаризуемость и интегрируемость в квадратурах обобщенного уравнения Калоджеро–Хантера–Сакстона, в частности, установлена контактная эквивалентность обобщенного уравнения Хантера–Сакстона и уравнения Эйлера–Пуассона, с помощью найденного контактного преобразования получена явная формула, задающая общее решение обобщенного уравнения Хантера–Сакстона;
 - установлена контактная эквивалентность уравнений Христиановича–Рыжова (уравнения коротких волн) с исключительными значениями параметра уравнению Хохлова–Заболотской, для неисключительных значений параметра установлена эквивалентность уравнений Христиановича–Рыжова этому же уравнению с нулевым значением параметра.
- Предложен метод нахождения накрытий дифференциальных уравнений, основанный на структурной теории псевдогрупп Ли (метод контактных интегрируемых расширений). С его помощью найдены интегрируемые расширения псевдогрупп симметрий обобщенного модифицированного уравнения Хохлова–Заболотской (mdKP), интерполяционного уравнения Дунайского, обобщенного бездисперсионного $(2+1)$ -мерного уравнения Дима (rdDym) и обобщенного дважды модифицированного бездисперсионного уравнения Кадомцева–Петвиашвили.

Это позволило воспроизвести в рамках единого подхода известные накрытия этих уравнений, а также найти их новые накрытия и преобразования Бэклунда.

- Показана принципиальная возможность установления с помощью метода контактных интегрируемых расширений существования накрытий с неустранимым (спектральным) параметром. Построено накрытие одного уравнения из семейства $rdDym$ с неустранимым параметром.
- С помощью известных ранее и новых накрытий найдены классы точных многозначных решений уравнения Хохлова–Заболотской и интерполяционного уравнения Дунайского.

Теоретическая и практическая значимость. Работа носит теоретический характер. Разработанные в ней методы приложимы к широкому классу дифференциальных уравнений. Результаты могут быть использованы в геометрии дифференциальных уравнений и физических приложениях (физике жидких кристаллов, теории относительности и гидродинамике).

Апробация работы. Результаты диссертации докладывались автором на следующих научных конференциях:

- Пятая международная конференция „Симметрия в нелинейной математической физике“, институт математики Национальной академии наук Украины, Киев, Украина, 23–29 июня 2003 г.
- Международная конференция „Дифференциальные уравнения и смежные вопросы“, посвященная И.Г. Петровскому, МГУ имени М.В. Ломоносова, Москва, 16–22 мая 2004 г.
- Шестая международная конференция „Симметрия в нелинейной математической физике“, институт математики Национальной академии наук Украины, Киев, Украина, 20–26 июня 2005 г.
- Международная конференция „Геометрия в Одессе – 2006“, ОНАПТ, Одесса, Украина, 22–27 мая 2006 г.
- Международная научно-техническая конференция „Гражданская авиация на современном этапе развития науки, техники и общества“, МГТУ ГА, Москва, 18–19 мая 2007 г.
- Международная конференция „Дифференциальные уравнения и смежные вопросы“, посвященная И.Г. Петровскому, МГУ имени М.В. Ломоносова, Москва, 21–26 мая 2007 г.

- Международная конференция „Симметрия и теория возмущений – 2007“, университет Саленто, Отранто, Италия, 2–9 июня 2007 г.
- „Конференция по группам Ли в Твенте – 2007“, университет Твенте, Энсхеде, Нидерланды, 12–14 декабря 2007 г.
- Международная конференция „Интегрируемые системы и смежные вопросы“, институт математики Академии наук Тайваня (Academia Sinica), Тайбей, Тайвань, 15–16 марта 2009 г.
- Восьмая международная конференция „Симметрия в нелинейной математической физике“, институт математики Национальной академии наук Украины, Киев, Украина, 21–27 июня 2009 г.
- Международная конференция „Геометрия дифференциальных уравнений и интегрируемость“, институт математики Силезского университета, Градец-над-Моравичи, Чехия, 11–15 октября 2010 г.

Кроме того, автор выступал с докладами на следующих семинарах:

- научный семинар по геометрии дифференциальных уравнений под рук. проф. И.С. Красильщика, Независимый Московский университет, 2004, 2007, 2008, 2009, 2010 гг.
- научный семинар по качественной теории дифференциальных уравнений механико-математического факультета МГУ под рук. проф. В.М. Миллионщикова, проф. В.А. Кондратьева и проф. Н.Х. Розова, 2005, 2010 гг.
- научный семинар „Ортоподобные системы“ под рук. проф. Т. П. Лукашенко, доц. Т.В. Родионова и доц. В.Р. Галатенко, кафедра математического анализа механико-математического факультета МГУ, сентябрь 2009 г.
- семинар факультета математики Национального университета обороны Тайваня, г. Тао-Юань, Тайвань, март 2009 г.
- семинар факультета математики Национального центрального университета Тайваня, г. Джонг-Ли, Тайвань, март 2009 г.
- семинар факультета прикладной математики Национального университета Цяо-Тунг, г. Синь-Чжу, Тайвань, март 2009 г.
- научный семинар „Проблемы современной математики“ под рук. проф. Н.А. Кудряшова, Национальный исследовательский ядерный университет „МИФИ“, февраль 2010 г.

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в 21 работе (из них 15 — в изданиях, рекомендованных ВАК). Их список приведен в конце автореферата.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, семи глав, разбитых на двадцать четыре параграфа, заключения и списка литературы, включающего 207 наименований. В работе имеется 6 поясняющих иллюстраций. Общий объем диссертации — 286 страниц.

Работа выполнена при поддержке научно-исследовательского гранта МГТУ ГА 501_06 (2006 г.), российско-тайваньского гранта 95WFE0300007 (грант РФФИ 06-01-89507-ННС) и совместного гранта 09-01-92438-КЭ_а РФФИ и Consortium E.I.N.S.T.E.IN (Италия).

Основное содержание работы

Во введении дан исторический обзор известных результатов по теме диссертационной работы и сформулированы ее главные результаты.

В главе 1 вводятся основные понятия и обозначения, а также приводится обзор основных результатов геометрической теории дифференциальных уравнений, метода Картана и теории псевдогрупп Ли. Центральной частью главы является параграф 1.5, в котором дается краткое описание метода эквивалентности Картана. В известной нам литературе отсутствует *полное* изложение обоснования этого метода в том случае, если структурная группа проблемы эквивалентности зависит от точки основного многообразия. При этом в задачах, решаемых в главе 7, нам приходится сталкиваться именно с таким случаем. Поэтому для обоснования возможности использовать метод Картана в этой ситуации мы доказываем теорему о существовании послойного группового действия структурной группы на существенные коэффициенты кручения структурных уравнений проблемы эквивалентности (теорема 1.17). Кроме того, в примере 1.6 мы доказываем существование послойного группового действия структурных групп на коэффициенты переопределенной проблемы эквивалентности. Это необходимо для обоснования подхода к нахождению симметрий вложенных подмногообразий с помощью метода Картана (пример 1.11).

