МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ М. В. ЛОМОНОСОВА
МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

На правах рукописи

УДК 517.518+517.52

Плотников Михаил Геннадьевич

КВАЗИМЕРЫ, ОБОБЩЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ И ХАУСДОРФОВЫ МЕРЫ В ТЕОРИИ РЯДОВ ХААРА И УОЛША

01.01.01 — вещественный, комплексный и функциональный анализ

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Москва–2011

Работа выполнена на кафедре высшей математики и физики Вологодской государственной молочнохозяйственной академии им. Н. В. Верещагина

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук,
профессор Дьяченко Михаил Иванович
доктор физико-математических наук,
профессор Лукомский Сергей Федорович
доктор физико-математических наук,
профессор Холщевникова Наталья Николаевна

Ведущая организация: Московский физико-технический институт
(Государственный университет)

Защита диссертации состоится 25 ноября 2011 года в 16 ч. 40 мин. на заседании диссертационного совета Д 501.001.85 при Московском Государственном Университете имени М. В. Ломоносова по адресу: 119991, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, МГУ имени М. В. Ломоносова, Механико-математический факультет, аудитория 16-24.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Механико-математического факультета МГУ имени М. В. Ломоносова.

Автореферат разослан 2011 года.

Ученый секретарь диссертационного
совета Д 501.001.85 при МГУ
доктор физико-математических наук,
профессор В. Н. Сорокин

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы исследований

Представленная работа стоит на стыке теории единственности ортогональных рядов, теории обобщенных интегралов, а также некоторых разделов теории меры и теории дифференцирования.

Теория единственности, один из классических разделов теории ортогональных рядов, берет свое начало с известной теоремы Кантора, доказанной еще в конце XIX века и утверждавшей, что если тригонометрический ряд сходится к нулю всюду на $[-\pi, \pi)$, кроме, быть может, конечного множества точек, то этот ряд является тождественно нулевым, то есть все коэффициенты этого ряда равны нулю. С тех пор теория единственности превратилась в весьма разветвленную теорию, тесно связанную не только с вещественным анализом, но и с другими разделами математики, например, с теорией вероятностей, теорией чисел и теорией множеств.

Теория единственности естественным образом началась с изучения тригонометрической системы. В. Юнг усилил теорему Кантора, показав, что в этой теореме достаточно требовать сходимости к нулю вне счетного множества. Теоремы Кантора и Юнга привели в начале XX века к обширным исследованиям с целью поиска исключительных множеств (*множеств единственности* или *U-множеств*), которые не нарушают эти теоремы. Множества, не являющиеся U-множествами, называются *множествами множественности* или *M-множествами.* Эти понятия можно перенести с тригонометрической на любую другую систему функций.

Теорема Юнга означает, что любое счетное множество является U-множеством для тригонометрических рядов. Важнейшим шагом в построении теории единственности явился пример совершенного M-множества нулевой меры, построенный в 1916 году Д. Е. Меньшовым. Дальнейшие исследования Н. К. Бари, А. Райхмана, Р. Салема, А. Зигмунда, И. И. Пятецкого-Шапиро, Й. Марцинкевича и других авторов показали, что вопрос о принадлежности конкретного множества классу U- или M-множеств для тригонометрических рядов является очень тонким вопросом, связанным не только с метрической и топологической, но и с арифметической структурой множеств. Этот факт подтверждает то обстоятельство, что обычные способы классификации множеств нулевой меры по степени их "густоты", такие как емкости и хаусдорфовы размерности, не позволяют различить U- и M-множества. Представление о глубине проблемы дает тот факт, что даже в простейшем случае, когда рассматриваются *симметричные замкнутые множества* F_ζ *с постоянным отношением* ζ (*множества канторовского типа*), решение этого вопроса требует привлечения алгебраической теории чисел. Например, знаменитый результат, достигнутый усилиями Р. Салема, И. И. Пятецкого-Шапиро и А. Зигмунда, утверждает, что множество F_ζ является U-множеством тогда и только тогда, когда $1/\zeta$ — число Пизо. Ранее этот результат был получен Н. К. Бари для рациональных ζ. В общем же случае вопрос об U- и M-множествах чрезвычайно труден и не решен даже для совершенных множеств. Более того, А. Кехрис показал[1], что не существует конструктивного критерия принадлежности заданного множества классу множеств единственности.

Вторым важным направлением теории единственности является проблема восстановления коэффициентов сходящихся вне U-множеств функциональных рядов по их сумме. Еще в конце XIX века П. дю Буа-Реймон доказал, что что тригонометрический ряд, всюду сходящийся к интегрируемой по Риману функции, является рядом Фурье своей суммы. Позже А. Лебег обобщил эту теорему на случай ограниченных суммируемых функций, а Ч. Валле-Пуссен — на случай суммируемых функций. При изучении задачи о восстановлении коэффициентов сходящихся рядов обычно приходится иметь дело с сильно осциллирующими функциями, не всегда являющимися суммируемыми. В связи с этим дальнейшие обобщения теорем дю Буа-Реймона, Лебега и Валле-Пуссена связаны с изучением интегралов, более общих, чем интеграл Лебега. В каком-то смысле завершением этого направления для тригонометрических рядов явилось построение таких интегралов, что всякий всюду сходящийся к конечной функции тригонометрический ряд является рядом Фурье в смысле данного интеграла. Впервые такой интеграл построил А. Данжуа[2].

