МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ М. В. ЛОМОНОСОВА

Механико-математический факультет

На правах рукописи
УДК 517.972.4

БАГДАСАРОВ СЕРГЕЙ КОНСТАНТИНОВИЧ

ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ КЛАССОВ ФУНКЦИЙ С МАЖОРИРУЮЩИМ ВЫПУКЛЫМ МОДУЛЕМ НЕПРЕРЫВНОСТИ

Специальность 01.01.01 - вещественный, комплексный и функциональный анализ

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

МОСКВА
2011

Работа выполнена на кафедре общих проблем управления механико-математического факультета Московского Государственного Университета имени М. В. Ломоносова.

Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, профессор Арестов Виталий Владимирович доктор физико-математических наук, профессор Магарил-Ильяев Георгий Георгиевич доктор физико-математических наук, профессор Малоземов Василий Николаевич
Ведущая организация:	Математический институт имени В. А. Стеклова Российской Академии Наук

Защита диссертации состоится 28 октября 2011 года в 16 час. 40 мин. на заседании диссертационного совета Д 501.001.85 при Московском Государственном Университете имени М. В. Ломоносова по адресу: 119991, ГСП-1, Г. Москва, Ленинские горы, МГУ имени М. В. Ломоносова, Механико-математический факультет, аудитория 16-24.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Механико-математического факультета (Главное здание, 14 этаж).

Автореферат разослан " " сентября 2011 года.

Ученый секретарь диссертационного
совета Д 501.001.85 при МГУ,
доктор физико-математических наук,
профессор В. Н. Сорокин

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Диссертация посвящена изучению экстремальных задач теории приближений, оптимального управления и математической экономики, поставленных для классов функций с общим мажорирующим выпуклым модулем непрерывности.

Актуальность темы. Задачи описания функций наилучшего приближения вошли в математический анализ во второй половине XIX века через работы П. Л. Чебышева, рассмотревшего задачу о полиноме, наименее уклоняющемся от данной непрерывной функции. В диссертации Д. Джексона[1] впервые погрешность приближения индивидуальной функции $f \in C^r[a, b]$ конечномерными подпространствами была выражена в терминах *модуля непрерывности* r-ой производной $f^{(r)}$.

Если вначале исследовалось наилучшее приближение *индивидуальных* функций, то начиная с тридцатых годов XX века акцент сместился в сторону решения экстремальных задач на *классах* функций, обладающими определенными дифференциально-разностными характеристиками. В частности, С. М. Никольский[2] предложил рассматривать *классы функций* $W^r H^\omega(\mathbb{I})$ с модулем непрерывности $\omega(f^{(r)}; t)$, мажорируемым выпуклым модулем непрерывности ω.

После этой публикации возник широкий круг вопросов, связанных с наилучшими характеристиками аппроксимации классов $W^r H^\omega(\mathbb{I})$ конечномерными функциональными подпространствами: алгебраическими и тригонометрическими полиномами данной размерности и полиномиальными сплайнами. Ввиду гораздо более простой структуры экстремальных функций наиболее полные результаты в смысле получения точных констант и описания экстремальных функций были получены в классах $W^r H^\omega(\mathbb{I})$ для *линейного* модуля непрерывности $\omega(t) = t$, т.е. в *соболевских* классах $W^{r+1}_\infty(\mathbb{I})$ функций, чья $(r+1)$-ая производная ограничена единицей.

Для прояснения актуальности темы исследований в диссертации кратко очертим круг наиболее ярких экстремальных задач в соболевских классах, а также отметим вклад математиков, причастных к решению конкретных оптимизационных проблем: задачи Колмогорова – Ландау для промежуточных производных теории аппроксимации, задачи быстродействия и линейной динамики теории оптимального управления и разнообразных проблем математической экономики. При этом в основном будут упомянуты только те задачи и результаты, которые были нами обобщены и распространены с соболевских классов, соответствующих *линейному* модулю непрерывности $\omega(t) = t$, на случай классов $W^r H^\omega(\mathbb{I})$ функций с произвольным мажорирующим *нелинейным выпуклым* модулем непрерывности $\omega(t)$.

[1] D. Jackson, Über die Genauigkett des Annäherung stetigen Funktionen durch ganze rationale Funktionen gegebenen Grades und trigonometrischen Summen gegebener Ordnung, Diss., Göttingen, 1911.

[2] С.М. Никольский, *Ряд Фурье функции с данным модулем непрерывности*, Докл. АН СССР, 52:3 (1946), 191–194.

1. Классические варианты задачи Колмогорова - Ландау в соболевских классах.

Впервые полное описание экстремальных функций и точных констант в неравенствах

$$\|f^{(m)}\|_{\mathbb{L}_\infty(\mathbb{I})} \le c_{rm}\|f\|^{1-\frac{m}{r}}_{\mathbb{L}_\infty(\mathbb{I})}\|f^{(r)}\|^{\frac{m}{r}}_{\mathbb{L}_\infty(\mathbb{I})}, \tag{1}$$

в случае прямой $\mathbb{I} = \mathbb{R}$ было получено А. Н. Колмогоровым[3], показавшим, что *множество экстремальных функций в (1) состоит из функций* $f(t) = \gamma\phi_{\lambda,r}(t+\rho)$ *для* γ, $\rho \in \mathbb{R}$, $\lambda \in \mathbb{R}_+$, *где* $\phi_{\lambda,r}$ – $2\pi/\lambda$*-периодическая функция со свойством* $\phi^{(r)}_{\lambda,r}(t) = \operatorname{sign}\sin(\lambda t)$). Эти функции, иногда называемые *эйлеровыми сплайнами*, ранее фигурировали в работах Ж. Фавара, Н. И. Ахиезера и М. Г. Крейна, Г. Е. Шилова. А. С. Каваретта и И. Дж. Шенберг[4] получили аналогичный результат в случае полупрямой $\mathbb{I} = \mathbb{R}_+$, обобщив частные результаты Э. Ландау ($r = 2$) и А. П. Маторина и С. Б. Стечкина ($r = 3$).

В случае *ограниченных интервалов* $\mathbb{I} = [a, b]$ рассматривается задача о максимизации значения производной функции в точке ξ интервала $[a, b]$:

$$f^{(m)}(\xi) \to \sup, \quad f \in W^r_\infty[a, b], \quad \|f\|_{\mathbb{L}_\infty[a,b]} \le B, \qquad 0 < m < r. \tag{2}$$

Более ранние исследования П. Л. Чебышева, А. А. Маркова, В. А. Маркова, Е. И. Золотарева и С. Н. Бернштейна были посвяшены нахождению алгебраических полиномов P_n степени n, достигающих максимального значения одной из производных в данной точке $\xi \in [a, b]$. В частности, П. Л. Чебышев[5] и Е. И. Золотарев[6] описали многочлены степени n с *одним* или *двумя* фиксированными старшими коэффициентами, наименее уклоняющиеся от нуля на отрезке $[0, 1]$. Е. В. Вороновская и В. А. Гусев[7] получили полное решение задачи о точных неравенствах для промежуточных производных многочленов посредством приложения *функционального метода* к *золотаревским полиномам.*

Более общая *экстраполяционная задача* (2) для точки ξ на краях или за пределами интервала $[a, b]$ была решена С. Карлином[8], который построил семейство *золотаревских совершенных сплайнов.*

---

[3]А.Н. Колмогоров, *О неравенствах между верхними гранями последовательных производных функций на бесконечном интервале*, Ученые записки МГУ, 30 (1939), 3–16.

[4]I. J. Schoenberg, A. Cavaretta, *Solution of Landau's problem concerning higher derivatives on the halfline*, Constructive theory of functions, Proc. of the Intern. Conf. (Varna, 1970), 1, Izdat. Bolgar. Akad. Nauk, Sofia, 1972, 297–308.

[5]П. Л. Чебышев. *Задача о наименьших числах, связанных с приблизительным представлением функций.* Записки Ст.-Петерб. Акад. Наук, 1859.

[6]. И. Золотарев. *Приложение эллиптических функций к вопросам о функциях, наименее и наиболее отклоняющихся от нуля.* Записки Ст.-Петерб. Акад. Наук 30 (5), 1877.

[7]E. V. Voronovskaja. The functional method and its application, volume 28. AMS, Providence, R. I., 1970.

[8]S. Karlin, *Oscillatory perfect splines and related extremal problem*, Studies in spline functions and approximation theory, Academic Press, New York, 1976, 371–460.

2. Задача линейной динамики

В пятидесятых годах прошлого века Д. Бушо и А. А. Фельдбаум предложили математическое решение следующей проблемы классической теории оптимального управления:

$$T \to \inf; \quad (x(0), \dot{x}(0)) = (0,0), \quad (x(T), \dot{x}(T)) = (x_0, x_1), \qquad |\ddot{x}| \le 1.$$

Работы и доклады Фельдбаума на семинарах по теории оптимального управления в Математическом Институте им. Стеклова стимулировали интерес математической школы Понтрягина и впоследствии привели к формулировке и доказательству знаменитого *принципа максимума* для решения общих задач оптимального управления.

Более общая *задача Фельдбаума – Бушо* представляет из себя частный случай более общей задачи линейной динамики о минимизации времени движения:

$$(3) \qquad T \to \inf; \quad \dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t), \quad x(0) = 0_n,\ x(T) = \Lambda, \quad \|u\|_{\mathbb{L}_\infty(\mathbb{R}^r)} \le 1,$$

где $x(t)$, $\Lambda \in \mathbb{R}^n$, $u(t) \in \mathbb{R}^r$, $A(t)$ и $B(t)$ – $n \times n$- и $n \times r$-матричные функции на $\mathbb{R}_+$.

Различные постановки задач в линейной теории оптимальных процессов обсуждаются в трудах Л. С. Понтрягина, В. Г. Болтянского, Р. В. Гамкрелидзе и Е. Ф. Мищенко[9], Р. Беллмана, И. Гликсберга и О. Гросса, Х. Хермеса и Дж. Ласалля[10]. При особом выборе интегрального ядра $Y(t)$ задача А. Ляпунова[11] об описании критических точек множества

$$(4) \qquad \mathcal{M}[Y] := \left\{ \int_0^T Y(t)u(t)\,dt \,\Big|\, u(\cdot) = (u_1(\cdot), \dots, u_r(\cdot)) \in \mathrm{Lip}^r[0,T] \right\}$$

значений векторных мер эквивалентна решению задачи быстродействия (3). Отметим, что помимо решения аналогов этих задач для управлений с общим мажорирующим модулем непрерывности ω в диссертации приведен соответствующий вариант *принципа максимума*, чье доказательство не опирается на *метод игольчатых вариаций.*

3. Задачи математической экономики.

Экстремальная функция любой задачи в классах $H^\omega[a,b]$ функций с мажорирующим выпуклым модулем непрерывности ω максимизирует функционал

$$(5) \qquad \int_a^b h(t)\psi(t)\,dt \to \sup, \qquad h \in H^\omega[a,b],$$

для определенного (зависящего от задачи) ядра $\psi \in \mathbb{L}_1[a,b]$ с конечным числом точек перемены знака на $[a,b]$. На функции из класса $H^\omega[a,b]$ также налагаются дополнительные граничные ограничения, если среднее ядра ψ не равно нулю.

В диссертации предъявлены формулы и описаны разнообразные структурные свойства экстремальных функций задачи (5), которые естественно назвать *совершенными ω-сплайнами.* Интересно, что в терминах этих функций описываются оптимальный план

---

[9] Л.С. Понтрягин, В. Г. Болтянский, Р.В. Гамкрелидзе, Е.Ф. Мищенко, Математическая теория оптимальных процессов, Наука, М., 1976

[10] H. Hermes, J.P. LaSalle, Functional Analysis and Optimal Control, Academic Press, New York, London, 1969.

[11] A. Lyapunov. *Sur les fonctions-vecteurs completement additives.* Bull. Sci. USSR, Ser. Math., 4:465–478, 1940.

транспортировки и минимальная стоимость затрат в известной *транспортной задаче Канторовича – Монжа*:

$$\int\limits_{X\times Y} c(x,y)\,d\pi(x,y) \to \min, \qquad \pi \in \Pi(\mu,\nu) \tag{6}$$

при определенном выборе функции $c(x,y)$. Действительно, дуальная связь задач (5) и (6) проявляется следующим образом. Пусть борелевские меры μ, ν на $[a,b]$ таковы, что $\int_a^b d\mu(x) = \int_a^b d\nu(y)$ и их разность – абсолютно непрерывная мера ρ: $d\rho(x) = \psi(x)\,dx$ для некоторого ядра ψ с нулевым средним и конечным множеством точек перемены знака. Если функция стоимости определяется формулой $c(x,y) = \omega(|y-x|)$ для выпуклого модуля непрерывности ω, то транспортная задача Канторовича – Монжа (6) двойственна задаче максимизации функционалов (5). Важность решения этой задачи для построения теории экстремальных задач в классах W^rH^ω обсуждается в следующем разделе.

Цель работы. Основной целью диссертации является построение элементов теории экстремальных задач в функциональных классах W^rH^ω для выпуклых модулей непрерывности ω.

Начальные главы диссертации посвящены анализу структурных свойств оптимальных функций задачи максимизации функционалов (5), в терминах которых характеризуются решения любой экстремальной задачи в классах W^rH^ω. Эти функции, называемые нами *совершенными ω-сплайнами*, являются естественными обобщениями стандартных идеальных сплайнов, нашедших особенно широкое распространение в теории оптимального управления и получивших в этой специальности название релейных или осциллирующих управлений. После детального описания структуры совершенных ω-сплайнов предлагается решение ряда широко известных задач теорий аппроксимации и оптимального управления.

Методы исследования. В работе используются методы теории аппроксимации, линейного и выпуклого программирования, вариационного исчисления и теории оптимального управления, теории функций и функционального анализа.

Научная новизна. Все представленные в диссертации результаты опубликованных работ автора являются новыми. Перечислим основные результаты диссертации.

1. В разнообразных постановках решается задача о максимизации интегральных функционалов на классах функций, чей модуль непрерывности мажорируется данным выпуклым модулем непрерывности. Данные результаты обобщают результаты Н. П. Корнейчука и С. Б. Стечкина в данной тематике со случая интегрального ядра с единственной точкой перемены знака на случай ядер с произвольным конечным или счетным числом отрезков постоянства знака.