В главе 2 мы применяем метод Картана для решения классической проблемы Ли – Лиувилля – Тресса нахождения необходимых и достаточных условий эквивалентности двух обыкновенных уравнений второго порядка

$$u_{xx} = F(x, u, u_x) \quad (1)$$

относительно псевдогруппы точечных преобразований

$$\tilde{x} = \varphi(x, u), \quad \tilde{u} = \psi(x, u). \quad (2)$$

Насколько нам известно, в существующих публикациях отсутствует *полное* решение этой задачи, хотя многие частные случаи разобраны со всеми подробностями^{37,38,67,68,69}. С помощью метода Картана мы получаем полное решение задачи Ли – Лиувилля – Тресса, сформулированное в теореме 2.1. В классе уравнений (1) выделены 17 подклассов, инвариантных относительно действия псевдогруппы (2). Из них 6 подклассов относятся к случаю, когда для уравнения (1) выполнено условие $F_{u_x u_x u_x u_x} \neq 0$, оставшиеся 9 подклассов относятся к случаю $F_{u_x u_x u_x u_x} \equiv 0$. Каждое уравнение (1) приводимо с помощью преобразований (2) к уравнению, принадлежащему одному из этих подклассов. Как установили Ли (статья в Bd 5, S. 362 – 427 Собрания сочинений¹) и Р. Лиувиль⁷⁰, один из этих подклассов содержит все уравнения (1), линеаризуемые преобразованиями (2), причем все такие уравнения приводимы к виду $u_{xx} = 0$. Еще для трех инвариантных подклассов найдены нормальные формы $u_{xx} = u_x^4$, $u_{xx} = u^{-3}$ и $u_{xx} = u^2$. Для остальных 13 подклассов найдены базисы дифференциальных инвариантов и операторы инвариантных дифференцирований, в терминах которых определены классифицирующие многообразия этих подклассов. Локальная конгруэнтность классифицирующих многообразий является необходимым и достаточным условием эквивалентности двух уравнений из одного и того же инвариантного подкласса.

Непосредственное перенесение метода Картана на случай уравнений в частных производных приводит к быстрому росту объема вычислений с ростом количества независимых переменных, что делает невозможным его применение с использованием современных компьютерных систем аналитических вычислений уже в случае трех независимых переменных. **В главе 3** мы анализируем различные встречающиеся в литературе подходы, направленные на преодоление этих трудностей. В результате сравнений метода^{46–51}, основанного на использовании априорно известных геометрических свойств изучаемого уравнения, метода^{54,55}, основанного на использовании разложения инфинитезимальных генераторов транзитивных псевдогрупп Ли в ряды Тейлора и метода^{56–60}, использующего инвариантизированные определяющие

⁶⁷Babich M.V., Bordag L.A. Projective differential geometrical structure of the Painlevé equations // J. Diff. Eq., 1999, Vol. 157, P. 452 – 485

⁶⁸Kruglikov B. Point classification of second order ODEs: Tresse classification revisited and beyond // Differential Equations: Geometry, Symmetries, and Integrability: The Abel Symposium 2008, Abel Symposia 5, Berlin: Springer-Verlag, 2009. P. 199 – 221

⁶⁹Yumaguzhin V.A. Differential invariants of second order ODEs, I // Acta Appl. Math., 2010, Vol. 109, P. 283 – 313

⁷⁰Liouville R. Sur les invariants de certaines équations différentielles et sur leurs applications. // J. de l'École Polytechnique, 1889, Vol. 59, P. 7 – 76

уравнения для форм Маурера–Картана, мы делаем вывод об их неуниверсальности — неприменимости к тем или иным классам уравнений. По нашему мнению, единственным универсальным подходом является метод подвижного корепера, намеченный Э. Картаном в §13 статьи на стр. 719–856 в Собрании сочинений³⁶ и развитый в работе П. Олвера и М. Фелса⁶¹ для случая обыкновенных дифференциальных уравнений.

Для его применения к дифференциальным уравнениям в частных производных требуется найти формы Маурера–Картана и структурные уравнения псевдогрупп точечных и контактных преобразований на расслоениях джетов. Этому посвящена **глава 4**. В параграфе 4.1 мы рассматриваем псевдогруппу точечных преобразований на многообразии $J^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ джетов первого порядка локальных сечений расслоения $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$, соответствующего случаю n независимых и m зависимых переменных. Мы находим формы Маурера–Картана этой псевдогруппы, имеющие вид

$$\begin{aligned}\Theta^\alpha &= a_\beta^\alpha (du^\beta - u_j^\beta dx^j), \\ \Xi^i &= c_\beta^i \Theta^\beta + b_j^i dx^j, \\ \Theta_i^\alpha &= f_{i\beta}^\alpha \Theta^\beta + g_{ij}^\alpha \Xi^j + a_\beta^\alpha B_i^j du_j^\beta,\end{aligned}$$

где $\alpha, \beta \in \{1, \dots, m\}$, $i, j \in \{1, \dots, n\}$, $\det(a_\beta^\alpha) \neq 0$, $\det(b_j^i) \neq 0$, $b_k^i B_j^k = \delta_j^i$ и $g_{ij}^\alpha = g_{ji}^\alpha$, а также доказываем инволютивность их структурных уравнений

$$\begin{aligned}d\Theta^\alpha &= \Phi_\beta^\alpha \wedge \Theta^\beta + \Xi^i \wedge \Theta_i^\alpha, \\ d\Xi^i &= \Psi_k^i \wedge \Xi^k + \Upsilon_\gamma^i \wedge \Theta^\gamma, \\ d\Theta_i^\alpha &= \Phi_\gamma^\alpha \wedge \Theta_i^\gamma - \Psi_i^k \wedge \Theta_k^\alpha + \Phi_{i\beta}^\alpha \wedge \Theta^\beta + \Xi^j \wedge \Theta_{ij}^\alpha.\end{aligned}$$

В параграфе 4.2 для псевдогруппы контактных преобразований на многообразии $J^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ джетов второго порядка локальных сечений расслоения $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$, соответствующего случаю n независимых и одной зависимой переменной мы находим формы Маурера–Картана

$$\begin{aligned}\Theta_0 &= a (du - u_i dx^i), \\ \Theta_i &= g_i \Theta_0 + a B_i^k \vartheta_k, \\ \Xi^i &= c^i \Theta_0 + f^{ik} \Theta_k + b_k^i dx^k, \\ \Theta_{ij} &= s_{ij} \Theta_0 + w_{ij}^k \Theta_k + z_{ijk} \Xi^k + a B_i^k B_j^l du_{kl},\end{aligned}$$