В 60-е годы XX-ого века стали систематически изучаться вопросы единственности для рядов по системам функций, отличным от тригонометрической (*системам Радемахера, Хаара, Уолша, Виленкина–Прайса, Фабера–Шаудера, Франклина* и ряду других). На развитие данной теории, в особенности на постановку задач, оказала сильное влияние ставшая классической теория единственности тригонометрических рядов. Однако, многие результаты в теории единственности рядов по различным системам функций оказались отличными от тех, что имеют место для тригонометрической системы, не говоря о том, что развитие этой теории потребовало в подавляющем большинстве случаев разработки совершенно новых методов.

[1] A. S. Kechris, A. Louveau, *Descriptive set theory and the structure of sets of uniqueness*, London Math. Soc., Lecture Note Series, **128**, Cambridge University Press, 1989.

[2] A. Denjoy, *Lesons sur le calcul des coefficients d'une série trigonométrique*, Paris, 1941–1949.

Системы Хаара и Уолша играют важную роль в теории ортогональных рядов и тесно связаны между собой. Любая функция одной из этих систем является линейной комбинацией конечного числа функций другой системы. Несмотря на такую тесную связь, теория единственности рядов Хаара сильно отличается от теории единственности рядов Уолша.

Интерес к системе Уолша связан с двумя обстоятельствами. С одной стороны, эта система играет важную роль в приложениях, связанных с теорией передачи сигнала и сжатия информации. С другой стороны, система Уолша является простым примером системы характеров на некоторой компактной абелевой группе, на котором можно проверить многие вопросы общей теории. Теория единственности рядов по системе Уолша развивалась под влиянием аналогичной теории для тригонометрической системы, и результаты этих теорий зачастую похожи. Как и для тригонометрической системы, для системы Уолша принадлежность данного множества классу U-множеств или классу M-множеств в значительной степени зависит не от метрической, а от арифметической природы множества.

Система Хаара, введенная А. Хааром еще в 1910 году, является первым и наиболее простым примером системы всплесков (вейвлетов), теория которых сейчас интенсивно развивается. Кроме того, эта система, как показано в работах П. Л. Ульянова (см., напр.,[3]), являющегося инициатором глубокого изучения системы Хаара, а также А. М. Олевского (см., напр.,[4]), играет важную роль в общей теории ортогональных рядов, где с ее помощью были решены многие задачи.

Тот факт, что пустое множество является U-множеством для рядов Хаара, был доказан самим А. Хааром, однако доказательство содержало ошибку. Верное доказательство вытекает из появившихся одновременно в 1964 году работ Ф. Г. Арутюняна, Ф. Г. Арутюняна и А. А. Талаляна, М. Б. Петровской, В. А. Скворцова. Однако, любое одноточечное множество уже является M-множеством для таких рядов (результат Г. Фабера, Дж. Мак-Лафлина и Дж. Прайса). Таким образом, в отличие от рядов Уолша или тригонометрических только пустое множество является U-множеством для рядов Хаара. В связи с этим для получения теорем единственности для рядов Хаара возникает необходимость рассматривать подклассы таких рядов. Естественными примерами таких классов явились классы Арутюняна–Талаляна и Вэйда.

---

[3] П. Л. Ульянов, "Расходящиеся ряды Фурье", *УМН*, **16**:3 (1961), 61–142; П. Л. Ульянов, "О рядах по системе Хаара", *Матем. сб.*, **63**:3 (1964), 356–391.

[4] A. M. Olevskii, *Fourier series with respect to general orthonormal systems*, Springer–Verlag, Berlin, 1975.

Важный шаг в другом направлении был сделан В. А. Скворцовым, который построил ряд интегралов (см., напр.,[5]), решающих проблему восстановления коэффициентов одновременно рядов Хаара и Уолша.