Раскрываются приложения этой задачи к проблемам математической экономики. Сама задача о максимизации интегральных функционалов совпадает с проблемой моделирования такого планирования производства, при котором минимизируются суммарные издержки на хранение и и штрафы за недопроизводство продукции, а дуальная задача представляет из себя вариант *транспортной задачи Канторовича – Монжа.*

Вводится понятие нового вида перестановки суммируемых функций – *экстремальной ω-перестановки*, в терминах которой выражается числовое решение задачи максимизации функционалов. Проясняются разнообразные отношения между стандартными убывающими перестановками, Σ-перестановками Корнейчука и экстремальными ω-перестановками.

Для получения графических интерпретаций свойств решений дискретной задачи максимизации функционалов вводится новое понятие *графа перестановок* и изучаются структурные особенности этих графов: свойства гамильтоновости и эйлеровости, наличие графов перестановок с фиксированным циклом в терминах отношения Харди – Литтлвуда – Полиа для вершин цикла. Устанавливается тесная связь между свойствами экстремальных векторов дискретной задачи максимизации функционалов и графов перестановок. В частности, единственность решения задачи максимизации функционалов оказывается эквивалентной связности графа перестановок.

2. Характеризуются экстремальные функции – эйлеровы, чебышевские, золотаревские ω-сплайны – в точных неравенствах Колмогорова – Ландау для промежуточных производных в классах $W^rH^\omega(\mathbb{I})$ в случае прямой $\mathbb{I} = \mathbb{R}$, полупрямой $\mathbb{I} = \mathbb{R}_+$, отрезка при ограничениях в равномерной метрике и метрике L_p. Тем самым известные результаты А. Н. Колмогорова, В. М. Тихомирова[12], И. Дж. Шенберга и А. С. Каваретты, С. Карлина, А. Пинкуса, Г. Г. Магарил-Ильяева[13] в данной тематике обобщаются со случая соболевских классов, соответствуюших *линейному* модулю непрерывности ω, на случай классов W^rH^ω для произвольного *нелинейного выпуклого* ω.

Кроме того, подобные обобщения результатов на нелинейный случай сделаны и в ряде наиболее важных частных случаев постановок этих задач: Ландау и Адамара (первая производная), Стечкина и Маторина (вторая производная), экстраполяционной задачи Маркова для равномерной метрики, Фуллера – Габушина – Магарил-Ильяева в метрике L_p.

3. Приводится полное описание экстремальных траекторий общей *задачи линейной динамики* для управлений из класса W^rH^ω – обобщения одной из наиболее известных задач классического оптимального контроля, поставленной в случае линейного ω.

---

[12]В. М. Тихомиров. *Поперечники множеств в функциональных пространствах и теория наилучших приближений.* УМН, 15(3):81-120, 1960.

[13]Г. Г. Магарил-Ильяев. *Неравенства для производных и двойственность.* Труды МИАН им. Стеклова, 161:183–194, 1983.

Кроме того, детально разбираются три важных частных случая этой задачи: *задача быстродействия Фельдбаума – Бушо*, *задача Ляпунова о структуре множества значений векторных мер* и общая *задача Колмогорова о геометрическом месте значений промежуточных производных.* Как и при решении других проблем, устанавливается ряд новых феноменов, присущих решениям задачи линейной динамики только в случае *нелинейных модулей непрерывности* ω: существование некритических областей неединственности на границе множества достижимости и наличие лишь конечного множества *точек Беллмана,* удовлетворяющих *принципу динамического программирования.*

4. При рассмотрении выпуклого функционального класса в качестве множества допустимых управлений демонстрируется, что необходимое условие оптимальности принимает форму *интегрального принципа максимума.* На примере класса H^ω как множества таких управлений показано, каким образом этот принцип может использоваться для определения экстремальных функций как в вышеперечисленных задачах Колмогорова – Ландау для производных или задаче линейной динамики, так и в некоторых прикладных задачах финансовой математики, в частности, торговых моделях товарно-сырьевого и фондового рынков.

Теоретическая и практическая ценность. В диссертации предложено решение ряда экстремальных задач в классах $W^r H^\omega(\mathbb{I})$, которые представляют и теоретический, и прикладной интерес. Результаты и методы решения могут быть использованы в теории аппроксимации, теории оптимального управления и вариационного исчисления, теории функций и функциональном анализе.

Результаты цикла работ, посвященного решениям задач Колмогорова – Ландау, могут быть использованы для получения оптимальных формул численного дифференцирования. Другой цикл работ связан с решением задач линейной динамики теории оптимального управления и различных вариантов транспортной задачи математической экономики, находящих применение в оптимальном планировании производства в промышленности, сельском хозяйстве, торговле, транспорте, финансовых операциях и макроэкономике.

Апробация работы. Результаты диссертации докладывались на следующих международных конференциях и научно-исследовательских семинарах.

Научная школа по теории аппроксимации и ее приложениям,

Алушта, 13–17 мая, 1991.

922-ая конференция Американского Математического Общества,

Уэйн Стэйт Университет, Детройт, США, 2–4 мая, 1997.

7-ой международный симпозиум по анализу и его приложениям,

Университет Мэна, Ороно, США, 1–6 июня, 1997.

Конференция по теории операторов и ее приложениям,

Одесский Государственный Университет, 18–22 августа, 1997.

Конференция по анализу,

Университет штата Огайо, Колумбус, США, 12–16 октября, 1999.

Конференция по экстремальным проблемам анализа (EPOCRA),

Российский Университет Дружбы Народов, 22–26 мая, 2007.

Семинар по анализу университета Брауна,

Университет Брауна, Провиденс, США, 20 октября, 1997.

Семинар по теории приближений В.М. Тихомирова,

Московский Государственный Университет имени М. В. Ломоносова, ежегодные доклады в 1994 – 2010.

Семинар по прикладной математике,

Университет штата Огайо, Колумбус, США, 30 сентября, 1996, 24 апреля, 2007.

Публикации. Все результаты диссертации опубликованы в 13 работах автора – монографиях, журнальных статьях, сборниках трудов конференций и препринтах научно-исследовательского института. Библиография в заключительном разделе автореферата включает в себя 10 работ автора, опубликованных в изданиях из списка Высшей аттестационной комиссии Министерства образования и науки Российской Федерации.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения и 8 частей, разбитых на 30 глав. 40 графиков иллюстрируют содержание диссертации, чей общий объем составляет 304 страницы. Библиография диссертации содержит 129 наименований, включая 10 работ автора.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Как уже упоминалось, диссертация состоит из 8 частей. В данном обзоре каждой из этих частей посвящен одноименный раздел, в котором приводятся основные результаты для соответствующей темы.

Введение. Во введении обсуждается предшествующая история и мотивация исследований в области функциональных классов с ограничивающим модулем непрерывности. В предисловии также приводится простой, но в то же время информативный, пример решения одной известной задачи аппроксимации в классах $W^r H^\omega$ для нелинейного модуля непрерывности ω – построение аналогов классических полиномов Чебышева в классах $W^r H^\omega$.

Часть 1. Задача о максимизации интегральных функционалов в $H^\omega[a,b]$. В начальной главе, базирующейся на результатах работ [1], [2], вводится понятие *совершенных ω-сплайнов* как экстремальных функций задачи

$$\int_a^b h(t)\psi(t)\,dt \to \sup, \qquad h \in H^\omega[a,b], \tag{7}$$

для ядер $\psi \in \mathbb{L}_1[a,b]$ с конечным числом точек перемены знака на $[a,b]$.

Прежде чем объяснить решение задачи (7) в случае нелинейных модулей непрерывности ω, в главе 5 внимание читателя обращается на свойства и роль полиномиальных совершенных сплайнов в теории экстремальных задач в соболевских классах. В частности, при упоминании об интерполяционных и экстремальных свойствах таких сплайнов отмечаются статьи Пинкуса, Карлина, Мичелли, Ривлина и Винограда, И. Дж. Шенберга и А. Уитни, В. В. Арестова, а также книги Малоземова, Певного и Тихомирова.

Затем поясняется, что особая роль полиномиальных совершенных сплайнов в теории соболевских классов $W^r_\infty[a,b]$ объясняется их экстремальностью в задаче

$$(8) \qquad \int_a^b h^{(r-1)}(t)\psi(t)\,dt \to \sup, \qquad h \in W^r_\infty[a,b], \quad h^{(r-1)}(a) = E \in \mathbb{R},$$

где ψ – некоторое интегральное ядро с конечным или монотонно упорядоченным счетным множеством точек перемены знака на $[a,b]$. При этом форма ядра $\psi(t)$ определяется типом экстремальной задачи в классе $W^r_\infty[a,b]$. Например, в задаче Колмогорова – Ландау в равномерной метрике такими функциями служат ядра Фредгольма. В задаче быстродействия (задаче о рандеву) генерирующим ядром может быть произвольный полином соответствующей размерности. В транспортной задаче (задаче о перемещении массы) такой функцией может служить произвольная суммируемая функция с конечным числом точек перемены знака (поскольку существует конечное число производителей и потребителей продукции), которая в данном случае выступает в качестве разности между конечным и начальным распределением массы. Все эти задачи подробно рассмотрены в последующих главах диссертации.

Внимание читателя также обращается на тот факт, что генерирующие ядра $\Psi_1(x) = \int_b^x \psi_1(t)\,dt$ и $\Psi_2 = \int_b^x \psi_2(t)\,dt$ с одинаковыми множествами точек перемены знака порождают одну и ту же функцию $\dfrac{d^r}{dt^r}x^*(t)$ *вне зависимости от их структуры на* $[a,b]$. Эта, на первый взгляд несущественная, особенность совершенных сплайнов является причиной того, что разные задачи в соболевских классах могут иметь совпадающие множества экстремальных функций. К примеру, ни золотарёвские, ни эйлеровы или чебышёвские сплайны разных вариантов колмогоровской задачи

$$(9) \qquad \|f^{(m)}\|_{\mathbb{L}_\infty(\mathbb{I})} \to \sup, \qquad f \in W^r_\infty(\mathbb{I}), \quad \|f\|_{\mathbb{L}_\infty(\mathbb{I})} \le B, \qquad 0 < m < r,$$

для $\mathbb{I} = \mathbb{R}$, $\mathbb{R}_+$, $[0,1]$ не зависят от порядка производной m. Кроме того, каждый из чебышёвских сплайнов из задачи о поперечниках также является экстремальным золотарёвским сплайном задачи (9).

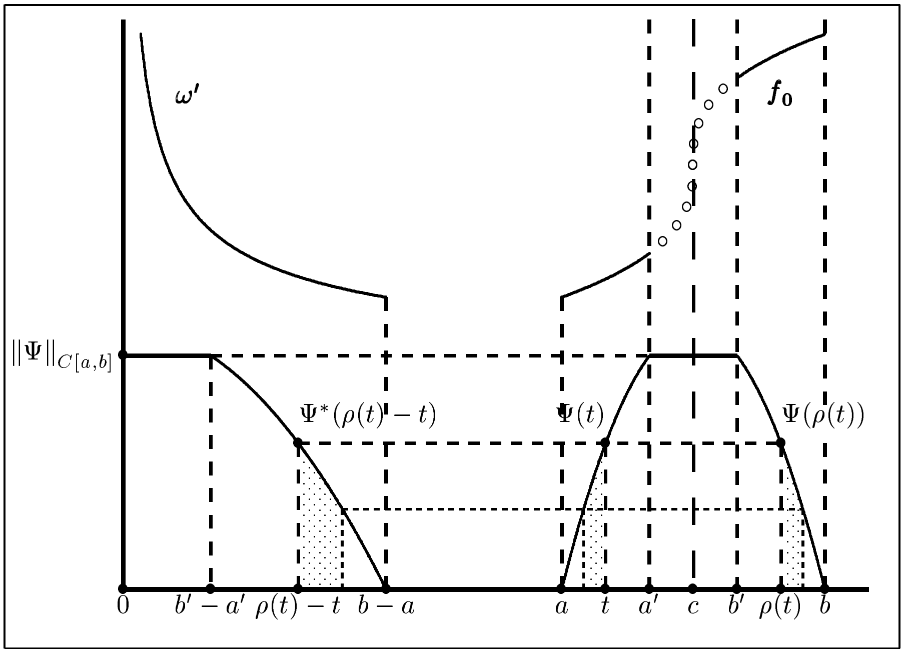

Рис. 1. Перестановка $\Psi^*(\cdot)$ простого ядра Ψ и функция f_0

В диссертации рассматриваются классы функций, задаваемые ограничениями для модуля непрерывности вида $\omega(f^{(l-1)};t) \leq \omega(t)$ для произвольного *выпуклого модуля непрерывности* ω. Ограничения такого типа дают возможность не только контролировать верхнюю грань $f^{(l)}$, но и сохранять информацию о порядке роста функции $f^{(l-1)}$. Это наблюдение приводит к следующим *постановкам* новых проблем в функциональных классах с общим мажорирующим модулем непрерывности.

В п. 6.1 отмечается, что отправным пунктом в рассмотрении проблем этой тематики послужила форма решения Н. П. Корнейчуком варианта задачи (7) для ядер с нулевым средним и одной точкой перемены знака, т.е. производных так называемых *простых ядер.* Рисунок 1 иллюстрирует структуру экстремальных функций в Лемме Корнейчука.

Другим вводным элементом служит понятие ψ-разбиения интервала $[a, b]$ из п. 6.3, в терминах которого характеризуется структура экстремальных функций задачи (7) в общем случае.

Наконец, после введения всех необходимых определений и обозначений в п.п. 6.2, 6.3 формулируется *основной результат тематики, Теорема 6.12 о строении экстремальных функций задачи (7)*, и анализируются разнообразные свойства совершенных ω-сплайнов, структура экстремальных разбиений ядра $\Psi(x) = \int_b^x \psi(t)\,dt$ на сумму простых ядер, понятие экстремальной перестановки $\Re_\omega(\Psi;\cdot)$, особенности решения задачи (7) в гельдеровских классах (в п. 6.3). Рисунки 2, 3 иллюстрируют строение экстремальных функций. Каждый чертеж содержит графики экстремальной функции x^* и ядра Ψ, а также идентифицирует атомы оптимального ψ-разбиения.