где $a \neq 0$, $\det(b_j^i) \neq 0$, $b_k^i B_j^k = \delta_j^i$, $f^{ij} = f^{ji}$, $s_{ij} = s_{ji}$, $w_{ij}^k = w_{ji}^k$, $z_{ijk} = z_{jik} = z_{ikj}$, и также доказываем инволютивность их структурных уравнений

$$d\Theta_0 = \Phi_0^0 \wedge \Theta_0 + \Xi^j \wedge \Theta_j,$$

$$\begin{aligned}
d\Theta_i &= \Phi_i^0 \wedge \Theta_0 + \Phi_i^j \wedge \Theta_j + \Xi^j \wedge \Theta_{ij}, \\
d\Xi^i &= \Phi_0^0 \wedge \Xi^i - \Phi_k^i \wedge \Xi^k + \Psi^{i0} \wedge \Theta_0 + \Psi^{ik} \wedge \Theta_k, \\
d\Theta_{ij} &= \Phi_i^k \wedge \Theta_{kj} + \Phi_j^k \wedge \Theta_{ki} - \Phi_0^0 \wedge \Theta_{ij} + \Upsilon_{ij}^0 \wedge \Theta_0 + \Upsilon_{ij}^k \wedge \Theta_k + \\
&\quad + \Xi^k \wedge \Theta_{ijk}.
\end{aligned}$$

В главе 5 мы излагаем технику применения метода подвижного корепера к псевдогруппам точечных и контактных симметрий дифференциальных уравнений в частных производных. Мы приводим подробные примеры вычисления форм Маурера–Картана и структурных уравнений псевдогрупп симметрий системы уравнений, описывающих одномерную динамику политропного газа в лагранжевых переменных, и уравнения Лиувилля

$$u_{tx} = e^u. \quad (3)$$

В главе 6 мы применяем метод подвижного корепера к решению проблем эквивалентности для различных дифференциальных уравнений.

В параграфе 6.1 мы решаем проблему эквивалентности для класса линейных гиперболических уравнений

$$u_{tx} = T(t, x) u_t + X(t, x) u_x + U(t, x) u \quad (4)$$

относительно действия псевдогруппы контактных преобразований на расщеплении джетов второго порядка (теорема 6.1). Мы выделяем в этом классе 6 инвариантных подклассов и доказываем, что каждое уравнение (4) приводится к уравнению, принадлежащему одному из этих подклассов. Первый подкласс состоит из уравнений, приводимых к виду $u_{tx} = 0$ — этот результат доказывается в § 9 монографии² с помощью инфинитезимального метода. Второй подкласс состоит из уравнений, приводимых к виду

$$u_{tx} = -t u_t - \lambda x u_x - \lambda t x u$$

или к уравнению Эйлера–Пуассона

$$u_{tx} = \frac{2}{\mu(t+x)} u_t + \frac{2\lambda}{\mu(t+x)} u_x - \frac{4\lambda}{\mu^2(t+x)^2} u, \quad (5)$$

$\lambda = \text{const}$, $\mu = \text{const}$, $\lambda \neq 0$, $\mu \neq 0$. Для остальных четырех инвариантных подклассов мы находим базисы дифференциальных инвариантов и операторов инвариантных дифференцирований. Тем самым мы получаем *полное* решение проблемы Лапласа^{71,72} для класса уравнений (4).

⁷¹Ibragimov N.H. Laplace type invariants for parabolic equations // Nonlinear Dynamics, 2002, Vol. 28, P. 125–133

⁷²Ибрагимов Н.Х. Инварианты гиперболических уравнений: решение проблемы Лапласа // Прикл. мат. техн. физ., 2004, Т. 45, № 2, С. 11–21

В параграфе 6.2 мы решаем проблему эквивалентности для класса линейных параболических уравнений

$$u_{xx} = T(t, x) u_t + X(t, x) u_x + U(t, x) u, \quad (6)$$

относительно псевдогруппы контактных преобразований (теорема 6.2). В классе уравнений (6) выделяется 5 инвариантных подклассов и доказывается, что каждое уравнение (6) приводимо к уравнению, принадлежащему одному из этих подклассов. Первый подкласс состоит из уравнений, приводимых к виду $u_{xx} = u_t$ — этот результат был доказан в работе⁷³ с помощью инфинитезимального метода. Второй подкласс состоит из уравнений, приводимых к виду

$$u_{xx} = u_t - \frac{4}{3N^5 x^2} u,$$

$N = \text{const}, N \neq 0$.

Для остальных трех инвариантных подклассов мы находим базисы дифференциальных инвариантов и операторов инвариантных дифференцирований. Тем самым мы получаем полное решение проблемы Лапласа для класса уравнений (6).

В параграфе 6.3 мы рассматриваем класс обобщенных уравнений Калоджеро–Хантера–Сакстона^{74,75,76}

$$u_{tx} = (u + F(u_x)) u_{xx} + G(u_x). \quad (7)$$

при $G'''(u_x) \neq 2$ (при $G'''(u_x) \equiv 2$ это уравнение может быть приведено к уравнению в частных производных первого порядка). Мы находим формы Маурера–Картана и структурные уравнения псевдогруппы симметрий уравнения (7). Основываясь на результатах параграфа 6.1, мы доказываем в теореме 6.3, что каждое из уравнений (7) эквивалентно относительно псевдогруппы контактных преобразований некоторому линейному гиперболическому уравнению (4). При этом соответствующее линейное уравнение оказывается интегрируемым в квадратурах с помощью преобразования Лапласа, которое обсуждается в § 9.3 монографии². Отсюда следует интегрируемость в квадратурах уравнения (7) при $G'''(u_x) \neq 2$ и любой функции $F(u_x)$ (теорема 6.4). В наиболее важном частном случае уравнения (7) —

⁷³Johnpillai I.K., Mahomed F.M. Singular invariant equation for the (1+1) Fokker - Planck equation // J. Phys. A Math. Gen., 2001, Vol. 34, P. 11033–11051

⁷⁴Calogero F. A solvable nonlinear wave equation // Stud. Appl. Math., 1984, Vol. 70, P. 189–199

⁷⁵Rabelo M.L. On equations which describe pseudospherical surfaces // Stud. Appl. Math., 1989, Vol. 81, P. 221–248

⁷⁶Brunelli J.C., Das A., Popowicz Z. Deformed Harry Dym and Hunter-Zheng equations // J. Math. Phys., 2004, Vol. 45, P. 2646–2655