Гораздо сложней оказалась ситуация с вопросами единственности **кратных** ортогональных рядов. Например, до сих пор не дан ответ, причем для любого из основных типов сходимости, на следующий фундаментальный вопрос: всякое ли множество положительной меры является M-множеством для кратных рядов Уолша или тригонометрических? Еще в 1918 году в работе Х. Гейрингер появилось ошибочное доказательство теоремы типа Кантора для тригонометрических рядов при *сходимости по прямоугольникам.* И только в начале 90-х годов Ш. Т. Тетунашвили нашел[6] верное доказательство. Им был разработан замечательный метод сведения прямоугольной сходимости кратных тригонометрических рядов к повторной, позволивший, в частности, доказать, что любое счетное множество является U-множеством для кратных тригонометрических рядов при сходимости по прямоугольникам, а также построить широкий класс континуальных U-множеств (более слабый результат, состоящий в том, что пустое множество является U-множеством для двойных тригонометрических рядов при сходимости по прямоугольникам, был доказан в 1972 г. Дж. М. Эшем и Г. Вэлландом[7]). Чуть ранее для кратных рядов Уолша близкие результаты получил С. Ф. Лукомский[8]. Более широкие, чем у Ш. Т. Тетунашвили и С. Ф. Лукомского, классы континуальных U-множеств были построены в недавних работах Л. Д. Гоголадзе[9] и Т. А. Жеребьевой[10]. Проблема восстановления коэффициентов повторно сходящихся (а значит, согласно результатам Ш. Т. Тетунашвили, и сходящихся по прямоугольникам) кратных тригонометрических рядов решена в 2000 году В. А. Скворцовым.

[5] В. А. Скворцов, "Вычисление коэффициентов всюду сходящегося ряда Хаара", *Матем. сб.*, **75**:3 (1968), 349–360, V. A. Skvortsov, "Henstock-Kurzweil type integrals in $\mathcal{P}$-adic harmonic analysis", *Acta Math. Acad. Paedagog. Nyházi.* (*N. S.*), **20**:2 (2004), 207–224.

[6] Ш. Т. Тетунашвили, "О некоторых кратных функциональных рядах и решение проблемы единственности кратных тригонометрических рядов для сходимости по Прингсхейму", *Матем. сб.*, **182**:8 (1991), 1158–1176.

[7] J. M. Ash, G. V. Welland, "Convergence, uniqueness, and summability of multiple trigonometric series", *Trans. Amer. Math. Soc.*, **163**:2 (1972), 401–436.

[8] С. Ф. Лукомский, "О некоторых классах множеств единственности кратных рядов Уолша", *Матем. сб.*, **180**:7 (1989), 937–945.

[9] Л. Д. Гоголадзе, "К вопросу о восстановлении коэффициентов сходящихся кратных функциональных рядов", *Изв. РАН. Сер. матем.*, **72**:2 (2008), 83–90.

[10] Т. А. Жеребьева, "Об одном классе множеств единственности для двойных тригонометрических рядов", *Матем. заметки*, **87**:6 (2010), 830–839.

Вопросам единственности кратных рядов Хаара посвящено не так много работ. Наиболее общие результаты в этом направлении для сходимости по прямоугольникам содержатся в работах В. А. Скворцова, а также В. А. Скворцова и А. А. Талаляна (см., напр.,[11]).

Если же вместо сходимости по прямоугольникам рассматривать *сходимость по кубам* или *ρ-сходимость*, то о единственности кратных рядов для таких сходимостей было известно крайне мало. Это касается и тригонометрических рядов, и рядов Уолша, и рядов Хаара. В появившемся в последнее время ряде работ известных математиков (см., напр., работы Дж. М. Эша и Ш. Т. Тетунашвили[12] или А. А. Талаляна[13]) получены некоторые результаты о единственности кратных рядов Уолша и тригонометрических при сходимости по кубам или даже при более слабых предположениях, однако, в этих работах накладываются ограничения, пусть и достаточно мягкие, на поведение коэффициентов или частичных сумм рядов.

Если же не рассматривать никаких ограничений, то до сих пор неизвестно, является ли хотя бы пустое множество U-множеством для кратных рядов Уолша на единичном кубе $[0,1]^m$ или для кратных тригонометрических рядов при сходимости по кубам или ρ-сходимости. Гипотеза Дж. М. Эша состоит в том, что последнее не является верным для кратных тригонометрических рядов. Аналогичный вопрос оставался открытым до последнего времени и для кратных рядов Хаара.

Если же рассматривать одномерные функции Уолша на двоичной группе G, являющейся естественной областью определения таких функций, то о множествах единственности для сходящихся по кубам или ρ-сходящихся кратных рядов Уолша на группе G^m до недавнего времени было известно лишь (результаты С. Ф. Лукомского[14]), что пустое множество является U-множеством, и что классы U-множеств для сходящихся по прямоугольникам и по кубам кратных рядов Уолша не совпадают.

---

[11] В. А. Скворцов, "Об одной теореме единственности для многомерного ряда Хаара", *Изв. АН Армян. ССР, Сер. матем.*, **23**:3 (1988), 293–296; V. A. Skvortsov, "A Perron type integrals in an abstract space", *Real Anal. Exchange*, **13**:1 (1987/88), 76–79; В. А. Скворцов, А. А. Талалян, "Некоторые вопросы единственности кратных рядов по системе Хаара и тригонометрической системе", *Матем. заметки*, **13**:3 (1973), 104–113.

[12] J. M. Ash, Sh.T. Tetunashvili, "New uniqueness theorems for trigonometric series", *Proc. Amer. Math. Soc.*, **128**:9 (2000), 2627–2636.