Далее в п. 6.5 обсуждаются различные варианты задачи (7) в случаях, когда среднее функции ψ не равно нулю. Во-первых, это модификация задачи (7) при фиксированном

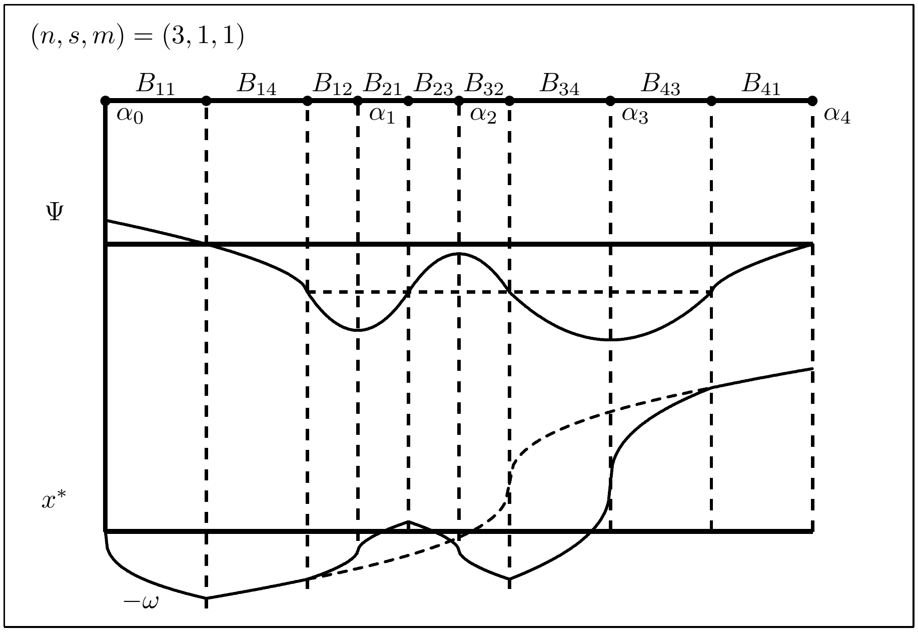

Рис. 2. Графики экстремальной функции x^*, ядра Ψ и интервалы разбиения в случае $(n,s,m)=(3,1,1)$.

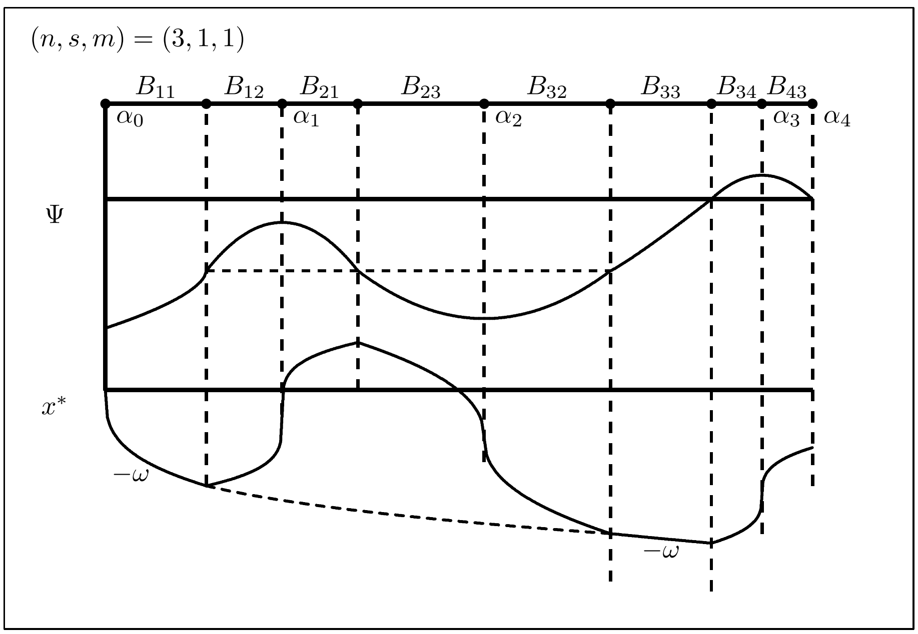

Рис. 3. Графики экстремальной функции x^*, ядра Ψ и интервалы разбиения в случае $(n,s,m)=(3,1,1)$.

значении функции $h \in H^\omega[a,b]$ на одном из концов отрезка; данный вариант особенно полезен при описании решения задачи Колмогорова – Ландау о максимизации значения последней производной. Вторым важнейшим случаем задачи (7) является вариант, при котором оба значения функции $h \in H^\omega[a,b]$ фиксированы, поскольку именно в терминах экстремальных функций этих задач описываются решения задач оптимального управления в классах W^rH^ω, в частности, общей задачи линейной динамики. Также рассматривается случай фиксированного значения во внутренней точке функции $h \in H^\omega[a,b]$, необходимый при решении задачи Золотарева или Колмогорова о максимизации значения последней производной во внутренней точке интервала. Наконец, обсуждается решение задачи о максимизации интегральных функционалов на классах функций x с несимметричными модулями непрерывности ω_1 и ω_2 по возрастанию и убыванию:

$$-\omega_1(t_2-t_1) \le x(t_2)-x(t_1) \le \omega_2(t_2-t_1), \quad \forall (t_1,t_2) : a \le t_1 < t_2 \le b.$$

Именно этот вариант задачи (7) совпадает с формулировкой проблемы моделирования такого планирования производства, при котором минимизируются суммарные издержки на хранение и штрафы за недостаточное производство продукции.

Завершают главу 6 критерий тривиальности ψ-разбиений (в п. 6.6), при которых локальные H^ω функции склеиваются в глобальные функции из $H^\omega[a,b]$, и формулировка предельных свойств совершенных ω-сплайнов (в п. 6.7). Критерий тривиальности экстремальных ψ-разбиений играет важнейшую роль в описании структурных свойств решений задачи Колмогорова в $W^1H^\omega(\mathbb{R})$ и $W^1H^\omega(\mathbb{R}_+)$ в норме $\mathbb{L}_p$. Предельные свойства идеальных ω-сплайнов находят свое применение как при обосновании непрерывности многочисленных борсуковских отображений в доказательствах теорем существования, так и при получении структурных свойств функций, построенных при предельном переходе. Например, все экстремальные функции задачи Колмогорова на бесконечных интервалах $\mathbb{R}$ и $\mathbb{R}_+$ были получены как предел чебышевских ω-сплайнов с конечным числом точек альтернанса и узлов.

Часть 2. Дискретная задача максимизации функционалов. После введения обозначений

$$\mathbb{H}^\omega[n] := \big\{(z_0,z_1,\dots,z_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid |z_j-z_i| \le \omega(j-i),\ 0 \le i < j \le n\big\},$$
$$\mathbb{H}^\omega_p[n] := \big\{(z_0,z_1,\dots,z_n) \in \mathbb{H}^\omega[n] \mid z_p = 0\big\},$$

в *основных результатах Части 2, Теоремах 7.3 и 7.12*, описываются решения дискретной задачи

$$\langle V, Z\rangle \to \sup, \qquad Z \in \mathbb{H}^\omega_0[n], \tag{10}$$

и ее более общего варианта (который мы сводим к (10))

$$\langle V, Z\rangle \to \sup, \qquad Z \in \mathbb{H}^\omega_p[n], \qquad 0 \le p \le n, \tag{11}$$

а также вводится понятие перестановки для произвольных n-мерных векторов (в п. 7.2).

Так же, как и в непрерывном случае, задача (10) сначала решается (в п. 7.3) для простых векторов V, т. е. векторов, чьи координаты меняют знак один раз. Этот результат может рассматриваться как дискретный аналог *леммы Корнейчука*. В частности, показывается, что элементы $\{v_{i,j}\}_{i,j\in\mathbb{Z}[n]}$ экстремального разложения и ω-перестановки простых векторов не зависят от ω. Кроме того, устанавливаются критерии единственности решений задачи (10) в случае простых векторов. Наконец, показывается, что если $V \in \mathbb{Z}^N$ – простой вектор с целочисленными компонентами, то и координаты перестановки $\Lambda_\omega(V)$ имеют целочисленные координаты.

Далее, как и в непрерывном случае, в п. 7.4 решение задачи (10) в случае вектора V с нулевой суммой компонент редуцируется к решению конечного числа задач (10) для простых векторов.

Результаты раздела, посвященного решению задачи (10) для простых векторов, послужили базисом для индуктивного доказательства общего результата по числу перемен знака компонент векторов V в нашей работе [2]. Доказательство индуктивного шага было проведено отдельно для векторов с *четным* и *нечетным* числом перемен знака в компонентах вектора. В п. 7.5 объясняется специфика каждого из этих случаев и раскрываются некоторые дополнительные интересные свойства экстремальных векторов задачи (10). Например, показывается, что в случае векторов V с нулевой координатой задача (10) имеет континуум решений.

Отдельный раздел главы, п. 7.6, посвящен рассмотрению специальных случаев задачи (10), широко используемых в разнообразных приложениях теории приближений, оптимальном контроле, функциональном анализе, математической экономике и конструктивной теории функций.

Во-первых, раскрывается связь между дискретным вариантом и *непрерывной версией* задачи (10) о максимизации интегральных функционалов $h \mapsto \int_a^b h(t)\psi(t)\,dt$ во множестве функций $h \in H^\omega[a,b] \,:\, h(a) = 0$, при условии, что ядра $\psi \in C[a,b]$ имеют конечное число перемен знака на $[a,b]$. Во-вторых, исследуются перестановки целочисленных векторов. В-третьих, описание экстремалей задачи с фиксированными граничными условиями

$$\langle V, Z\rangle \to \sup, \qquad Z = (z_0, \dots, z_n) \in \mathbb{H}_\omega[n], \qquad z_0 = \xi_1, \qquad z_n = \xi_2,$$

сводится к решению двух непрерывных вариантов проблемы (10).

В-четвертых, приводится решение задачи (10) в несимметричных классах $H^{\omega_0,\omega_1}[n]$ с разными модулями непрерывности ω_1 по возрастанию и ω_0 по убыванию.

В главе 8 диссертации, посвященной графическим интерпретациям дискретной задачи максимизации функционалов, вводится понятие *графа перестановок* $\mathbb{G}_\omega(V)$ и исследуются свойства отображения $V \mapsto \mathbb{G}_\omega(V)$ из пространства $\mathbb{R}_0^{n+1}$ во множество графов с вершинами в $\mathbb{Z}[n]$ и ребрами $\mathbb{Z}[n] \times \mathbb{Z}[n]$. Структурные особенности этих графов $\mathbb{G}_\omega(V)$ проливают новый свет на свойства решений задачи (10).

В работе [2] было установлено существование разбиения данного вектора V с нулевой суммой компонент на суммы простых векторов V_{ij}, для некоторых пар $1 \le i < j \le n$, каждый из которых имеет ненулевые координаты v_{ij}^i, v_{ij}^j, $(v_{ij}^i = -v_{ij}^j)$ лишь для индексов i и j, соответственно. Кроме того, разбиение $V = \sum V_{ij}$ обладает свойством

$$\sup_{Z \in \mathbb{H}^\omega[n]} \langle V, Z\rangle = \sum_{(i,j)} \sup_{Z \in \mathbb{H}^\omega[n]} \langle V_{ij}, Z\rangle.$$

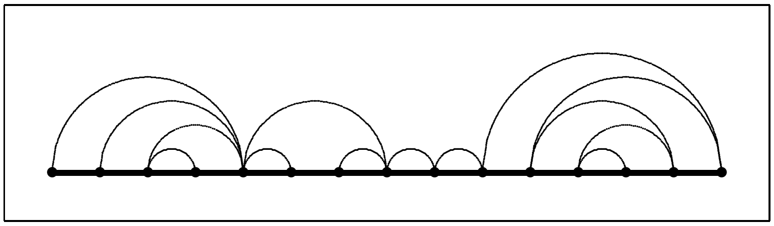

Рис. 4. Планарная реализация графа перестановок $\mathbb{G}_\omega(\mathbb{V})$

Тогда граф перестановок $\mathbb{G}_\omega(V)$ вводится п. 8.1 следующим образом: две вершины i, j графа $\mathbb{G}_\omega(V)$ соединены ребром тогда и только тогда, когда $v_{i,j} \neq 0$. Конечно, если задача (10) имеет континуум решений, то возможно существование графов $\mathbb{G}_\omega(V)$, порожденных разными элементами $\{v_{i,j}\}_{i,j\in\mathbb{Z}[n]}$ декомпозиции вектора $V \in \mathbb{R}_0^{n+1}$.

Далее, в п. 8.5 установливается ряд свойств графов перестановок. Например, любой граф $\mathbb{G}_\omega(V)$ перестановок является двудольным планарным графом (также описываются планарные представления графов $\mathbb{G}_\omega(V)$ для простых и произвольных векторов V – см. Рисунок 4).

Напомним, что цикл (или цепь) графа называется *гамильтоновым* (*эйлеровым*), если он проходит через все вершины (ребра). Граф называется *гамильтоновым* (или *эйлеровым*) при условии наличия в нем соответствующего цикла. Показывается, что связный граф $\mathbb{G}_\omega(V)$ не является ни гамильтоновым, ни эйлеровым. Кроме того, объясняется, что связный граф $\mathbb{G}_\omega(V)$ перестановок имеет гамильтонову цепь тогда и только тогда, когда он изоморфен P_n – графу с множеством вершин $\mathbb{V} = \mathbb{Z}[n]$ и ребер $\mathbb{E} = \big\{(k-1,k)|k = 1,\dots,n\big\}$.

Также получен результат, предлагающий естественное представление *деревьев* в качестве графов перестановок (п. 8.7).

Для любого дерева $\mathcal{T}$ с $n+1$ вершиной и любого выпуклого модуля непрерывности ω существует такой вектор $V = (v_0,\dots,v_n) \in \mathbb{R}_0^{n+1}$, что граф $\mathbb{G}_\omega(V)$ изоморфен $\mathcal{T}$ и $|v_i| = \deg(w_i)$, где w_i – вершина в $\mathcal{T}$, соответствующая вершине i графа перестановок $\mathbb{G}_\omega(V)$ при всех $i \in \mathbb{Z}[n]$.

Затем исследуется вопрос существования графа перестановок с фиксированным циклом $i_1 \to i_2 \to \cdots \to i_k \to i_1$. Оказалось, что критерий существования может быть сформулирован в терминах *отношения Харди–Литтлвуда–Полиа* для вершин рассматриваемого цикла (см. Предложение 8.18 в п. 8.8).

Основное же применение графов перестановок заключается в их удобстве для интерпретации всевозможных структурных свойств экстремальных векторов задачи (10). Например, соотношения между ненулевыми координатами простых векторов экстремального разбиения наиболее легко формулируются в терминах соответствующих миноров матрицы смежности графа перестановок (Лемма 8.5, п. 8.1). Два экстремальных подразбиения в случае четного числа перемен знака (п. 8.3) в координатах вектора V и три таких разбиения в нечетном случае (п. 8.4) легко переформулируются в терминах сответствующих подграфов графа перестановок и его *точек сочленения*, т.е. тех вершин, после удаления которых граф становится несвязным.