случае обобщенного уравнения Хантера–Сакстона^{77,78,79,80,81}

$$u_{tx} = u u_{xx} + \kappa u_x^2. \quad (8)$$

соответствующее уравнение (4) оказывается уравнением Эйлера–Пуассона (5) с $\lambda = \kappa$ и $\mu = 2 - \kappa$. Знание форм Маурера–Картана псевдогрупп симметрий уравнений (8) и (5) позволяет явно найти контактное преобразование

$$\begin{aligned} \tilde{u} &= (t+x)^{-\frac{1}{\kappa}} (\kappa (t+x) u_x + (\kappa - 1) u), \\ \tilde{t} &= \kappa^{-1} t, \\ \tilde{x} &= -(t+x)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} (\kappa (t+x) u_x - u), \\ \tilde{u}_{\tilde{t}} &= \kappa^2 (t+x)^{-\frac{1}{\kappa}} (u_t - u_x), \\ \tilde{u}_{\tilde{x}} &= -(t+x)^{-1} \end{aligned} \quad (9)$$

между уравнением Эйлера–Пуассона и уравнением (8), записанным в координатах $\tilde{t}$, $\tilde{x}$, $\tilde{u}$ (теорема 6.5). С помощью преобразования Лапласа нетрудно найти общее решение уравнения Эйлера–Пуассона. Это решение вместе с преобразованием (9) дает локальную формулу

$$\begin{aligned} \tilde{u} &= \kappa^2 S'(t) + \kappa \int R(x) (t+x)^{\frac{1-\kappa}{\kappa}} dx, \\ \tilde{t} &= \kappa^{-1} t, \\ \tilde{x} &= -\kappa \left(S(t) + \int R(x) (t+x)^{\frac{1}{\kappa}} dx \right). \end{aligned}$$

общего решения уравнения (8), в котором R и S — произвольные функции параметров x и t , таких что $t+x \neq 0$.

В параграфе 6.4 рассматривается проблема эквивалентности для урав-

⁷⁷Hunter J.K., Saxton R. Dynamics of director fields // SIAM J. Appl. Math., 1991, Vol. 51, P. 1498 – 1521

⁷⁸Tod K.P. Einstein–Weil spaces and third order differential equations // J. Math. Phys., 2000, Vol. 41, P. 5572 – 5581

⁷⁹Golovin S.V. Group foliation of Euler equations in nonstationary rotationally symmetrical case // Proc. Inst. Math. NAS of Ukraine, 2004, Vol. 50, Part 1, P. 110 – 117

⁸⁰Olver P.J., Rosenau Ph. Tri-Hamiltonian duality between solitons and solitary wave solutions having compact support // Phys. Rev. E, 1996, Vol 53, P. 1900 – 1906

⁸¹Reyes E.G. The soliton content of the Camassa–Holm and Hunter–Saxton equations // Proc. Inst. Math. NAS of Ukraine, 2002, Vol. 43, Part 1, P. 201 - 208

нений Христиановича–Рыжова^{82,83,84,85,86}

$$u_{yy} = u_{tx} + (u_x + x) u_{xx} + \kappa u_x. \quad (10)$$

Используя метод подвижного корепера, мы доказываем (теорема 6.6), что при $\kappa \in \{-2, -\frac{1}{2}\}$ уравнение (10) эквивалентно относительно псевдогруппы контактных преобразований потенциальной форме уравнения Хохлова–Заболотской (уравнению Линя–Рейсснера–Цзяна)

$$u_{yy} = u_{tx} + u_x u_{xx}, \quad (11)$$

а при $\kappa \notin \{-2, -\frac{1}{2}\}$ все уравнения (10) эквивалентны друг другу, в частности они эквивалентны уравнению (10) с $\kappa = 0$. Соответствующие преобразования легко находятся при известных формах Маурера–Картана псевдогрупп симметрий уравнений (10) и (11). Они приведены в теореме 6.7.

Глава 7 посвящена изложению подхода к нахождению накрытий дифференциальных уравнений с помощью метода Картана.

В параграфе 7.1 приводятся примеры, показывающие, что формы Уолквиста–Эстабрука, задающие известные накрытия над уравнением Лиувилля (3) и вторым небесным уравнением Плебанского⁸⁷

$$u_{xz} = u_{ty} + u_{xx} u_{yy} - u_{xy}^2,$$

получаются из инвариантных линейных комбинаций форм Маурера–Картана псевдогрупп симметрий этих уравнений.

В параграфе 7.2 мы вводим определение контактного интегрируемого расширения структурных уравнений псевдогруппы симметрий.

Пусть $\mathfrak{G}$ — псевдогруппа Ли на многообразии M и $\omega^1, \dots, \omega^m$ — ее формы Маурера–Картана, удовлетворяющие структурным уравнениям

$$d\omega^i = A_{\gamma j}^i \pi^\gamma \wedge \omega^j + B_{jk}^i \omega^j \wedge \omega^k, \quad (12)$$

где $\gamma \in \{1, \dots, \Gamma\}$ для некоторого $\Gamma \geq 0$. Коэффициенты $A_{\gamma j}^i$, $B_{jk}^i = -B_{kj}^i$ этих уравнений зависят от инвариантов U^κ , $\kappa \in \{1, \dots, \Lambda\}$, $\Lambda \geq 0$, имеющих

⁸²Христианович С.А., Рыжов О.С. О нелинейном отражении слабых ударных волн // Прикл. мат. техн. физ., 1958, Т. 58, № 5, С. 586–595

⁸³Kucharczyk P. Group properties of the "short waves" equation // Bull. Acad. Pol. Sci. Ser. Sci. Technol. 1965, Vol. XIII, No 4, P. 469–475

⁸⁴Хамитова Р.С. Структура группы и базис законов сохранения // Теор. мат. физ., 1982, Т. 52, № 2, С. 244–251

⁸⁵Roy S., Roy Chowdhury A., De M. Loop algebra of Lie symmetries for a short-wave equation // International Journal of Theoretical Physics, 1988, Vol. 27, No 1, P. 47–55

⁸⁶Xu Xiaoping. Stable range approach to short wave and Khokhlov–Zabolotskaya equations // Acta Appl. Math., 2009, Vol. 106, No 3, P. 433–454

⁸⁷Plebański J.F. Some solutions of complex Einstein equations // J. Math. Phys., 1975, Vol. 16, P. 2395 – 2402

дифференциалы

$$dU^\lambda = C_j^\lambda \omega^j \quad (13)$$

с коэффициентами C_j^λ , зависящими от $U^1, \dots, U^\Lambda$. Рассмотрим систему уравнений

$$d\tau^q = D_{\rho r}^q \eta^\rho \wedge \tau^r + E_{rs}^q \tau^r \wedge \tau^s + F_{r\beta}^q \tau^r \wedge \pi^\beta + G_{rj}^q \tau^r \wedge \omega^j + H_{\beta j}^q \pi^\beta \wedge \omega^j + I_{jk}^q \omega^j \wedge \omega^k, \quad (14)$$

$$dV^\epsilon = J_j^\epsilon \omega^j + K_q^\epsilon \tau^q, \quad (15)$$

с неизвестными 1-формами τ^q , $q \in \{1, \dots, Q\}$, η^ρ , $\rho \in \{1, \dots, R\}$, и неизвестными функциями V^ϵ , $\epsilon \in \{1, \dots, S\}$ для некоторых $Q, R, S \in \mathbb{N}$. Коэффициенты $D_{\rho r}^q, \dots, K_q^\epsilon$ в уравнениях (14), (15) предполагаются зависящими от U^λ и V^γ .