[13] А. А. Талалян, "О единственности и интегрируемости кратных тригонометрических рядов", *Матем. заметки*, **86**:5 (2009), 761–775.

[14] S. F. Lukomskii, "On a U-set for multiple Walsh series", *Anal. Math.*, **18**:2 (1992), 127–138.

Содержание работ по теории единственности можно найти в ряде обзоров[15]. Ранние, ставшие классическими, результаты, относящиеся к одномерным тригонометрическим рядам, подробно описаны в монографии Н. К. Бари[16].

Проблемы единственности рядов по ортогональным системам часто тесно связаны с поведением коэффициентов сходящихся общих рядов, то есть рядов, не являющихся рядами Фурье, по этим системам. Известная теорема Кантора–Лебега утверждает, что коэффициенты одномерного тригонометрического ряда, сходящегося (к конечной функции) на множестве положительной меры, стремятся к нулю. Для одномерных рядов Уолша на группе G дело обстоит даже проще: для стремления коэффициентов к нулю достаточно сходимости в одной лишь точке.

Дж. М. Эш и Г. Вэлланд доказали, что если *m-кратный тригонометрический ряд*

$$(T) = \sum_{n_1=-\infty}^{+\infty} \dots \sum_{n_m=-\infty}^{+\infty} c_{n_1,\dots,n_m} e^{i(n_1 t_1 + \dots + n_m t_m)} \tag{1}$$

сходится по прямоугольникам на множестве положительной меры, то коэффициенты $c_{\mathbf{n}}$ этого ряда ограничены и стремятся к нулю при $\min_{i=1,\dots,n} |n_i| \to \infty$. При сходимости по кубам или ρ-сходимости последнее утверждение перестает быть верным. Тем не менее, коэффициенты рядов (1), сходящихся таким образом, не могут расти очень быстро. В 1958 году П. Коэн показал, что если ряд (T) вида (1) сходится по кубам на множестве полной меры, то коэффициенты этого ряда имеют рост слабее экспоненциального. В 1997 году Дж. М. Эш и Г. Вонг доказали[17] в двумерном случае, что результат Коэна точен в том смысле, что для любой последовательности $\varphi(n)$ положительных чисел такой, что $\limsup_{n\to\infty} (\varphi(n))^{1/n} \le 1$, найдутся всюду сходящийся по кубам ряд (1) и $C > 0$ такие, что если $|||\mathbf{n}||| = \max\{|n_1|, \dots, |n_m|\}$, то

$$C^{-1}\varphi(|||\mathbf{n}_i|||) \le |c_{\mathbf{n}_i}| \le C\varphi(|||\mathbf{n}_i|||)$$

---

[15] Б. И. Голубов, "Ряды по системе Хаара", *Итоги науки. Сер. матем. Матем. анал.* 1970, 1971, 109–146; Л. А. Балашов, А. И. Рубинштейн, "Ряды по системе Уолша и их обобщения", *Итоги науки. Сер. Математика. Матем. анал.* 1970, 1971, 147–202; W. R. Wade, "Recent developments in the theory of Walsh series", *Internat. J. Math.*, **5**:4 (1982), 625–673; W. R. Wade, "Recent developments in the theory of Haar series", *Colloquium Mathematicum*, **52**:2 (1986), 213–238; А. А. Талалян, Р. И. Овсепян, "Теоремы Д. Е. Меньшова о представлении и их влияние на развитие метрической теории функций", *УМН*, **47**:5 (287) (1992), 15–44; J. M. Ash, G. Wang, "A survey of uniqueness questions in multiple trigonometric series", *Contemporary Math.*, **208** (1997) 35–71; ряд других работ.

[16] Н. К. Бари, *Тригонометрические ряды*, ГИФМЛ, М., 1961.

[17] J. M. Ash, G. Wang, "One and two dimensional Cantor-Lebesgue type theorems", *Trans. Amer. Math. Soc.*, **349**:4 (1997), 1663–1674.

для некоторой подпоследовательности коэффициентов $c_{\mathbf{n}_i}$. Теоремы Коэна, Эша и Вонга с естественными изменениями справедливы и для ρ-сходимости. Аналоги теорем Кантора–Лебега для сходящихся по прямоугольникам кратных рядов Хаара и Уолша были получены в 1973 году В. А. Скворцовым.

В главе 7 диссертации изучалось поведение коэффициентов сходящихся по кубам почти всюду кратных рядов Хаара и Уолша. Ситуация оказалась отличной как от тригонометрического случая (при сходимости по кубам), так и от случая сходящихся по прямоугольникам кратных рядов Хаара и Уолша. Так, стоящие не очень близко от "главной диагонали" коэффициенты даже всюду сходящихся по кубам кратных рядов Уолша могут расти в некотором смысле сколь угодно быстро. Похожим образом обстоят дела и для кратных рядов Хаара.