Наконец, замечательным свойством графов перестановок является следующий критерий: задача (10) имеет единственное решение тогда и только тогда, когда граф $\mathbb{G}_\omega(V)$ связен (Теорема 8.13, п. 8.6).

Транспортная задача, которой посвящена глава 9, занимает особое положение в теории линейного программирования ввиду ее тесной связи с разнообразными проблемами бизнеса и экономики. В специально выделенной главе диссертации рассматриваются ее наиболее известные дискретные и непрерывные формы.

Классический дискретный вариант допускает следующую формулировку (п. 9.1). Предположим, что однородная (например, сырьевая) продукция производится и потребляется в конечном числе фабрик, расположенных в нашей модели в целочисленных точках положительной полупрямой. Предположим также, что известен *вектор V спроса и предложения*: количество продукции, произведенной в точке i, представляется положительной компонентой $v_i > 0$ вектора V, нужда потребителя j продукции измеряется координатой $v_j < 0$, пассивная фабрика k соответствует нулевому v_k, и стоимость перемещения единицы продукции из точки i в точку j равна $\omega\big(|j-i|\big)$ для фиксированного выпуклого модуля непрерывности ω. Предположение о совпадении общего спроса и предложения и конечности участников экономических операций эквивалентно допущению $V \in \mathbb{R}_0^{n+1}$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$. В "транспортной задаче" ставится вопрос об оптимальном распределении продукции между производителями и потребителями с целью минимизации стоимости транспортных затрат.

В п.п. 9.2, 9.3 читателю напоминаются понятие и связь между двойственной и прямой задачами линейного программирования. Затем задача (10) и ее двойственная ставятся в канонической форме задачи линейного программирования. При этом было показывается, что "транспортная задача" совпадает с вариантом задачи, двойственной к (10). Детальное обсуждение дуальности и ссылки на теоремы двойственности для конечномерных и непрерывных "транспортных задач" даны В. Л. Левиным[14]. История и современный прогресс в теории "транспортной задачи" широко представлены в работах Р. Маккена[15] и монографии С. Виллани[16].

Наблюдение о двойственности задачи о максимизации линейного функционала и транспортной задачи позволило в п. 9.5 дать удобную экономическую интерпретацию многих результатов предыдущих параграфов диссертации.

[14]V. L. Levin. *General Monge–Kantorovich problem and its applications in measure theory and mathematical economics.* Functional Analysis, Optimization and Mathematical Economics, pages 141–176, 1990.

[15]R. McCann. Exact solutions to the transportation problem on the line. Proc. Royal Soc. London Ser. A, 455:1341–1380, 1999.

[16]C. Villani. Topics in Optimal Transportation, volume 58 of Graduate Studies in Mathematics. AMS, Providence, R. I., 2003.

Элемент $v_{i,j}$ разложения вектора V совпадает с количеством продукции, полученной из (при $v_i < 0$) или отправленной в (при $v_i > 0$) j-ю фабрику i-й фабрикой.

Кроме того, из формы экстремального вектора в задаче (10) вытекает, что перемещения грузов между двумя потребителями или двумя производителями запрещены в оптимальной схеме перевозок в случае выпуклой функции стоимости $\omega\big(|x-y|\big)$.

Дискретная версия леммы Корнейчука требует, чтобы перевозки от каждого производителя $i = 1, \ldots, n-1$ осуществлялись наиболее удаленному из еще не загруженных потребителей при условии, что груз уже был отправлен из точек $0, 1, \ldots, i-1$. Задача (10) для простого вектора V имеет единственное решение тогда и только тогда, когда все фабрики *активны*, т.е. они производят или потребляют ненулевое количество продукции, и после отправки груза i-й фабрики ($i = 0, \ldots, n-2$) ее *ближайший получатель* для полного удовлетворения своих нужд требует дополнительной поставки из $(i+1)$-й фабрики.

Следующее определение упрощает интерпретацию критерия единственности в общем случае $V \in \mathbb{R}_0^{n+1}$.

Пусть $V \in \mathbb{R}_0^{n+1}$ и $\mathbb{I} \subset \mathbb{Z}[n]$ – собственное подмножество в $\mathbb{Z}[n]$. Пара $(V, \mathbb{I})$ образовывает *замкнутую транспортную систему*, если не существует экономической связи между фабриками в $x \in \mathbb{I}$ и $x \in \mathbb{Z}[n] \setminus \mathbb{I}$, т.е. ни одна фабрика в $x \in \mathbb{I}$ не снабжается фабрикой из $x \in \mathbb{Z}[n] \setminus \mathbb{I}$ и наоборот. В терминах элементов разложения вектора V, $v_{i,j} = 0$ для всех $i \in \mathbb{I}$ и $j \in \mathbb{Z}[n] \setminus \mathbb{I}$.

Согласно результатам диссертации, *задача (10) имеет единственное решение тогда и только тогда, когда ни одна пара $(V, \mathbb{I}_{i,j})$ с $\mathbb{I}_{i,j} := \{i, i+1, \ldots, j\}$ не образовывает замкнутую транспортную систему.*

В терминах замкнутых транспортных систем интерпретируются и экстремальные разбиения в случаях четного и нечетного числа перемен знака координат вектора V.

Если координаты вектора $V \in \mathbb{R}_0^{n+1}$ имеют четное число перемен знака, то транспортная система $(V, \mathbb{I}_{0,n})$ распадается на две системы $\mathcal{V}_1 = (V_1, \mathbb{I}_{0,L})$ и $\mathcal{V}_2 = (V_2, \mathbb{I}_{L,n})$ с не более чем одной фабрикой (в точке L), имеющей связи с фабриками в обеих транспортных системах.

Если координаты V имеют нечетное число перемен знака, то $(V, \mathbb{I}_{0,n})$ распадается на три транспортные системы: $\mathcal{V}_1 = (V_1, \mathbb{I}_{K,L})$, $\mathcal{V}_2 = (V_2, \mathbb{I}_{L,M})$ и $\mathcal{V}_3 = (V_3, \mathbb{I}_{0,K} \cup \mathbb{I}_{M,n})$. При этом единственная возможная связь между $\mathcal{V}_1$ и $\mathcal{V}_2$ осуществляется в точке L. Система $(V_3, \mathbb{I}_{0,K})$ содержит только производителей (только потребителей), а $(V_3, \mathbb{I}_{M,n})$ включает в себя лишь потребителей (производителей) соответственно. Система $\mathcal{V}_3$ может иметь только одну связь с внешним миром: либо с системой $\mathcal{V}_1$ в точке K, либо с $\mathcal{V}_2$ в точке M.

В диссертации много внимания уделяется обсуждению транспортной задаче математической экономики как двойственной к задаче максимизации линейного функционала. Однако, прямая задача сама допускает интересную экономическую интерпретацию и известна как *модель агрегированного планирования производства* (п. 9.6).

В *модели агрегированного планирования производства* для каждого момента времени заданы объемы как производства, так и спроса на данную продукцию. Также определены функции и издержек хранения, и, наоборот, издержек дефицита единицы продукции для любой продолжительности времени. Требуется минимизировать общие издержки, т.е. сумму штрафов как за дефицит, так и за перепроизводство продукции.

Наконец, в завершение изложения математико-экономических приложений задачи о максимизации функционалов в классах H^ω в п. 9.7 обсуждается классическая транспортная задача в непрерывном случае.

Задача Канторовича – Рубинштейна для данной функции стоимости $c(x, y)$ формулируется следующим образом:

$$\int\limits_{X\times Y} c(x,y)\,d\pi(x,y) \to \min, \qquad \pi \in \Pi(\mu,\nu). \tag{12}$$

Эта проблема минимизации была исследована Л. В. Канторовичем.

В *задаче Монжа* налагается дополнительное требование неделимости массы: масса из точки x может быть перемещена в единственную точку y. За решение этой задачи Парижской Академией Наук был объявлен специальный приз, который получил за свой трактат П. Аппель.

Как и в дискретном случае, легко проследить связь задачи Канторовича – Монжа с задачей максимизации функционалов в классах H^ω.

Действительно, для двух данных борелевских мер μ, ν на $[a,b]$ со свойством $\int_a^b d\mu(x) = \int_a^b d\nu(y)$ пусть их разница будет абсолютно непрерывной мерой ρ, где $d\rho(x) = \psi(x)\,dx$ для некоторого ядра $\psi \in \mathcal{M}_n^{s,m}[a,b]$ с нулевым средним и конечным множеством точек перемены знака.

Пусть также функция стоимости дается формулой

$$c(x,y) = \omega(|y-x|)$$

для некоторого выпуклого модуля непрерывности ω. Тогда транспортная задача Канторовича – Монжа двойственна задаче

$$\int_a^b h(t)\psi(t)\,dt \to \sup, \qquad h \in H^\omega[a,b].$$

После обсуждения дискретного варианта транспортной задачи очевидны и экономические приложения результатов диссертации в непрерывном случае.

Предположим, что конечный интервал $[a,b]$, на котором добывается или потребляется продукция, распадается на конечное число областей добычи и потребления. Как мы показали, сама функция распределения $\Psi(t) = \int_b^t \psi(x)\,dx$ разлагается на такую сумму *простых* ядер $\{\Phi_i(\cdot) = \Phi_i(\omega;\cdot)\}_{i=1}^l$, что

$$\Psi(t) = \sum_{i=1}^{l} \Phi_i(t); \qquad \sup_{h\in H^\omega[a,b]} \int_a^b h(t)\psi(t)\,dt = \sum_{i=1}^{l} \sup_{h\in H^\omega[a,b]} \int_a^b h(t)\Phi_i'(t)\,dt. \tag{13}$$

Напомним, что с каждым простым ядром Φ_i с носителем $[a_i, b_i]$ из этого экстремального разложения ассоциированы такие промежуточные точки $a_i', b_i' : a_i < a_i' \le b_i' < b_i$, а также знак $\zeta \in \{\pm 1\}$, что

$$\zeta\psi(x) < 0,\ x \in [a, a'];\quad \psi(x) = 0,\ x \in [a', b'];\quad \zeta\psi(x) > 0,\ x \in [b', b]. \tag{14}$$

Следовательно, у простого распределения Φ_i существуют в точности две непрерывных области $[a_i, a_i']$ и $[b_i', b_i]$, на одной из которых сырье добывается, а на другой потребляется.

Тогда *общий оптимальный план* перевозки продукции заключается в перевозе сырья из области $[a_i, a_i']$ в область $[b_i', b_i]$ (или наоборот) для всех $i = 1, \ldots, l$, причем внутри каждой пары областей перевозка осуществляется между точками $x \in [a_i, a_i']$ $y \in [b_i', b_i]$, подчиняющимися условию

$$\Psi_i(x) = \Psi_i(y).$$

Наконец, общая "стоимость" трансформации одного распределения в другое определяется величиной

$$\int_0^{b-a} \Re_\omega(\Psi; x)\omega'(x)\,dx = \sup_{h \in H^\omega[a,b]} \int_a^b h(t)\psi(t)\,dt, \tag{15}$$

где

$$\Re_\omega(\Psi; x) := \sum_{i=1}^{l} \Psi_i^*(x),$$

и Ψ_i^* – убывающие перестановки Ψ_i для $i = 1, \ldots, l$.

Часть 3. Свойства экстремальных перестановок. Как мы уже упоминали, числовое решение задачи (7) выражается в терминах экстремальной ω-перестановки $\Re_\omega(\Psi; \cdot)$. В части 3 диссертации, опирающейся на результаты работы [4], проясняются отношения между тремя видами перестановок ядра Ψ: стандартными убывающими перестановками $\Psi^*(\cdot)$ (п. 10.1), Σ-перестановками $\Sigma(\Psi; \cdot)$ Корнейчука (п. 10.3) и экстремальными ω-перестановками $\Re_\omega(\Psi; \cdot)$ (введенных ранее в п. 6.3).

Рисунок 5 иллюстрирует определение Σ-перестановки Корнейчука.

Приведем также пример экстремальной перестановки $\Re_\omega(\Psi;\, \cdot)$. Пусть четное ядро Ψ задается формулой $\Psi(t) = -\min\{t; 10 - t\}$ на отрезке $[0, 10]$ и $\omega(t) = \omega_{1/2}(t) = \sqrt{t}$. Рисунок 6 иллюстрирует график экстремальной функции $h^*(t)$ задачи о максимизации функционала $\int_{-10}^{10} h(t)\Psi'(t)\,dt$ и экстремальной перестановки $\Re_{\omega_{1/2}}(\Psi; t)$.

В частности, в п. 10.4 показано, что эти три перестановки не мажорируют друг друга; также дается критерий их попарного совпадения. Специальный раздел, п. 10.5, посвящен неравенствам между $\mathbb{L}_1(d\omega)$-нормами перестановок, а также неравенствам между интегралами перестановок, т.е. установлению так называемых отношений "$\dashrightarrow$" и "$\hookrightarrow$"). Кроме того, доказываются аналоги неравенства Харди–Литтлвуда для произведения функций и их перестановок (Предложение 10.16). В завершение, в п. 10.6 получено неравенство