Система (14), (15) называется *интегрируемым расширением* системы (12), (13), если уравнения (14), (15), (12) и (13) в совокупности удовлетворяют условиям совместности и инволютивности.

В этом случае существуют совокупности 1-форм τ^q и функций V^ϵ , удовлетворяющие уравнениям (14) и (15). При этом формы τ^q вместе с формами ω^i определяют некоторую псевдогруппу Ли $\mathfrak{H}$, действующую на многообразии $M \times \mathbb{R}^Q$.

Интегрируемое расширение называется *тривиальным*, если существует замена переменных на многообразии действия псевдогруппы $\mathfrak{H}$, такая что в новых переменных коэффициенты $F_{r\beta}^q$, G_{rj}^q , $H_{\beta j}^q$, I_{jk}^q и J_j^ϵ равны нулю, а коэффициенты $D_{\rho r}^q$, E_{rs}^q и K_q^ϵ не зависят от U^λ . В противном случае интегрируемое расширение называется *нетривиальным*.

Пусть θ_I^α и ξ^j — совокупность форм Маурера-Картана псевдогруппы симметрий $\mathfrak{Lie}(\mathcal{E})$ дифференциального уравнения $\mathcal{E}$, причем $\xi^1 \wedge \dots \wedge \xi^n \neq 0$ на любом решении $\mathcal{E}$, и θ_I^α — контактные формы.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7.3: Нетривиальное интегрируемое расширение структурных уравнений псевдогруппы $\mathfrak{Lie}(\mathcal{E})$ симметрий уравнения $\mathcal{E}$, имеющее вид

$$d\omega^q = \Pi_r^q \wedge \omega^r + \xi^j \wedge \Omega_j^q, \quad (16)$$

$q, r \in \{1, \dots, N\}$, $N \geq 1$, мы назовем *контактным интегрируемым расширением*, если выполнены следующие условия:

- (i) $\Omega_j^q \in \langle \theta_I^\alpha, \omega_i^r \rangle_{\text{lin}}$ для некоторых дополнительных 1-форм ω_i^r ;
- (ii) $\Omega_j^q \notin \langle \omega_i^r \rangle_{\text{lin}}$ для некоторых q и j ;
- (iii) $\Omega_j^q \notin \langle \theta_I^\alpha \rangle_{\text{lin}}$ для некоторых q и j ;

(iv) $\Pi_r^q \in \langle \theta_I^\alpha, \xi^j, \omega^r, \omega_i^r \rangle_{\text{lin}}$.

(v) Коэффициенты в разложениях форм Ω_j^q по формам $\{\theta_I^\alpha, \omega_i^r\}$ и форм Π_r^q по формам $\{\theta_I^\alpha, \xi^j, \omega^r, \omega_i^r\}$ зависят от инвариантов псевдогруппы $\mathfrak{Lie}(\mathcal{E})$ и, возможно, от совокупности некоторых дополнительных функций W^ρ , $\rho \in \{1, \dots, \Lambda\}$, $\Lambda \geq 1$. В последнем случае существуют функции $P_\alpha^{I\rho}$, Q_q^ρ , $R_q^{j\rho}$ и S_j^ρ , такие что

$$dW^\rho = P_\alpha^{I\rho} \theta_I^\alpha + Q_q^\rho \omega^q + R_q^{j\rho} \omega_j^q + S_j^\rho \xi^j. \quad (17)$$

При этом для уравнений (17) выполнено условие совместности

$$d(dW^\rho) = 0 = d(P_\alpha^{I\rho} \theta_I^\alpha + Q_q^\rho \omega^q + R_q^{j\rho} \omega_j^q + S_j^\rho \xi^j). \quad (18)$$

Это определение является обобщением определения интегрируемого расширения из § 6 работы ⁴⁹. Необходимость введения определения 7.3 вызвано тем, что определение работы ⁴⁹ применимо только в случае конечномерных накрытий, в то время как в случае трех и более независимых переменных накрытия являются, как правило, бесконечномерными ³⁵.

В этом же параграфе мы приводим пример применения определения 7.3 — находим все контактные интегрируемые расширения с одним дополнительным инвариантом для структурных уравнений псевдогруппы симметрий уравнения Хохлова–Заболотской в потенциальной форме (11). В результате анализа мы получаем единственное интегрируемое расширение, соответствующее накрытию, в других обозначениях и другими методами полученному в работах ^{27,88}.

В параграфе 7.3 мы изучаем контактные интегрируемые расширения структурных уравнений псевдогруппы симметрий обобщенного модифицированного уравнения Хохлова–Заболотской ⁸⁹

$$u_{yy} = u_{tx} + \left(\frac{1}{2}(\kappa + 1)u_x^2 + u_y\right)u_{xx} + \kappa u_x u_{xy}. \quad (19)$$

При $\kappa \neq -1$ мы находим одно контактное интегрируемое расширение, все инварианты которого совпадают с инвариантами уравнения (19). Ему соответствует накрытие, заданное системой

$$\begin{cases} v_t = \left(\frac{1}{2}(\kappa + 1)u_x^2 - u_y\right)v_x, \\ v_y = -u_x v_x. \end{cases} \quad (20)$$

⁸⁸Кричевер И.М. Метод усреднения для двумерных "интегрируемых" уравнений // Функц. анализ и прил., 1988, Т. 22, № 3, С. 37–52

⁸⁹Błaszak M. Classical R-matrices on Poisson algebras and related dispersionless systems // Phys. Lett. A, 2002, Vol. 297, P. 191–195