Помимо изучения вопросов единственности рядов Хаара и Уолша, значительная часть работы посвящена вопросам, связанным с мерами и обобщенными интегралами. Обоснованием такого подхода служат два обстоятельства. Во-первых, одной из главных целей развития теории обобщенных интегралов всегда было ее приложение к теории ортогональных рядов, особенно к теории единственности. Во-вторых, важным инструментом получения результатов, относящихся к теории ортогональных рядов, является техника *формального интегрирования рядов*, фактически позволяющая свести изучение ортогональных рядов к изучению некоторых объектов (в некоторых случаях их называют *квазимерами*), обладающих рядом свойств мер. В частности, важную роль играет изучение дифференциальных свойств и гладкости таких объектов. В связи с этим одной из задач диссертации является изучение теории обобщенных интегралов и некоторых специальных вопросов теории меры с целью их применения к теории единственности рядов Хаара и Уолша.

Особенностью диссертации является систематическое использование *метода формального интегрирования* (*метода квазимер*) рядов. Этот метод в некотором смысле подобен римановской теории для тригонометрических рядов, изучающей дифференциальные свойства *функций Римана* и связь этих свойств со свойствами самих рядов. Одно из преимуществ (по сравнению с тригонометрическими рядами) применения этого метода к рядам Хаара и Уолша состоит в том, что нередко не существует заметной разницы, с точки зрения техники, между изучением квазимер, порожденных одномерными рядами, и квазимер, порождённых кратными рядами. В ситуации с тригонометрическими рядами попытки применить аналоги функций Римана для изучения кратных рядов часто приводят к значительным по сравнению с изучением одномерных рядов техническим трудностям. Для рядов Уолша метод квазимер впервые рассмотрел Н. Файн[18], а для рядов Хаара — В. А. Скворцов[19].

Метод формального интегрирования использовался ранее и для других рядов. Так, например, этот метод применялся в хорошо известной работе С. В. Конягина[20], где была решена проблема сходимости тригонометрических рядов к ∞ определенного знака. Но использование этого метода для рядов по системам Хаара, Уолша и некоторым их обобщениям в определенном смысле более продуктивно, чем для многих других рядов. Дело в том, что существует изоморфизм между множеством всех (!) рядов Хаара или Уолша (не обязательно сходящихся), с одной стороны, и множеством квазимер, с другой. Такая тесная связь между рядами и функциями множества не имеет места для ряда других систем, в частности, для тригонометрической системы. Для тригонометрического ряда, даже всюду сходящегося к конечной сумме, формально проинтегрированный ряд сходится, вообще говоря, лишь почти всюду.

Метод квазимер оказывается особенно эффективным при изучении рядов Хаара. Еще в работе В. А. Скворцова[19] было установлено, что сходимость ряда Хаара в точке эквивалентна существованию у порожденной этим рядом квазимеры производной относительно последовательности двоичных сетей. Это обстоятельство наводило на мысль, что теорию рядов Хаара можно рассматривать как теорию квазимер. Данная мысль получила развитие в ряде работ грузинских математиков (см., напр.,[21]), где изучались вопросы сходимости и расходимости кратных рядов Фурье–Хаара, и были установлены в некотором смысле окончательные в этом направлении результаты. В диссертации указанная идеология рассматривалась уже при изучении **общих** кратных рядов Хаара. В главах 4, 5 и 6 получен ряд дуальных теорем для одномерных или кратных рядов Хаара, с одной стороны, и для квазимер или обобщенных интегралов, с другой. При этом нарушение общности теорем для рядов Хаара происходит ровно тогда, когда нарушается общность

---

[18]N. J. Fine, "On the Walsh functions", *Trans. Amer. Math. Soc.* **65**:3 (1949), 372–414.

[19]В. А. Скворцов, "Дифференцирование относительно сетей и ряды Хаара", *Матем. заметки*, **4**:1 (1968), 33–40.

[20]С. В. Конягин, "О пределах неопределенностей тригонометрических рядов", *Матем. заметки*, **44**:6 (1988), 770–784.

[21]G. E. Tkebuchava, "On the divergence of spherical sums of double Fourier–Haar series", *Anal. Math.*, **20**:2 (1994), 147–153; R. D. Getsadze, "On divergence of the general terms of the double Fourier–Haar series", *Arch. Math*, **86**:4 (2006), 331–339; Г. Г. Ониани, "О расходимости кратных рядов Фурье–Хаара", *Докл. РАН*, **419**:2 (2008), 169–170.

теорем для квазимер или обобщенных интегралов. Что интересно, такой тесной связи с квазимерами нет и не может быть для рядов Уолша, несмотря на то, что множества рядов Хаара и рядов Уолша изоморфны. Это связано с тем, что сходимость рядов Уолша устроена несколько сложней по сравнению с рядами Хаара, и существование производной относительно последовательности двоичных сетей у порожденной рядом Уолша квазимеры не является достаточным условием сходимости данного ряда.

Цели и основные задачи работы.