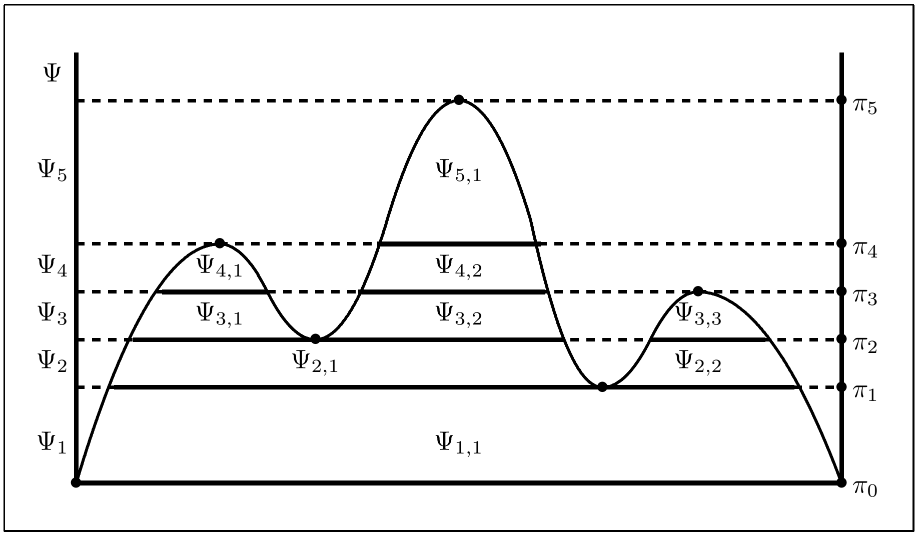

Рис. 5. Разбиение на простые ядра для Σ-перестановки Корнейчука

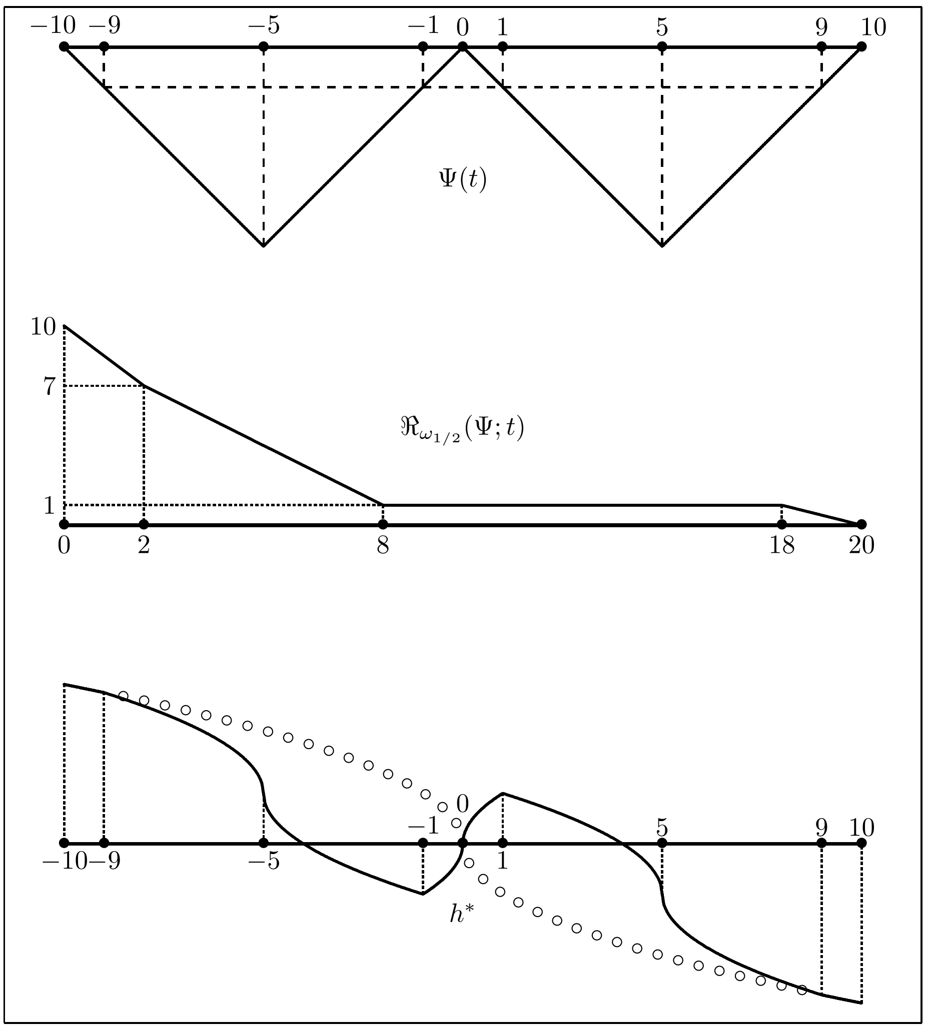

Рис. 6. Ядро Ψ, экстремальная перестановка $\Re_{\omega_{1/2}}(\Psi; \cdot)$ и функция h^*

между значением производной ω-перестановки $\Re_\omega(\Psi; \cdot)$ и соответствующим интегралом Σ-перестановки Корнейчука от второй производной ядра Ψ (Предложение 10.20).

Часть 4. Задача Колмогорова – Ландау в равномерной метрике. Четвертая часть диссертации посвящена решению задачи Колмогорова – Ландау на прямой и полупрямой при ограничениях в равномерной метрике. Обсуждение структуры экстремальных функций этой задачи предваряет экскурс в историю проблемы, начинающуюся с элементарной задачи Д. И. Менделеева по этой тематике, решенной А. А. Марковым (глава 11). После этого в главе 12 внимание читателя переключается на изучение свойств ядер Фредгольма, служащих для генерирования экстремальных функций задачи Колмогорова – Ландау.

Наконец, формулируется экстремальная задача Колмогорова – Ландау:

$$f^{(m)}(0) \to \sup, \qquad f \in W^r H^\omega(\mathbb{I}), \quad \|f\|_{\mathbb{L}_\infty(\mathbb{I})} \le B, \tag{16}$$

для произвольного фиксированного $B > 0$ и интервала $\mathbb{I} = \mathbb{R}$ или $\mathbb{R}_+$. Отметим, что в случае неограниченных интервалов $\mathbb{I} = \mathbb{R}$ или $\mathbb{R}_+$ максимизируемое значение $f^{(m)}(0)$ может быть заменено на норму $\|f^{(m)}\|_{\mathbb{L}_\infty(\mathbb{I})}$.

Для решения задачи Колмогорова – Ландау читателю понадобится знание разнообразных свойств *ядер Фредгольма*. Эти полиномиальные сплайны, однозначно определяемые своими узлами и точками перемены знака, являются генерирующими ядрами для экстремальных функций задач о максимизации промежуточной производной. Кроме того, узлы (точки разрыва кусочно-постоянной r-ой производной) соответствующего генерирующего ядра Фредгольма совпадают с точками альтернанса экстремальных функций задачи Колмогорова – Ландау.

Затем в главе 13 устанавливаются достаточные условия экстремальности функции в задаче (16) на конечном отрезке и выводим точные аддитивные неравенства.

В следующем разделе, главе 14, этой части строится семейство чебышевских ω-сплайнов с фиксированным числом точек альтернанса и данной нормой B, экстремальных в задаче (16) на некотором отрезке $\mathbb{I} = [0, d]$. Это доказательство базируется на применении Теоремы Борсука об Антиподальности. *Теорема 14.11, описывающаяся семейство чебышевских ω-сплайнов, является центральной в тематике задачи Колмогорова – Ландау в равномерной метрике.*

Следующая теорема описывает структуру дискретного семейства экстремальных функций задачи Колмогорова – Ландау – чебышевских ω-сплайнов с данной нормой и фиксированным числом точек альтернанса (приведем вариант теоремы в случае $0 < m < r$).

Теорема 1. *Пусть $m, r \in \mathbb{N}$, $0 < m < r$, $n \in \mathbb{N}$, $n \ge r$, и ω - выпуклый модуль непрерывности. Тогда существуют $d = d(B, n, r, m, \omega) > 0$, наборы точек $\bar\nu = \bar\nu(B, n, r, m, \omega)$ и $\bar\theta = \bar\theta(B, n, r, m, \omega)$, удовлетворяющие*

$$0 =: \nu_0 < \cdots < \nu_n, \quad 0 =: \theta_0 < \cdots < \theta_{n-r+1} < \theta_{n-r+2} := \nu_n,$$

$$\nu_{i-1} < \theta_i < \nu_{i+r-1}, \qquad i = 1, \ldots, n-r+1,$$

и функция $\mathcal{Z} = \mathcal{Z}_{B,n,r,m,\omega}$, наделенные следующими свойствами:

$$(1) \quad \mathcal{Z}(\nu_i) = (-1)^{i+m}\|\mathcal{Z}\|_{\mathbb{C}[0,d]} = (-1)^{i+m}B, \quad i = 0,\dots,n+1,$$

$$(2) \quad \sup_{h\in H^\omega[0,d]} \int\limits_0^d h(x)K(x)\,dx = \int\limits_0^d \mathcal{Z}^{(r)}(x)K(x)\,dx,$$

где коэффициенты $\{\alpha_i\}_{i=0}^n$ ядра $K(t) = -\dfrac{1}{(r-1)!}\sum_{i=0}^n \alpha_i(\nu_i - t)_+^{r-1}$ являются решениями уравнений

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=0}^n \alpha_i \nu_i^j = m!\delta_{m,j}, & j = 0,\dots,r-1, \\ \sum\limits_{i=0}^n \alpha_i(\nu_i - \theta_l)_+^{r-1} = 0, & l = 1,\dots,n-r+1. \end{cases}$$

После завершения построения чебышевских ω-сплайнов показывается, что экстремальная функция задачи (16) на полупрямой является пределом *чебышевских ω-сплайнов*, что завершает решение задачи (16) в случае $\mathbb{I} = \mathbb{R}_+$ Шенберга–Каваретты. Аналогичным образом строятся экстремальные функции в оригинальном колмогоровском случае $\mathbb{I} = \mathbb{R}$. В этом случае решение задачи совпадает с пределом золотаревских ω-сплайнов, экстремальных в задаче

$$(17) \qquad f^{(m)}(0) \to \sup, \qquad f \in W^r H_p^\omega[-d,d], \quad \|f\|_{\mathbb{L}_\infty[-d,d]} \le B,$$

для последовательности $\{d = d_n\}_{n\ge r}$, где $[-d_n, d_n]$–область определения чебышевского ω-сплайна с n точками альтернанса на $[-d_n, d_n]$.

Структура экстремальных фунций задачи Колмогорова для классов $W^r H^\omega$ на прямой и полупрямой описана в Теоремах 15.1 и 15.5, соответственно.

Отметим, что в гельдеровском случае задачу (16) достаточно решить для единственного значения B (например, $B = 1$), поскольку экстремали для других значений представляют из себя пронормированные растяжения решения задачи для $B = 1$. Также формулируется результат об эквивалентности аддитивных и мультипликативных неравенств для задачи (16) в гельдеровских классах и находятся точные константы в мультипликативных неравенствах для прямой и полупрямой (Следствия 15.4 и 15.7).

После описания решений задачи (16) в главе 16 характеризуются экстремальные функции этой проблемы для конечного интервала $[0,1]$. Специальные разделы посвящены золотаревским ω-полиномам, экстремальным в задаче (16) для всех значений, превышающих норму чебышевского ω-полинома и семейству золотаревских ω-сплайнов (случай Е. И. Золотарева), решающим (16) для всех остальных норм B (случай С. Карлина).

Следующим шагом является описание (в главе 17) экстремальных функций задачи Колмогорова–Ландау

$$(18) \qquad \|f'\|_{\mathbb{L}_\infty(I)} \to \sup, \qquad f \in W^1 H^\omega(I), \quad \|f\|_{\mathbb{L}_\infty(I)} < B,$$

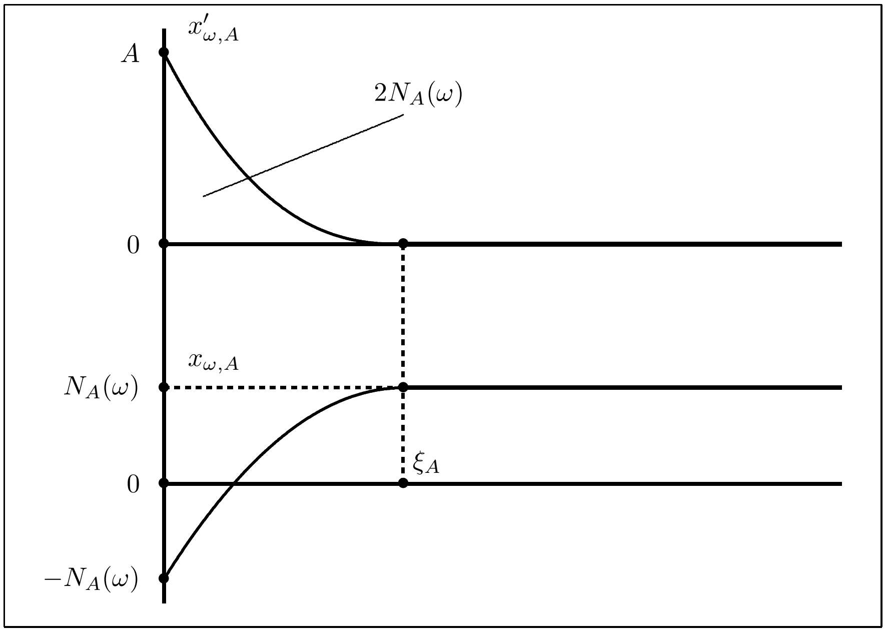

Рис. 7. Экстремальная функция в неравенствах Ландау в $W^1H^\omega(\mathbb{R}_+)$

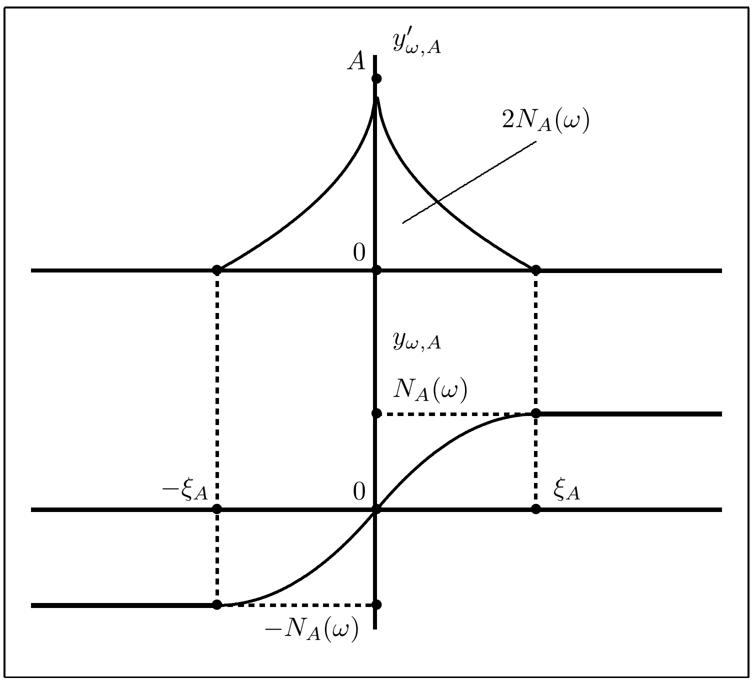

Рис. 8. Экстремальная функция в неравенствах Адамара в $W^1H^\omega(\mathbb{R})$

для всех выпуклых модулей непрерывности ω и $I = \mathbb{R}$ или $\mathbb{R}_+$. Эти результаты обобщают решение задачи для линейного $\omega(t) = t$ Э. Ландау в случае $I = \mathbb{R}_+$ (см. Рисунок 7) и Ж. Адамаром в случае $I = \mathbb{R}$ (см. Рисунок 8).