Анализ контактных интегрируемых расширений с одним дополнительным инвариантом дает следующие результаты: при $\kappa \notin \{-3; -1\}$ существует одно такое расширение, при $\kappa = -3$ к нему добавляется второе. Первому расширению при $\kappa \notin \{-2; -3/2; -1\}$ соответствует накрытие, заданное системой

$$\begin{cases} v_t = \left(\frac{1}{2} (\kappa + 1) u_x^2 - u_y \right) v_x - u_x v_x^{\kappa+2} + \frac{1}{(2\kappa + 3)} v_x^{2\kappa+3}, \\ v_y = -u_x v_x + \frac{1}{(\kappa + 2)} v_x^{\kappa+2}, \end{cases} \quad (21)$$

при $\kappa = -2$ заданное системой

$$\begin{cases} v_t = u_x - v_x^{-1} - \left(u_y + \frac{1}{2} u_x^2 \right) v_x, \\ v_y = -u_x v_x - \ln |v_x|, \end{cases} \quad (22)$$

и при $\kappa = -3/2$ заданное системой

$$\begin{cases} v_t = 2 u_x |v_x|^{1/2} + 4 \ln |v_x| - \left(u_y + \frac{1}{4} u_x^2 \right) v_x, \\ v_y = -u_x v_x - 4 |v_x|^{1/2}. \end{cases} \quad (23)$$

При $\kappa = -3$ второе контактное интегрируемое расширение соответствует накрытию вида

$$\begin{cases} v_t = u - (u_x^2 + u_y) v_x, \\ v_y = x - u_x v_x. \end{cases} \quad (24)$$

При $\kappa = -1$ существует одно контактное интегрируемое расширение с одним дополнительным инвариантом. Этому расширению соответствуют два накрытия, первое из них задается системой

$$\begin{cases} v_t = (\lambda^2 - \lambda u_x - u_y) v_x, \\ v_y = (\lambda - u_x) v_x \end{cases} \quad (25)$$

и содержит неустранимый параметр λ , а второе задается системой

$$\begin{cases} v_t = (v^2 - u_x v - u_y) v_x, \\ v_y = (v - u_x) v_x. \end{cases} \quad (26)$$

Мы отмечаем, что наличие неустранимого параметра может быть установлено из вида уравнений, задающих контактное интегрируемое расширение,

с помощью результатов §§ 3.2, 3.6 работы¹⁴ и работ^{90, 91, 92, 93}. Накрытие (21) было найдено при $\kappa = 0$ в работе⁹⁴, при $\kappa = 1$ в работе⁹⁵ и при $\kappa \notin \{-2, -3/2, -1\}$ в работе⁹⁶ другими методами. Накрытие (25) найдено в работах^{97, 98}. Накрытия (20), (22), (23), (24) и (26) являются новыми.

В параграфе 7.4 мы рассматриваем уравнение

$$u_{yy} = u_{tx} + (u_x + u_y) u_{xx} - u_x u_{xy}, \quad (27)$$

описывающее структуры Эйнштейна–Вейля

$$\begin{cases} h &= (dy + u_x dt)^2 - 4(dx + (u_x - u_y) dt) dt, \\ \omega &= u_{xx} dy + ((u_x + 4) u_{xx} + 2 u_{xy}) dt, \end{cases} \quad (28)$$

возникающие в теории относительности⁹⁹. Анализ контактных интегрируемых расширений структурных уравнений его псевдогруппы симметрий дает единственное расширение с одним дополнительным инвариантом (теорема 7.4), соответствующее накрытие задается системой

$$\begin{cases} v_t &= v_x (\ln^2 |v_x| - u_y - (\ln |v_x| + 1) u_x + 1), \\ v_y &= v_x (\ln |v_x| - u_x). \end{cases} \quad (29)$$

В параграфе 7.5 результаты, полученные в параграфах 7.3 и 7.4, применяются для построения точных многозначных решений уравнения Хохлова–Заболотской

$$u_{yy} = u_{tx} + u u_{xx} + u_x^2 \quad (30)$$

и уравнения (27).

Мы используем преобразование²⁷ $u = \frac{1}{2} w_x^2 - w_y$, связывающее уравнение (30) с модифицированным уравнением Хохлова–Заболотской

$$w_{yy} = w_{tx} + \left(\frac{1}{2} w_x^2 + w_y\right) w_{xx}, \quad (31)$$

⁹⁰Krasil'shchik, I.S.: On one-parametric families of Bäcklund transformations. Preprint DIPS-1/2000, The Diffiety Institute, Pereslavl-Zalessky (2000)

⁹¹Igonin S., Krasil'shchik J. On one-parametric families of Bäcklund transformations. Preprint [arXiv:nlin/0010040](https://arxiv.org/abs/nlin/0010040) (2000)

⁹²Marvan M. On the horizontal gauge cohomology and nonremovability of the spectral parameter // Acta Appl. Math., 2002, Vol. 72, P. 51–65

⁹³Igonin S., Kersten P., Krasil'shchik I. On symmetries and cohomological invariants of equations possessing flat representations. Preprint DIPS-07, The Diffiety Institute, Pereslavl-Zalessky (2002)

⁹⁴Chang J.-H., Tu M.-H.: On the Miura map between the dispersionless KP and dispersionless modified KP hierarchies // J. Math. Phys., 2000, Vol. 41, P. 5391 – 5406

⁹⁵Konopelchenko B., Martínez Alonso L.: Dispersionless scalar hierarchies, Whitham hierarchy and the quasi-classical $\bar{\partial}$ -method // J. Math. Phys., 2003, Vol. 43, P. 3807 – 3823

⁹⁶Pavlov M.V. The Kupershmidt hydrodynamics chains and lattices // Intern. Math. Research Notes, 2006, Vol. 2006, article ID 46987, P. 1 – 43

⁹⁷Pavlov M.V. Integrable hydrodynamic chains // J. Math. Phys., 2003, Vol. 44, P. 4134 – 4156

⁹⁸Dunajski M. A class of Einstein–Weil spaces associated to an integrable system of hydrodynamic type // J. Geom. Phys., 2004, Vol. 51, P. 126 – 137

⁹⁹Dunajski M. Interpolating dispersionless integrable system // J. Phys. A, 2008, Vol. 41, 315202

совпадающим с уравнением (19) при $\kappa = 0$, а также преобразования Бэклунда (20), (21), связывающие при $\kappa = 0$ уравнение (31) с уравнениями

$$r_{yy} = r_{tx} + \left(\frac{r_y^2}{r_x^2} - \frac{r_t}{r_x} \right) r_{xx}, \quad (32)$$

$$s_{yy} = s_{tx} + \left(\frac{s_y^2}{s_x^2} - \frac{s_t}{s_x} + \frac{1}{3} s_x^2 \right) s_{xx} \quad (33)$$