Одной из основных целей диссертации является построение теории единственности сходящихся по кубам или ρ-сходящихся кратных рядов Уолша и Хаара. В части кратных рядов Хаара построение теории в работе начинается с самого начала (теорема типа Кантора) и заканчивается достаточно общими и в некотором смысле окончательными результатами, относящимися к проблеме восстановления коэффициентов. Кроме того, большое внимание в работе уделено связи теории единственности рядов Хаара и Уолша со смежными вопросами теории функций, таких как специальные вопросы теории меры и теории обобщенных интегралов. Подробно изучаются свойства конечно-аддитивных функций множества (квазимер) с целью их дальнейшего применения к теории единственности рядов Хаара и Уолша. В частности, введены и изучены новые условия типа непрерывности и гладкости квазимер. Важную роль в работе играет демонстрация того факта, что теорию общих рядов Хаара можно рассматривать как теорию квазимер. Наконец, одной из задач работы является изучение поведения коэффициентов сходящихся по кубам или ρ-сходящихся почти всюду кратных рядов Хаара и Уолша.

Основные методы исследований.

В работе используются методы теории ортогональных рядов (в частности, метод формального интегрирования), методы теории обобщенных интегралов и теории дифференцирования, ряд комбинаторных и теоретико-числовых идей.

Научная новизна.

Все результаты диссертации являются новыми. Основные из них состоят в следующем:

1. Введены и изучены понятия локальной и нелокальной Σ-непрерывности, а также Σ-липшицевости для конечно-аддитивных функций двоичного интервала (квазимер). Найдена связь между этими условиями и поведением коэффициентов и частичных сумм кратных рядов Хаара и Уолша.
2. Построен класс U-множеств кратных рядов Уолша на группе G^m при сходимости по кубам. Этот класс содержит, в частности, все не более чем счетные множества, а также некоторые континуальные множества определенной арифметической структуры (множества типа Дирихле). Среди последних имеются множества максимальной размерности Хаусдорфа. Решена проблема восстановления коэффициентов кратных рядов Уолша, сходящихся вне построенных U-множеств.
3. Построен интеграл, решающий проблему восстановления коэффициентов кратных рядов Хаара из широкого, существенно нерасширяемого класса. Одним из следствий этого факта является аналог теоремы Кантора для сходящихся по 1/2-ограниченным прямоугольникам кратных рядов Хаара.
4. Доказана неединственность кратных рядов Хаара при сходимости по кубам. В двумерном случае найдена граница существования единственности для сходящихся по ρ-ограниченным прямоугольникам кратных рядов Хаара.
5. Доказана непротиворечивость некоторых построенных автором интегралов и известных обобщенных интегралов типа Хенстока–Курцвайля. В качестве следствия получены неусиляемые теоремы типа дю Буа-Реймона для двойных рядов Хаара.
6. В терминах хаусдорфовых мер найдено достаточное условие (для кратных рядов Уолша) и критерий (для кратных рядов Хаара) принадлежности данного множества классу U-множеств при не более чем степенном росте прямоугольных частичных сумм. В качестве следствия установлен критерий принадлежности множеств канторовского типа классу множеств относительной единственности одномерных рядов Хаара из класса Вэйда. Тем самым продемонстрировано, что при естественном выборе класса рядов факт принадлежности множества классу U-множеств рядов Хаара связан лишь с метрической, но не арифметической структурой этого множества.
7. Построен всюду сходящийся по кубам кратный ряд Уолша, достаточно массивная подпоследовательность коэффициентов которого растет быстрее любой наперед заданной последовательности. Для кратных

тригонометрических рядов подобное невозможно в силу теоремы Коэна. Указаны стремящиеся к нулю подпоследовательности коэффициентов сходящихся по кубам на множестве определенной меры кратных рядов Уолша.

Теоретическая и практическая ценность.

Диссертация носит теоретический характер. Ее результаты и методы могут применяться в теории единственности рядов по конкретным системам функций, в других разделах теории ортогональных рядов (особенно рядов по системам Хаара, Уолша, Радемахера, рядов по мультипликативным системам), в теории обобщенных интегралов.

Апробация работы.

Основные результаты диссертации неоднократно докладывались и обсуждались на следующих семинарах и конференциях:

- на семинаре по теории функций действительного переменного под руководством академика РАН, проф. П. Л. Ульянова и чл.-корр. РАН, проф. Б. С. Кашина, а затем под руководством чл.-корр. РАН, проф. Б. С. Кашина, проф. Б. И. Голубова, проф. С. В. Конягина и проф. М. И. Дьяченко (механико-математический факультет МГУ им. М. В. Ломоносова, межкафедральный семинар, 2004–2011 гг., неоднократно);
- на семинаре по теории ортогональных и тригонометрических рядов под руководством проф. М. К. Потапова, проф. В. А. Скворцова, проф. Т. П. Лукашенко и проф. М. И. Дьяченко (механико-математический факультет МГУ им. М. В. Ломоносова, межкафедральный семинар, 1999–2010 гг., неоднократно);
- на международном симпозиуме «Ряды Фурье и их приложения» (Новороссийск, 2006);
- на Саратовских зимних школах «Современные проблемы теории функций и их приложения» (2004, 2006, 2008);
- на Воронежских зимних математических школах «Современные методы теории функций и смежные проблемы» (2005, 2011);
- на Казанских летних школах-конференциях «Теория функций, ее приложения и смежные вопросы» (2001, 2007);
- на международной конференции «Современные проблемы математики, механики и их приложений», посвященной 70-летию ректора МГУ, академика В. А. Садовничего (Москва, 2009);