Отметим следующую специфическую особенность функциональных классов $W^1H^\alpha(\mathbb{R})$ и $W^1H^\alpha(\mathbb{R}_+)$: если $\omega(t)$ не является гельдеровским модулем непрерывности $\omega_\gamma(t) = Ct^\gamma$, $0 < \gamma \leq 1$, то не может существовать и мультипликативных неравенств формы

$$\|x'\|_{\mathbb{L}_\infty(I)} \leq K_{\omega,I}\|x\|^{\alpha}_{\mathbb{L}_\infty(I)}, \qquad 0 < \alpha \leq 1. \tag{19}$$

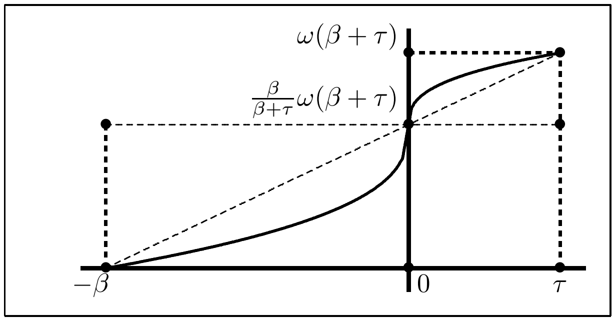

Рис. 9. Экстремальная функция задачи экстраполяции Маркова в $W^1H^\omega(-\infty,\tau]$

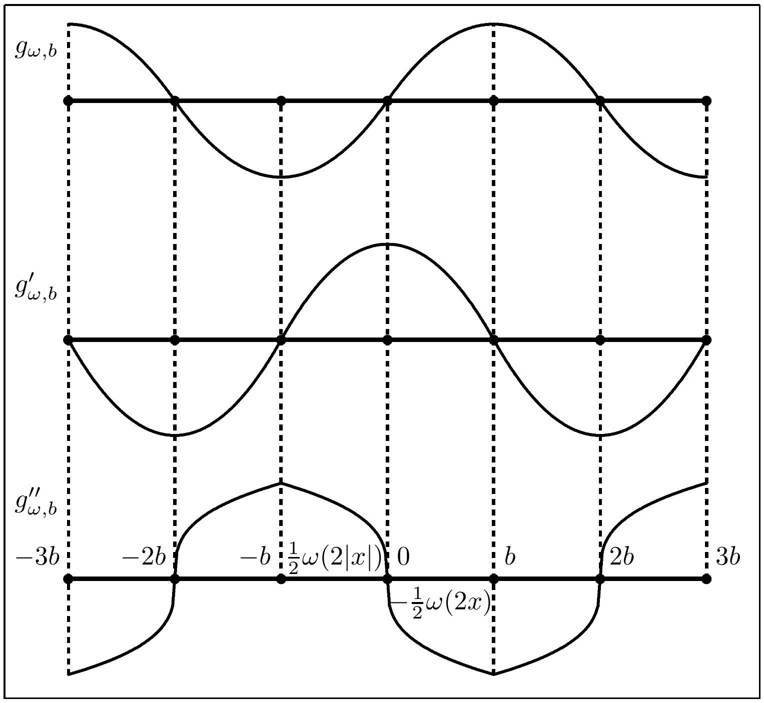

Рис. 10. Экстремальная функция задачи максимизации первой производной в $W^2H^\omega(\mathbb{R})$

Наконец, разбирается частный случай задачи экстраполяции Маркова в случае $r = 1$ (см. Рисунок 9).

В главе 18 разбирается другой частный случай – рассматриваются свойства экстремальных функций и форма точных колмогоровских неравенств в задаче

$$(20)\qquad \|f^{(m)}\|_{\mathbb{L}_\infty(I)} \to \sup, \qquad f \in W^2H^\omega(I), \quad \|f\|_{\mathbb{L}_\infty(I)} \le B,$$

для $m = 1, 2$ и $I = \mathbb{R}$ в случае Шилова, Стечкина (см. Рисунки 10, 11) и $\mathbb{R}_+$ в случае Маторина, Стечкина. Также выводятся соответствующие формулы численного дифференцирования для производных $f'(x)$ и $f''(x)$, подобные тем, которые получил С. Б. Стечкин:

$$(21)\qquad f^{(k)}(x) \approx \frac{(-1)^k}{h^k}\{af(x) - (a+b)f(x+ch) + bf(x+h)\}, \quad k = 1, 2.$$

В заключение этого раздела отметим, что данный раздел диссертации написан по материалам работ [4], [6] и [9].

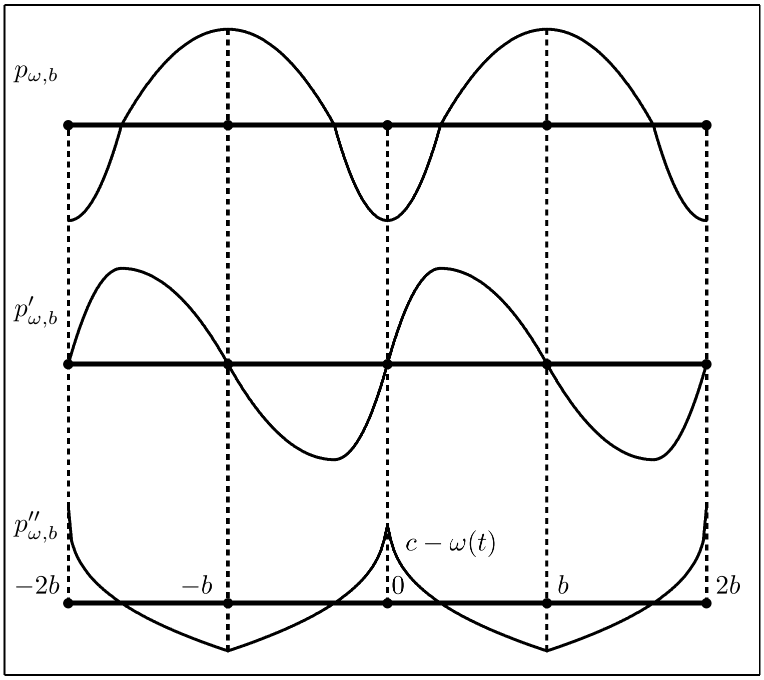

Рис. 11. Экстремальная функция задачи максимизации второй производной в $W^2H^\omega(\mathbb{R})$

Часть 5. Задача Колмогорова – Ландау в $W^rH^\omega \cap L_p$. Основная цель части 5, основанной на результатах автора в [8], – полная характеризация точных *аддитивных* (и *мультипликативных* в случае гельдеровских классов) неравенств для норм производных функций, а также описание структурных свойств экстремалей задачи

$$\|f^{(m)}\|_{\mathbb{L}_\infty(\mathbb{I})} \to \sup, \qquad f \in W^rH^\omega(\mathbb{I}), \quad \|f\|_{\mathbb{L}_p(\mathbb{I})} \le B, \tag{22}$$

для всех $r, m \in \mathbb{Z} : 0 \le m \le r$, всех $p : 1 \le p < \infty$, выпуклых модулей непрерывности ω, всех положительных B и $\mathbb{I} = \mathbb{R}$ или $\mathbb{R}_+$.

Прежде чем приступить к решению задачи (22) для нелинейного ω, в п.п. 19.1–19.3 читателю напоминаются два различных решения этой задачи в соболевском случае $\omega(t) = t$. Одно из этих решений базируется на стандартных методах классической теории оптимального управления. Другое решение основано на выводе достаточных условий оптимальности и применении теоремы Борсука при построении экстремальных функций.

Подобно классическому варианту

$$\int_{\mathbb{R}_+} |x(t)|^p\,dt \to \inf, \qquad x \in W^r_\infty(\mathbb{I}), \quad x^{(m)}(0) = 1, \tag{23}$$

условия экстремальности в задаче

$$\int_{\mathbb{I}} |x(t)|^p\,dt \to \inf; \quad x \in W^rH^\omega(\mathbb{I}), \quad x^{(m)}(0) = A, \qquad \mathbb{I} = \mathbb{R}_+ \vee \mathbb{R}, \tag{24}$$

эквивалентной задаче (22), получены в форме уравнений Эйлера – Лагранжа и условий трансверсальности (п. 19.4).

Главным отличием в условиях оптимальности является форма условий Вейерштраса, в соболевском случае заключающаяся в максимизации гамильтониана системы почти всюду на интервале $\mathbb{I}$. Показано, что в случае классов $W^rH^\omega(\mathbb{I})$ поточечная *инфинитезимальная* версия принципа максимума должна быть заменена на *интегральную форму*, отражающую оптимальное поведение системы *в целом.*

Центральные Теоремы 19.12, 19.13 части 5 описывают структуру экстремальных фунций задачи Колмогорова в $W^rH^\omega \cap L_p$ *на прямой и полупрямой.* Как и в классической задаче Колмогорова с ее чебышевскими сплайнами, основным этапом в построении этих экстремальных функций является характеризация дискретного семейства функций $\{X_{n,m}\}_{n\geq r+1}$ с данным числом нулей n, экстремальных в задаче

$$f^{(m)}(0) \to \sup, \qquad f \in W^rH^\omega(\mathbb{I}), \quad \|f\|_{\mathbb{L}_p(\mathbb{I})} \leq B,$$

для некоторых отрезков $\mathbb{I} = [0, d_{n,m}]$.

Теорема 2. *Пусть* $r,\ m \in \mathbb{N} : 0 \leq m < r$*;* $n \in \mathbb{N} : n \geq r+1,\ B > 0,$ $p \geq 1,$ *и* ω *– выпуклый модуль непрерывности.*

I. Существуют $d_{n,m} = d_{n,m}(\omega, p, B, r),\ X_{n,m} = X_{\omega,p,B,n,r,m} \in W^rH^\omega[0, d_{n,m}]$ *со следующими свойствами:*

(1) *Функция* $X_{n,m}$ *имеет* n *простых нулей* $\{t_i(n,m)\}_{i=1}^n$ *на* $[0, d_{n,m}]$.

(2) *Функция* $X_{n,m}^{(r)}$ *имеет* $n-r$ *простых нулей* $\{\vartheta_i(n,m)\}_{i=1}^{n-r}$ *на* $[0, d_{n,m}]$.

(3) $\|X_{n,m}\|_{\mathbb{L}_p[0,d_{n,m}]} = B$.

II. Функция

$$Z_{n,m}(t) := \frac{(-1)^{r+1}}{r!} \int\limits_0^{d_{n,m}} |X_{n,m}(y)|^{p-1} \operatorname{sign} X(y)(y-t)_+^r \, dy, \quad t \in [0, d_{n,m}],$$

обладает свойствами:

$$(i) \qquad Z_{n,m}^{(i)}(0) = 0, \quad i = 0, \ldots, r-1-m, r+1-m, \ldots, r.$$

$$(ii) \qquad \int_0^{d_{n,m}} X_{n,m}^{(r)}(t) Z'_{n,m}(t)\, dt = \sup_{h \in H^\omega[0,d_{n,m}]} \int_0^{d_{n,m}} h(t) Z'_{n,m}(t)\, dt.$$

III. Справедливо следующее неравенство для всех функций $f \in W^rH^\omega[0, d_{n,m}]$ *со свойством* $\|f\|_{\mathbb{L}_p[0,d_{n,m}]} \leq B$ *:*

$$f^{(m)}(0) \leq X_{n,m}^{(m)}(0) = |Z_{n,m}^{(r-m)}(0)|^{-1} \left[B^p + \int_0^{d_{n,m}} \Re_\omega(Z_{n,m}; t) \omega'(t)\, dt \right].$$

Как обычно, после решения задачи (22) для любого $r \in \mathbb{N}$ (и распространения тем самым результат Магарил-Ильяева с линейного на все нелинейные выпуклые модули непрерывности), предлагается детальное описание свойств экстремальных функций в частном

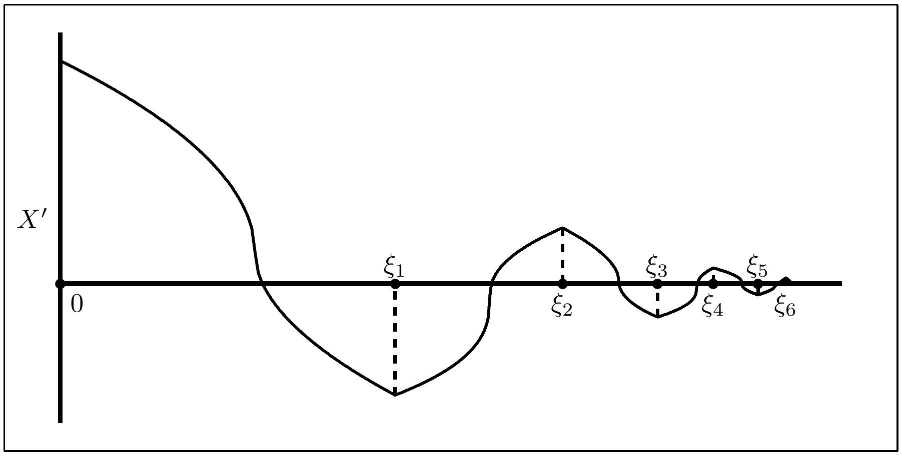

Рис. 12. График производной экстремальной функции X в случае $m = 0$, $\mathbb{I} = \mathbb{R}_+$

случае $r = 1$ (п. 19.6 для $p = 1$ и п. 19.7 для $p > 1$). Напомним, что в этом случае результаты для линейного модуля непрерывности были получены А. Т. Фуллером[17], В. Н. Габушиным[18] и Г. Г. Магарил-Ильяевым[19]. В диссертации показано, что расстояние между соседними узлами убывает, что существенно упрощает строение функций, позволяя воспользоваться лишь Леммой Корнейчука при описании их структуры. Более того, в случае гельдеровых модулей непрерывности $\omega(t) = t^\alpha$ установлено, что длины интервалов между узлами $\{\xi_i\}_{i=1}^\infty$ экстремальных ω-сплайнов убывают в геометрической прогрессии, а экстремальная функция $X = X_\alpha$ обладает следующим интересным фрактальным свойством подобия для всех $i \in \mathbb{Z}_+$:

$$X(t + \xi_i) = (-1)^i \left(\frac{\xi_{i+1} - \xi_i}{\xi_1}\right)^{1+\alpha} X\left(\frac{\xi_1}{\xi_{i+1} - \xi_i} t\right), \qquad t \in [0, \xi_{i+1} - \xi_i].$$

Для линейных модулей непрерывности первым данный феномен обнаружил в случае $p = 2$ американский инженер А. Т. Фуллер, а для всех $1 \le p < \infty$ это фрактальное свойство экстремальных функций установили советские математики В. Н. Габушин и Г. Г. Магарил-Ильяев (см. ссылки выше).