соответственно. К уравнениям (31), (32) и (33) мы применяем подстановку вида

$$u_t = F(u_x), \quad u_y = G(u_x) \quad (34)$$

из § 5.IV главы VIII монографии¹⁸. Для каждого из этих уравнений подстановка (34) дает связь между функциями F и G . Выражая из этих связей функцию F через произвольную функцию G , мы получаем три семейства решений уравнения (30), заданные равенствами

$$\begin{cases} u = \frac{1}{2} z^2 - G(z), \\ F(z) = -\frac{1}{6} z^3 + \int \left((G'(z))^2 + G(z) \right) dz, \end{cases}$$

$$\begin{cases} u = \left(\frac{G(z)}{z} \right)^2 - \frac{F(z)}{z}, \\ F(z) = z \int \left(\left(\frac{G(z)}{z} \right)^2 - (G'(z))^2 \right) \frac{dz}{z}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} u = \left(\frac{G(z)}{z} \right)^2 - \frac{F(z)}{z} + \frac{z^2}{3}, \\ F(z) = z \int \left(\left(\frac{G(z)}{z} \right)^2 - (G'(z))^2 \right) \frac{dz}{z} - \frac{1}{6} z^3. \end{cases}$$

Для каждой из этих систем многозначная функция z , зависящая от переменных t, x, y , задана неявной формулой

$$Q(x + F'(z)t + G'(z)y) = z \quad (35)$$

с произвольными функциями Q и G .

Аналогично мы строим два семейства многозначных решений уравнения (27). Применяя подстановку (34) к самому уравнению (27), а также к уравнению

$$v_{yy} = v_{tx} + ((v_y \ln |v_x| - v_t) v_x^{-1} + 1) v_{xx} + (v_y v_x^{-1} - \ln |v_x|) v_{xy}, \quad (36)$$

связанному с уравнением (27) преобразованием Бэклунда (29), мы находим многозначные семейства функций u_x и u_y , определяющие структуры Эйнштейна–Вейля (28). Эти функции заданы формулами

$$\begin{cases} u_x = z, \\ u_y = G(z), \\ F(z) = \int \left((G'(z))^2 + z G'(z) - G(z) \right) dz - \frac{1}{2} z^2, \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_x = \ln |z| - \frac{G(z)}{z}, \\ u_y = \left(\frac{G(z)}{z} - 1 \right) \ln |z| - \frac{F(z)}{z} + 1, \\ F(z) = z \int \left((G'(z))^2 + \ln |z| \left(G'(z) - \frac{G(z)}{z} \right) - \frac{G(z) G'(z)}{z} - 1 \right) \frac{dz}{z}, \end{cases}$$

где многозначная функция z задана той же неявной формулой (35) с произвольными функциями Q и G .

В параграфе 7.6 мы изучаем контактные интегрируемые расширения структурных уравнений псевдогруппы симметрий обобщенного бездисперсионного $(2+1)$ -мерного уравнения Дима^{89,100,101,102,103}

$$u_{ty} = u_x u_{xy} + \kappa u_y u_{xx}. \quad (37)$$

Мы устанавливаем, что структурные уравнения псевдогруппы симметрий уравнения (37) имеют единственное контактное интегрируемое расширение с одним дополнительным инвариантом (теорема 7.5). В теореме 7.6 мы находим соответствующие накрытия. При $\kappa \notin \{-2; -1; 0\}$ накрытие задается системой

$$\begin{cases} v_t = u_x v_x + \frac{\kappa}{\kappa + 2} v_x^{\kappa+2}, \\ v_y = -\frac{1}{\kappa} u_y v_x^{-\kappa}, \end{cases} \quad (38)$$

при $\kappa = -2$ накрытие задается системой

$$\begin{cases} v_t = u_x v_x - 2 \ln |v_x|, \\ v_y = \frac{1}{2} u_y v_x^2, \end{cases} \quad (39)$$

¹⁰⁰Konopelchenko B.G., Moro A.: Integrable equations in nonlinear geometrical optics // Stud. Appl. Math., 2004, Vol. 113, P. 325 – 352

¹⁰¹Ferapontov E.V., Khusnutdinova K.R., Tsarev S.P.: On a class of three-dimensional integrable Lagrangians // Comm. Math. Phys., 2006, Vol. 261, P. 225 – 243

¹⁰²Ferapontov E.V., Moro A., Sokolov V.V.: Hamiltonian systems of hydrodynamic type in 2+1 dimensions. Preprint [www.arXiv.org/0710.2012](http://www.arXiv.org/abs/0710.2012) (2007)

¹⁰³Ovsienko V. Bi-Hamiltonian nature of the equation $u_{tx} = u_{xy} u_y - u_{yy} u_x$. Preprint [www.arxiv.org/0802.1818](http://www.arxiv.org/abs/0802.1818) (2008)

а при $\kappa = -1$ уравнение (37) имеет два накрытия

$$\begin{cases} v_t = (u_x - v) v_x, \\ v_y = u_y v^{-1} v_x \end{cases} \quad (40)$$

и

$$\begin{cases} v_t = (u_x - \lambda) v_x, \\ v_y = \lambda^{-1} u_y v_x, \end{cases} \quad (41)$$

причем параметр $\lambda \neq 0$ в последнем накрытии является неустранимым, что может быть установлено непосредственно по виду уравнений, задающих контактное интегрируемое расширение. Накрытие (38) при $\kappa = 1$, $\kappa = 1/2$, $\kappa = 2$ и $\kappa \notin \{-2; 0\}$ было найдено другими методами в работах^{100,101,102,96} соответственно. Накрытия (39), (40) и (41) являются новыми.

В параграфе 7.7 мы рассматриваем уравнение

$$\begin{aligned} u_{yy} = & u_{tx} + \left(\frac{(\kappa + 1) u_y^2}{u_x^2} - \frac{u_t}{u_x} + \kappa u_x^\kappa u_y + \frac{(\kappa + 1)^2}{2\kappa + 3} u_x^{2(\kappa+1)} \right) u_{xx} \\ & - \kappa \left(\frac{u_y}{u_x} + u_x^{\kappa+1} \right) u_{xy} \end{aligned} \quad (42)$$