- на международной конференции «Современные проблемы анализа и преподавания математики», посвященной 105-летию академика С. М. Никольского (Москва, 2010);
- на международной конференции «Dyadic and Walsh Analysis» (Ниш, Сербия, 2007);
- на международных конференциях «Summer Conference on Real Function Theory» (Стара Лесна, Словакия, 2008, 2010).

Публикации.

Основные результаты диссертации опубликованы в 16 работах автора, список которых приведен в конце автореферата. Тезисы докладов не включены в этот список. Работы [1]–[11] и [14]–[16] содержатся в журналах из Перечня ВАК.

Структура диссертации.

Диссертация состоит из введения и 7 глав, разбитых на пункты. В работе также содержится предметный указатель и список основных обозначений. Общий объем диссертации — 221 страница, список литературы содержит 272 наименования.

В предметном указателе имеются ссылки на номера страниц, на которых приведены определения и понятия, не относящиеся к общим математическим. В списке основных обозначений даются ссылки на номера страниц, на которых введены эти обозначения.

Нумерация формул, теорем, лемм и т.д. в диссертации — своя для каждой главы. Кроме того, используется единая нумерация всех объектов, кроме формул. Теоремы, леммы, предложения, следствия и т.д., утверждения которых принадлежат другим авторам, помечены буквой A перед номером.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

В главе 1 даны основные определения и доказан ряд вспомогательных утверждений.

Глава 2 посвящена изучению квазимер на единичном кубе $[0,1]^m$ и группе G^m. Конечной целью этого изучения является дальнейшее применение свойств квазимер к вопросам единственности одномерных и кратных рядов Хаара и Уолша.

Отметим два обстоятельства, оправдывающих актуальность результатов данной главы. Во-первых, наряду с тем, что изучению квазимер в одномерном случае посвящено некоторое количество работ, имеется крайне мало работ, где квазимеры рассматриваются в многомерном случае. Во-вторых, в многочисленной литературе, где систематически изучаются функции интервала (см., напр., монографии А. Сакса, Б. Томсона, К. Роджерса[22] и многие другие работы), а также в работах, где изучаются собственно квазимеры, рассматриваются условия типа непрерывности и гладкости "классического" типа, когда берутся значения функции множества на интервалах и оцениваются при стремлении к нулю диаметра или объема интервала. Как оказалось, такие условия часто не позволяют описать свойства **кратных** рядов Хаара и Уолша, сходящихся по кубам или ограниченным прямоугольникам.

В связи с вышесказанным нами были введены более тонкие типы непрерывности и гладкости квазимер. Основное отличие от условий "классического" типа состоит в том, что вместо значения квазимеры на двоичном интервале рассматривается сумма значений квазимеры на нескольких двоичных интервалах, причем значения берутся с определенным образом подобранными знаками $\pm$. В одномерном случае такой подход использовался, правда, совсем незначительно. Идея рассмотреть вместо значения квазимеры на одномерном двоичном интервале разность значений на двух смежных интервалах, по-видимому, впервые появилась в работе В. А. Скворцова[23], где условия, подобные Σ_m-непрерывности (см. определение 1 ниже), использовались для изучения (одномерных) рядов Хаара. Отметим также работы К. Йонеды[24], где также изучались разности значений (одномерных) квазимер на двух смежных двоичных интервалах. Заметим, однако, что, как показано в диссертации, в одномерном случае в чистом виде Σ_m-непрерывность эквивалентна "классической" непрерывности квазимер, то есть ее применение не является актуальным. В многомерном случае такого рода непрерывности (а также условия типа липшицевости) не использовались. Применение же новых условий типа непрерывности и гладкости для квазимер позволяет описывать многие

[22]С. Сакс, *Теория интеграла*, <Факториал Пресс>, М., 2004; B. S. Thomson, "Derivates of interval functions", *Mem. Amer. Math. Soc.*, **93**:452 (1991), 1–88; C. A. Rogers, *Hausdorff Measures*, Cambridge University Press, Cambridge, 1998.

[23]В. А. Скворцов, "О рядах Хаара, сходящихся по подпоследовательности частичных сумм", *Докл. АН СССР*, **183**:4 (1968), 784–786.

[24]K. Yoneda, "Positive definite generalized measures on the dyadic field", *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.*, **40**:(1–2) (1982), 147–151; K. Yoneda, "Sets of multiplicity on the dyadic group", *Acta Math. Hung.*, **41**:(3–4) (1983), 195–200.