Рисунки 12, 13, 14, 15 иллюстрируют графики производной X' экстремальной функции X в случаях $m = 0, 1$ и $\mathbb{I} = \mathbb{R}_+$, $\mathbb{R}$.

Часть 6. Задача линейной динамики в $W^r H^\omega$. В части 6 диссертации, посвященной приложениям в теории оптимального управления, приводится решение задачи линейной динамики для классов $\mathbb{H}^\omega(\mathbb{I}) := H^{\omega_1}(\mathbb{I}) \times \cdots \times H^{\omega_r}(\mathbb{I})$:

$$\begin{aligned} &T \to \inf; \qquad \dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t), \quad u(\cdot) \in \mathbb{H}^\omega[0,T], \\ &\big(x(0), u(0)\big) = 0_{n+r}, \qquad \big(x(T), u(T)\big) = (\widehat{\Lambda}, \widehat{\Gamma}), \end{aligned} \tag{25}$$

[17]A. T. Fuller. *Optimization of nonlinear control systems with transient inputs.* J. of Electron. and Control, 8(6):465–479, 1960.

[18]В. Н. Габушин. *Неравенства для норм функций и их производных в Lp.* Мат. Заметки, 1(3):194–198, 1967.

[19]Г. Г. Магарил-Ильяев. *О неравенствах Колмогорова на полупрямой.* Вестник МГУ, 31(5):33–41, 1976.

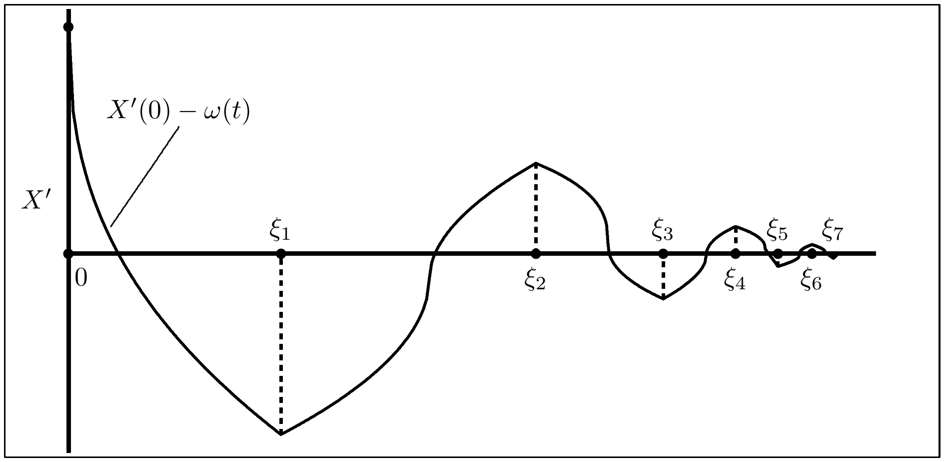

Рис. 13. График производной экстремальной функции X в случае $m = 1$, $\mathbb{I} = \mathbb{R}_+$

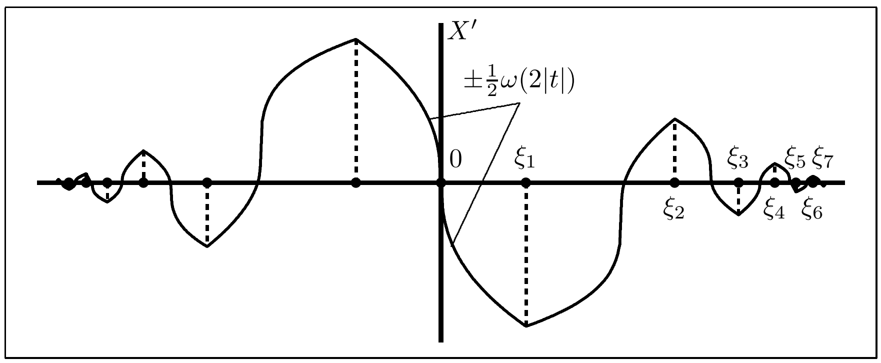

Рис. 14. График производной экстремальной функции X в случае $m = 0$, $\mathbb{I} = \mathbb{R}$

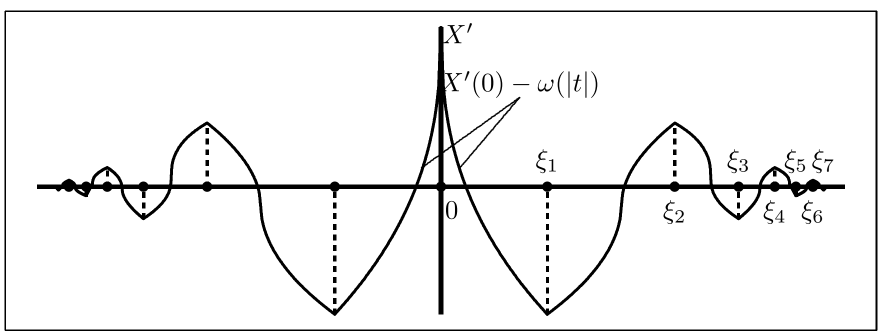

Рис. 15. График производной экстремальной функции X в случае $m = 1$, $\mathbb{I} = \mathbb{R}$

для локально интегрируемых $n \times n$ и $n \times r$ матричных функций $A(t)$ и $B(t)$, набора $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_r)$ выпуклых модулей непрерывности и $\widehat{\Lambda} \in \mathbb{R}^n$, $\widehat{\Gamma} \in \mathbb{R}^r$. Этот раздел диссертации базируется на результатах работы автора [5].

Как и в других главах, приводятся формулировки и описываются решения частных случаев этой задачи для линейного модуля непрерывности (п.п. 20.1–20.2). В случае линейной задачи динамики в липщицевых классах внимание читателя обращается на три такие широко известные задачи.

Во-первых, это *задача Ляпунова о структуре множества значений векторных мер.* А. Ляпунов и позже Дж. Линденштраусс[20] описали экстремальные (критические) точки множества

$$\mathcal{M}[Y] := \left\{ \int_0^T Y(t)u(t)\,dt \,\middle|\, u(\cdot) = (u_1(\cdot), \ldots, u_r(\cdot)) \in \operatorname{Lip}^r[0,T] \right\}. \tag{26}$$

Вторая проблема, *задача Фельдбаума – Бушо*, пожалуй, самая известная в теории оптимального управления, может быть сформулирована следующим образом:

$$T \to \inf; \quad (x(0), \dot{x}(0)) = (0,0), \quad \big(x(T), \dot{x}(T)\big) = \big(x_0, x_1\big), \qquad |\ddot{x}| \le 1, \tag{27}$$

и допускает интерпретацию как задача о минимизации времени передвижения от одного состояния координаты и скорости материальной точки до другого под воздействием внешней силы, ограниченной единицей (т. е. при условии $x \in W^1H^1[0,T]$).

Наконец, более общий вариант задачи (27), так называемая *обобщенная задача Колмогорова о геометрическом месте значений промежуточных производных*, предполагает описание множества значений вектора производных $\big(x(T), x'(T), \ldots, x^{(n)}(T)\big)$ для функций из $W^{n+1}_\infty[0,T] = W^nH^1[0,T]$ при условии, что

$$\big(x(T), x'(T), \ldots, x^{(n)}(T)\big) = (\underbrace{0, \ldots, 0}_{n+1}).$$

Основной результат части 6, решение общей задачи (25), которая основана на на результатах нашей работы [5], включает в себя описание строения экстремальных функций и характеризацию критических точек множеств достижимости в форме *принципа Ляпунова* (Теорема 21.12) и *принципа Минковского* (Теорема 21.13).

Отметим прежде всего, что путем замены переменной задача (25) может быть сведена к следующей:

$$\begin{aligned} &T \to \inf; \qquad \dot{y}(t) = Y(t)u(t), \quad u(\cdot) \in \mathbb{H}^\omega[0,T], \\ &\big(y(0), u(0)\big) = 0_{n+r}, \qquad \big(y(T), u(T)\big) = (\Lambda, \Gamma). \end{aligned} \tag{28}$$

при $\Lambda \in \mathbb{R}^n$ и $\Gamma \in \mathbb{R}^r$.

Заметим, что $\Lambda = y(T) = \int_0^T \dot{y}(t)\,dt = \int_0^T Y(t)u(t)\,dt$, следовательно, множество интегралов $\int_0^T Y(t)u(t)\,dt$ при всех $u \in \mathbb{H}^\omega[0,T]$ совпадает со множеством всех точек в $\mathbb{R}^n$, достижимых за время T вдоль допустимой траектории.

Для $m \in \mathbb{Z}_+^m$ через $\mathbb{S}^m$ обозначим единичную сферу в l_1^{m+1}:

$$\mathbb{S}^m := \{\eta = (\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{m+1}) \in \mathbb{R}^{m+1} \mid \sum_{i=1}^{m+1} |\eta_i| = 1\}. \tag{29}$$

Для описания экстремальных функций и критических точек областей достижимости в задаче (28) потребуется ряд определений и обозначений.

[20] J. Lindenstrauss. *A short proof of Liapunoff's convexity theorem.* J. Math. Mech., 15(6):971–972, 1966.

Определение 3. Для $T > 0$ и $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_r)$,

$$\Theta_\omega(T) := \{(u_1, \dots, u_r) \in \mathbb{R}^r \,\big|\, |u_j| \le \omega_j(T),\ j = 1, \dots, r\}. \tag{30}$$

Определение 4. Пусть $\eta \in \mathbb{S}^{n-1}$, $T > 0$ и $\Gamma \in \Theta_\omega(T)$. Через $u_{\eta,T,\Gamma}(\cdot)$ обозначим экстремальную функцию задачи

$$\int_0^T \Big\langle \big[\eta \cdot Y(t)\big], u(t) \Big\rangle \, dt \to \sup, \qquad u \in \mathbb{H}^\omega[0, T] \,:\, u(0) = 0_r,\ u(T) = \Gamma; \tag{31}$$

и

$$y_{\eta,T,\Gamma}(t) := \int_0^t Y(\tau) u_{\eta,T,\Gamma}(\tau) \, d\tau, \quad t \in [0, T]; \qquad \Lambda_{\eta,T,\Gamma} := y_{\eta,T,\Gamma}(T). \tag{32}$$

Множество $\Omega_\omega(T)$ точек в $\mathbb{R}^{n+r}$, достижимых за время T посредством траектории $(y_{\eta,T,\Gamma}(t), u_{\eta,T,\Gamma})$ для некоторых $\eta \in \mathbb{S}^{n-1}$, $T > 0$ и $\Gamma \in \Theta_\omega(T)$, определяется следующей формулой:

$$\Omega_\omega(T) := \big\{(\Lambda_{\eta,T,\Gamma}, \Gamma) \,\big|\, \eta \in \mathbb{S}^{n-1}, T > 0, \Gamma \in \Theta_\omega(T)\big\}$$

Оптимальность траектории $(y_{\eta,T,\Gamma}(t), u_{\eta,T,\Gamma})$ доказывается в следующем результате.

Теорема 5. *Пусть $\eta \in \mathbb{S}^{n-1}$, $T > 0$ и $\Gamma \in \Theta_\omega(T)$. Тогда $y_{\eta,T,\Gamma}$ является единственным решением задачи (28) для $\Lambda = \Lambda_{\eta,T,\Gamma}$.*

Определение 6. Для $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_r)$, $l \in \{1, \dots, r\}$, $T > 0$ и $\zeta \in \{\pm 1\}$, положим

$$\Theta_\omega(l, T, \zeta) := \{(u_1, \dots, u_r) \in \Theta_\omega(T) \,\big|\, u_l = \zeta \omega_l(T)\,\}. \tag{33}$$

Другими словами, $\Theta_\omega(l, T, \zeta)$ – множество таких векторов $(u_1, \dots, u_r))$ из $\Theta_\omega(T)$, что одна из компонент u_l достигает своего или максимального, или минимального значения $\pm\omega_l(T)$.

Теорема 7. *Пусть $\Gamma^1, \Gamma^2 \in \Theta_\omega(l, T, \zeta)$ при некотором $l \in \{1, \dots, r\}$, $T > 0$, $\zeta \in \{\pm 1\}$. Для $k = 1, 2$, пусть $u_k(\cdot) \in \mathbb{H}^\omega[0, T]$ и $y_k(\cdot)$ удовлетворяют условиям*

$$u_k(0) = 0_r, \quad u_k(T) = \Gamma_k; \qquad y_k(t) := \int_0^t Y(\tau) u_k(\tau) \, d\tau, \quad t \in [0, T].$$

Тогда для всех $\beta \in [0, 1]$ функция $y_\beta(t) := \beta y_1(t) + (1 - \beta) y_2(t)$ экстремальна в (28) для $\Gamma := \beta\Gamma^1 + (1 - \beta)\Gamma^2$, $\Lambda := \beta y_1(T) + (1 - \beta) y_2(T)$.

Определение 8. Пусть $l \in \{1, \dots, r\}$, $T > 0$, $\zeta \in \{\pm 1\}$, $\Gamma \in \Theta_\omega(l, T, \zeta)$, и $\psi = (\psi_1, \dots, \psi_r) \in \mathbb{L}_1^r[0, T]$, где каждая из $\{\psi_j\}_{j=1}^r$ меняет знак конечное число раз на $[0, T]$. Тогда $u_{\psi,T,\Gamma}$ определяется как экстремальная функция задачи

$$\int_0^T \big\langle \psi(t), u(t) \big\rangle \, dt \to \sup, \qquad u \in \mathbb{H}^\omega[0, T] \,:\, u(0) = 0_r,\ u(T) = \Gamma; \tag{34}$$

и

$$y_{\psi,T,\Gamma}(t) := \int_0^t Y(\tau)u_{\psi,T,\Gamma}(\tau)d\tau, \quad t \in [0,T]; \qquad \Lambda_{\psi,T,\Gamma} := y_{\psi,T,\Gamma}(T). \tag{35}$$

Если $\psi \in \mathbb{L}_1^r[0,T]$, $T > 0$, $\Gamma \in \Theta_\omega(l,T,\zeta)$ определены как в Определении 8, то по Теореме 7 (для $\beta = 0$ или $\beta = 1$), $y_{\psi,T,\Gamma}$ экстремальна в (28) для $\Lambda = \Lambda_{\psi,T,\Gamma}$.