с $\kappa \notin \{-2, -3/2, -1\}$, связанное с уравнением (19) преобразованием Бэклунда (21). Мы находим два расширения, инварианты которых совпадают с инвариантами псевдогруппы симметрий уравнения (19), и одно расширение, содержащее один дополнительный инвариант (теорема 7.7). Соответствующие этим расширениям накрытия имеют вид

$$\begin{cases} v_t = \left(\frac{u_t}{u_x} + (\kappa + 2) \left(u_y u_x^\kappa + \frac{\kappa + 1}{2\kappa + 3} u_x^{2\kappa+2} \right) \right) v_x, \\ v_y = \left(\frac{u_y}{u_x} + u_x^{\kappa+1} \right) v_x, \end{cases} \quad (43)$$

$$\begin{cases} r_t = \left(\frac{u_t}{u_x} - (\kappa + 1)(\kappa + 2) \left(u_y u_x^\kappa - \frac{1}{2\kappa + 3} u_x^{2\kappa+2} \right) \right) r_x, \\ r_y = \left(\frac{u_y}{u_x} - (\kappa + 1) u_x^{\kappa+1} \right) r_x, \end{cases}$$

и

$$\begin{cases} s_t = \frac{(\kappa + 2)^2}{2\kappa + 3} s_x^{2\kappa+3} - (\kappa + 2) \left(\frac{u_y}{u_x} + u_x^{\kappa+1} \right) s_x^{\kappa+2} \\ \quad + \left(\frac{u_t}{u_x} + (\kappa + 2) u_x^\kappa u_y + \frac{(\kappa + 1)(\kappa + 2)}{2\kappa + 3} u_x^{2\kappa+2} \right) s_x, \\ s_y = -s_x^{\kappa+2} + \left(\frac{u_y}{u_x} + u_x^{\kappa+1} \right) s_x. \end{cases} \quad (44)$$

Система (43) задает преобразование Бэклунда между уравнением (42) и уравнением

$$v_{yy} = v_{tx} + \left(\frac{(\kappa + 1) v_y^2}{v_x^2} - \frac{v_t}{v_x} \right) v_{xx} - \frac{\kappa v_y}{v_x} v_{xy},$$

связанным с уравнением (19) преобразованием Бэклунда (20). Исключение u из системы (44) показывает, что функция s является решением того же самого уравнения (42). Таким образом система (44) определяет автопреобразование Бэклунда для уравнения (42).

В заключении мы суммируем результаты диссертационной работы и обсуждаем дальнейшие направления исследований, в которых могут быть использованы разработанные в ней методы.

Основные публикации автора по теме диссертации

(из официального перечня ВАК)

1. Morozov O.I. Moving coframes and symmetries of differential equations // Journal of Physics, A, Mathematical and General, 2002, Vol. 35, No 12, P. 2965–2977
2. Morozov O.I. Contact-equivalence problem for linear hyperbolic equations // Journal of Mathematical Sciences, 2006, Vol. 135, No 1, P. 2680–2694
3. Morozov O.I. Contact integrable extensions of symmetry pseudo-groups and coverings of (2+1) dispersionless integrable equations // Journal of Geometry and Physics, 2009, Vol. 59, No 11, P. 1461 – 1475
4. Morozov O.I. Cartan’s structure of symmetry pseudo-group and coverings for the r -th modified dispersionless Kadomtsev-Petviashvili equation // Acta Applicandae Mathematicae, 2010, Vol. 109, No 1, P. 257 – 272
5. Morozov O.I. Coverings of differential equations and Cartan’s structure theory of Lie pseudo-groups // Acta Applicandae Mathematicae, 2007, Vol. 99, No 3, P. 309–319
6. Morozov O.I. Cartan’s structure theory of symmetry pseudo-groups, coverings and multi-valued solutions for the Khokhlov–Zabolotskaya equation // Acta Applicandae Mathematicae, 2008, Vol. 101, No 1–3, P. 231 – 241

7. Morozov O.I. Structure of symmetry groups via Cartan's method: comparison of four approaches // Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications, 2005, Vol. 1, Paper 006
8. Морозов О.И. Линеаризуемость и интегрируемость обобщенного уравнения Калоджеро–Хантера–Сакстона // Научный вестник МГТУ ГА, сер. Матем., физ., 2007, № 114 (4), С. 34–41
9. Морозов О.И. Формы Маурера–Картана псевдогруппы симметрий и накрытие второго небесного уравнения Плебанского // Научный вестник МГТУ ГА, 2009, № 140, С. 14–21
10. Морозов О.И. Проблема точечной эквивалентности для обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка. I // Научный вестник МГТУ ГА, 2010, № 157, С. 92–99
11. Морозов О.И. Проблема точечной эквивалентности для обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка. II // Научный вестник МГТУ ГА, 2010, № 157, С. 100–106
12. Морозов О.И. Проблема точечной эквивалентности обобщенных уравнений Эмдена–Фаулера // Дифференциальные уравнения, 2010, Т. 46, № 6, С. 902–903
13. Морозов О.И. Геометрия класса уравнений Абеля и метод эквивалентности Картана // Научный вестник МГТУ ГА, сер. Матем., физ., 2005, № 91 (9), С. 28–35
14. Морозов О.И. Проблема эквивалентности для класса обобщенных уравнений Абеля // Дифференциальные уравнения, 2003, Т. 39, № 3, С. 423–424
15. Морозов О.И. Проблема эквивалентности для класса рациональных обобщенных уравнений Абеля // Дифференциальные уравнения, 2005, Т. 41, № 6, С. 855–856

(прочие)

16. Morozov O.I. Cartan structure of symmetry pseudo-groups of differential equations via the moving coframe method // Foundations of Computational Mathematics – 2002. Minneapolis, 5–14 August 2002. Abstracts of talks. P. 161–162

17. Morozov O.I. Symmetries of differential equations and Cartan's equivalence method // Proceedings of the Fifth Conference „Symmetry in Nonlinear Mathematical Physics“, Kyiv, Ukraine, 23 – 29 June 2003, Part 1, P. 196–203
18. Morozov O.I. Applications of Cartan's structure theory of Lie pseudo-groups in geometry of differential equations // Abstracts of International Conference „Geometry in Odessa – 2006“, Odessa, 22 – 27 May, 2006, P. 127
19. Morozov O.I. Maurer-Cartan forms for symmetry pseudo-groups and coverings of differential equations // Proceedings of the International Conference „Symmetry and Perturbation Theory“ (SPT) 2007, Otranto, Italy, 2-9 June 2007, eds. G. Gaeta, R. Vitolo, S. Walcher. World Scientific, 2007, P. 148 – 155.
20. Morozov O.I. Coverings of differential equations and Lie pseudo-groups // Workshop on Integrable Systems and Related Topics. Abstracts of talks. Institute of Mathematics, Academia Sinica, Taipei, Taiwan, 15 – 16 March 2009. P. 6
21. Морозов О.И. Контактные интегрируемые расширения псевдогрупп симметрий и накрытия уравнений r -mdKP и r -dDym // Современные проблемы математики, механики и их приложений. Материалы международной конференции, посвященная 70-летию ректора МГУ академика В.А. Садовниченко. – М.: Университетская книга, 2009. С. 254–255