Определение 9. Пусть $T \geq 0$. Введем *множества* $\mathcal{A}_\omega(T)$, $\mathcal{A}_\omega$ и $\mathcal{R}_\omega(T)$, $\mathcal{R}_\omega \in \mathbb{R}^{n+r}$, достижимые за время T и за некоторое время $\tau \geq 0$ вдоль траекторий $(x(\cdot), u(\cdot))$ и $(y(\cdot), u(\cdot))$, допустимых для задач (25),

$$\mathcal{A}_\omega(T) := \bigcup_{\Gamma \in \Theta_\omega(T)} \left\{ \left(\int_0^T Y(\tau)u(\tau)d\tau, \Gamma \right) \Big| \, u \in \mathbb{H}^\omega[0,T] \, : \, u(0) = 0_r, u(T) = \Gamma \right\}, \tag{36}$$

$$\mathcal{A}_\omega := \bigcup_{T>0} A_\omega(T), \tag{37}$$

и (28):

$$\mathcal{R}_\omega(T) := \{(X(T)\Lambda, \Gamma) \, \big| \, (\Lambda, \Gamma) \in \mathcal{A}_\omega(T)\}, \tag{38}$$

$$\mathcal{R}_\omega := \bigcup_{T>0} \mathcal{R}_\omega(T). \tag{39}$$

Принцип Ляпунова для задачи (28) формулируется следующим образом.

Теорема 10. *Для всех $(\Lambda, \Gamma) \in \mathcal{A}_\omega$ верно одно из двух следующих утверждений.*

1. *Существуют такие $\eta \in \mathbb{S}^{n-1}$, $T > 0$, что $\Lambda = \Lambda_{\eta,T,\Gamma}$, и функция $y_{\eta,T,\Gamma}$ экстремальна в задаче (28).*

2. *Существуют такие $l \in \{1, \ldots, r\}$, $T > 0$, $\zeta \in \{\pm 1\}$, что $\Gamma \in \Theta_\omega(l,T,\zeta)$ и*

$$\Lambda = \Lambda_{\psi,T,\Gamma} \quad \textit{для} \quad \psi(t) = (1 - |\beta|)[\eta \cdot Y(t)] + \beta\, \phi(t),$$

для некоторых $\eta \in \mathbb{S}^{n-1}$ и $\beta \in [-1,1]$. В этом случае $y_{\psi,T,\Gamma}$ экстремальна в задаче (28).

Принцип Минковского для задачи (28) формулируется следующим образом.

Теорема 11. *Для всех $(\Lambda, \Gamma) \in \mathcal{A}_\omega$ выполняется одно из следующих двух утверждений.*

1. *Существуют такие $\eta \in \mathbb{S}^{n-1}$, $T > 0$, что $\Lambda = \Lambda_{\eta,T,\Gamma}$, и функция $y_{\eta,T,\Gamma}$ экстремальна в задаче (28).*

2. *В противном случае, $\Gamma \in \Theta_\omega(l,T,\zeta)$ для некоторых $l \in \{1, \ldots, r\}$, $T > 0$, $\zeta \in \{\pm 1\}$ и существуют такие $\eta_1, \eta_2 \in \mathbb{S}^{n-1}$, что*

$$\Lambda = \alpha\, \Lambda_{\eta_1,T,\Gamma} + (1 - \alpha)\Lambda_{\eta_2,T,\Gamma},$$

для некоторого $\alpha \in (0,1)$. В этом случае функция

$$y = \alpha\, y_{\eta_1,T,\Gamma} + (1-\alpha) y_{\eta_2,T,\Gamma}$$

экстремальна в задаче (28).

Следствие 12. *Множество $\Omega_\omega(T)$, введенное в Определении 4, обладает следующими свойствами.*

1. *$\Omega_\omega(T)$ – множество экстремальных (крайних) точек для $\mathcal{A}_\omega(T)$.*
2. *$\Omega_\omega(T)$ – граница множества $\mathcal{A}_\omega(T)$ в том и только том случае, если $\omega(t) = (K_1 t, \dots, K_r t)$, $t \in [0,T]$, для некоторых $(K_1,\dots,K_r) \in \mathbb{R}^r_+$.*
3. *$\bigcup\limits_{T>0} \Omega_\omega(T)$ – множество точек (Λ,Γ) в $\mathbb{R}^{n+r} \setminus \{0_{n+r}\}$, достижимых посредством единственной оптимальной траектории $(\widehat{y},\widehat{u})$.*

Из этих результатов выводится обобщенная теорема Ляпунова для классов $\mathbb{H}^\omega[0,T]$ об образе векторных мер. Внимание читателя также обращается на феноменах, присущих решениям задачи (25) только в случае *нелинейных* модулей непрерывности ω: существовании некритических областей неединственности на границе множества достижимости и наличии лишь конечного множества *точек Беллмана*, удовлетворяющих принципу динамического программирования[21] (Предложение 23.4).

Отдельный раздел части, глава 24, посвящен задаче быстродействия, также известной как *задача о встрече* или задача Колмогорова о геометрическом месте значений производных. После напоминания структуры экстремальных функций задачи о встрече в соболевских классах $W^r_\infty(\mathbb{I})$ в п. 24.5–24.9 дается полное описание решений задачи о встрече в классах $W^rH^\omega(\mathbb{I})$ посредством интерпретации более общих результатов о структуре решений задачи (25). Наконец, предъявляются явные формулы экстремальных функций в задаче о встрече в случаях $r=1$ Фельдбаума – Бушо (п. 24.11) и $r=2$ (п. 24.12).

Рисунки 16 и 17 иллюстрируют строение областей достижимости в случае линейного модуля непрерывности $\omega(t)=t$ и набора выбранных нелинейных модулей непрерывности $\omega(t)$, соответственно.

Часть 7. Интегральный принцип максимума. Обобщая наблюдения при решении вышеупомянутых проблем оптимального контроля в классах W^rH^ω, в п. 26.2 в качестве множества допустимых управлений рассматривается произвольный выпуклый функциональный класс. Для таких управлений сформулировано и доказано *необходимое условие оптимальности* в форме *интегрального варианта принципа максимума* (Теорема 26.2). На примере класса H^ω в качестве множества управлений в главе 27 показано, каким образом этот принцип можно использовать для определения экстремальных функций как

[21] R. E. Bellman. Dynamic Programming. Princeton Univ. Press, Princeton, N.J., 1957.

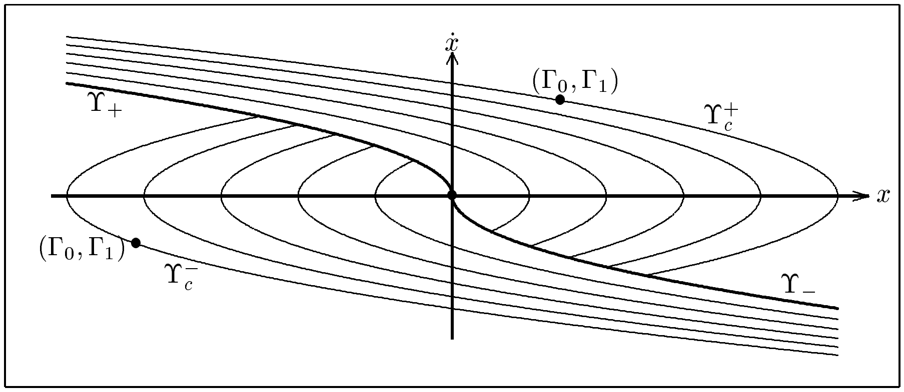

Рис. 16. Оптимальные траектории задачи о встрече

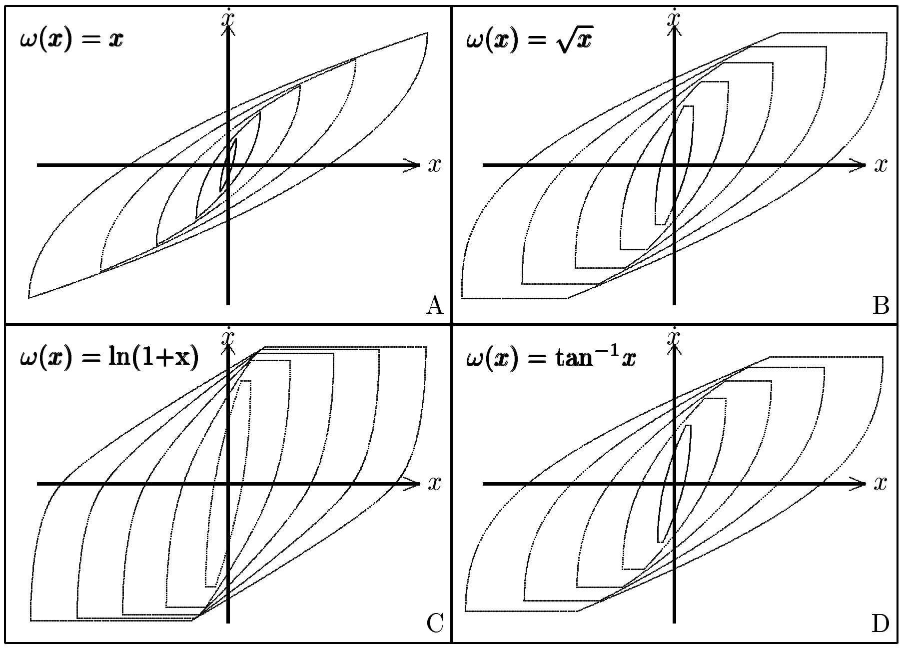

Рис. 17. Множества $\mathcal{A}_\omega(T)$ для $\lambda = 0$ и $T = 2$, 4, 6, 8, 10.

в вышеперечисленных задачах Колмогорова – Ландау для производных или задаче линейной динамики, так и в некоторых прикладных задачах финансовой математики, в частности, торговых моделях товарно-сырьевого (п. 28.1) и фондового рынков (п. 28.2).

Часть 8. Результаты и гипотезы о поперечниках $W^r H^\omega[-1, 1]$. Наконец, завершающая часть диссертации посвящена некоторым результатам и гипотезам в области поперечников классов $W^r H^\omega[-1, 1]$.

Поперечники, введенные А. Н. Колмогоровым, характеризуют наилучшее приближение подмножеств нормированных пространств множествами данной размерности.

Как и в других разделах диссертации, вначале дается очень короткий обзор результатов тематики. В данном случае перечисляются основные результаты, касающиеся вычисления поперечников соболевских классов $W^r_\infty(\mathbb{I})$ и периодических классов $W^r H^\omega(\mathbb{T})$, а также характеризации наилучших аппроксимационных пространств и оптимальных методов приближения. В частности, в случае соболевских классов $W^r_\infty(\mathbb{I})$ выделяются результаты

В. М. Тихомирова, Рубана, Лигуна, Маковоза, Мичелли и Пинкуса[22]. Что касается вычисления поперечников периодических классов $W^rH^\omega(\mathbb{T})$, отмечаются работы Корнейчука, Рубана, Лоренца, Моторного, Рубана, Лигуна и многих других[23].

В содержательной части раздела формулируется теорема о поперечниках непериодического класса $W^1H^\omega[-1,1]$ при некоторых ограничениях на модуль непрерывности ω. Затем предлагаются оценки снизу для поперечников специально построенных классов $W^rH^\omega[n]$, в случае линейного ω совпадающими со стандартными соболевскими классами W^{r+1}_∞. Наконец, предлагается гипотеза о поперечниках непериодического класса $W^rH^\omega[-1,1]$ в терминах чебышевского ω-сплайна для этой задачи.

Благодарность. В заключение автор выражает глубокую благодарность своим учителям в Государственном Университете Штата Огайо и Московском Государственном Университете профессорам Борису Самуиловичу Митягину и Владимиру Михайловичу Тихомирову за постановку задач, постоянное внимание к результатам, дружеские советы и многочисленные рекомендации по улучшению содержания научных работ. Автор глубоко признателен Н. П. Корнейчуку, чьи работы определили интерес автора к тематике и чьи детальные замечания к работе [1] использовались при написании других работ в теории классов W^rH^ω (в частности, [2]).

Автор также выражает глубокую благодарность:

В. Г. Болтянскому за исторический экскурс в теорию оптимальных процессов и обсуждение результатов статьи [5] о решении задач линейной динамики в классах W^rH^ω;

Р. Дж. Маккену за продуктивные обсуждения связи некоторых аспектов работ [1] и [2] с решением транспортной задачи;

В. Л. Левину за предоставленные материалы о двойственности задачи о максимизации интегральных функционалов и проблеме Монжа – Канторовича;

И. Гохбергу за внимание и публикацию книги [9] в серии "Operator Theory Advances and Applications";

Редакторам журнала Journal of Approximation Theory А. Пинкусу и П. Неваи за интерес и полезные рекомендации по улучшению содержания работ [3], первой публикации автора, и [5], соответственно;

А. Г. Костюченко за обсуждение результатов работы [4] о свойствах экстремальных перестановок;

В. Желязко за интерес к работе [10] о решениях задачи Золотарева и публикацию этой монографии в серии "Dissertationes Mathematicae".

[22] C. A. Micchelli, A. Pinkus. *Some problems on approximation of functions of two variables and n-widths of integral operators.* J. Approx. Theory, 24:51–77, 1978.

[23] Н. П. Корнейчук. Точные константы в теории приближений. Наука, М., 1990.

1. *Максимизация функционалов в $H^\omega[a,b]$*, Математический Сборник **189**:2 (1998), 3–72.

2. *Экстремальные функции интегральных функционалов в $H^\omega[a,b]$*, Известия РАН, Серия Математическая **63**:2 (1999), 3–62.

3. *Zolotarev ω-polynomials in W^rH^ω*, J. Approximation Theory **90**:3 (1997), 340–378.

4. *Свойства ω-перестановок*, Функциональный Анализ и Его Приложения **33**:3 (1999), 1–20.

5. *Generalizations of the time-optimal problem and Lyapunov theorem on the range of vector measures*, J. Approximation Theory **147**:1 (2007), 81–111.

6. *Общая конструкция чебышевских ω-сплайнов с данной нормой*, Алгебра и Анализ **10**:6 (1998), 93–134.

7. *Extremal problems in generalized Sobolev classes*, Analysis of divergence: control and management of divergent processes (Orono, ME, 1997), Appl. Numer. Harmon. Anal., Burkhauser Boston, MA, (1999), 327–357.

8. *Неравенства Колмогорова для функций из классов W^rH^ω с ограниченной нормой L_p*, Известия РАН, Серия Математическая **74**:2 (2010), 5–64.

9. *Chebyshev Splines and Kolmogorov Inequalities*, Series: Operator Theory: Advances and Applications, vol. 105 Birkhauser: Basel, Boston, Berlin. (1998) xiv+207 pp.

10. *Kolmogorov problem in $W^rH^\omega[0,1]$ and extremal Zolotarev ω-splines*, Dissertationes Mathematicae, vol. 379, IMPAN, Warsaw, (1998) iii+81 pp.