(в том числе хорошо известные) свойства сходящихся кратных рядов Хаара и Уолша, порождающих эти квазимеры. Приведем лишь один пример. Σ_m-непрерывность квазимеры в точности означает, что для ряда Хаара, порождающего эту квазимеру, выполнено условие Арутюняна–Талаляна или один из его многомерных аналогов (см. теорему 2 ниже).

Отметим еще один мотив в пользу того, чтобы использовать новые, более тонкие, типы непрерывности и гладкости квазимер. Рассмотрим, например, кратные ряды Уолша. Для того, чтобы квазимеры, порожденные этими рядами, были Σ_m-непрерывны или (Σ_m, Δ_0)-непрерывны (см. определения 1 и 4 ниже), нет необходимости, чтобы коэффициенты рядов, порождающих эти квазимеры, стремились к нулю "по краям". Достаточно стремления к нулю (или близких условий) лишь для коэффициентов, находящихся в определенных областях, близких к "диагонали". А для такого поведения коэффициентов, как показано в диссертации, оказывается вполне достаточно обычных, связанных со сходимостью и не содержащих никаких дополнительных ограничений, предположений.

Приведем основные определения и результаты главы 2. Пусть на единичном кубе $[0,1]^m$ задана m-мерная вложенная последовательность

$$\{\Delta_{\mathbf{k}} = \Delta_{k_1,\dots,k_m} = \Delta_{k_1} \times \ldots \times \Delta_{k_m}\} \tag{2}$$

m-мерных двоичных интервалов, стягивающаяся к точке $\mathbf{x}_0$ и такая, что ранг интервала $\Delta_{\mathbf{k}}$ равен $\mathbf{k}$. Положим

$$\begin{gathered} \Delta_{k_i}^{(0)} = \Delta_{k_i},\ \ \Delta_{k_i}^{(1)} = \Delta_{k_i-1} \backslash \Delta_{k_i}; \\ \text{если } \boldsymbol{\sigma} = (\sigma_1, \dots, \sigma_m) \in \{0,1\}^m, \text{ то } \ \Delta_{\mathbf{k}}^{(\boldsymbol{\sigma})} = \Delta_{k_1}^{(\sigma_1)} \times \ldots \times \Delta_{k_m}^{(\sigma_m)}, \end{gathered} \tag{3}$$

$$|\boldsymbol{\sigma}| = \sigma_1 + \ldots + \sigma_m.$$

Определение 1. Скажем, что функция множества τ, определенная, по крайней мере, на каждом двоичном интервале $\Delta \subset [0,1]^m$, является Σ_m-*непрерывной* в точке $\mathbf{x}_0$, если для любой последовательности $\{\Delta_{\mathbf{k}}^{(\boldsymbol{\sigma})}\}$, определяемой формулами (2) и (3), выполнено условие

$$\lim_{k_1=\ldots=k_m\to\infty} \sum_{\boldsymbol{\sigma}\in\{0,1\}^m} (-1)^{|\boldsymbol{\sigma}|} \tau(\Delta_{\mathbf{k}}^{(\boldsymbol{\sigma})}) = 0. \qquad \square$$

Оказывается, Σ_m-непрерывность квазимеры связана со сходимостью и поведением коэффициентов порождающих ее m-кратных рядов Хаара и Уолша, особенно точно при этом описывая поведение первых. Ниже Q_d и I_d означают множества двоично-рациональных и, соответственно, двоично-иррациональных точек отрезка $[0,1]$.

Теорема 2. *Пусть заданы* $\mathbf{x}_0 \in [0,1]^m$ *и* m*-кратный ряд Хаара* (S)*. Тогда*:

1) *квазимера* τ*, порожденная рядом* (S)*, является* Σ_m*-непрерывной в точке* $\mathbf{x}_0$ *в том и только том случае, когда для общего члена ряда* (S) *в точке* $\mathbf{x}_0$ *выполнен следующий многомерный аналог условия Арутюняна–Талаляна*:

$$\begin{gathered} a_{n_1,\ldots,n_m}\chi_{n_1,\ldots,n_m}(\mathbf{x}_0) = \bar{\bar{\text{o}}}\,(n_1\cdot\ldots\cdot n_m) \quad \textit{при} \\ 2^{k-1} \le n_i \le 2^k - 1 \quad \textit{для всех} \;\; i=1,\ldots,m \;\; \textit{и} \;\; k\to\infty; \end{gathered} \tag{4}$$

2) *если для прямоугольных частичных сумм* $S_{\mathbf{N}} = S_{N_1,\ldots,N_m}$ *ряда* (S) *выполнено условие*

$$S_{N_1,\ldots,N_m}(\mathbf{x}_0) = \bar{\bar{\text{o}}}\,(N_1\cdot\ldots\cdot N_m) \quad \textit{при}$$

$$2^{k-1}+1 \le N_i \le 2^k \quad \textit{для всех } i=1,\ldots,m \;\; \textit{и} \;\; k\to\infty,$$

то квазимера, порожденная рядом (S)*, является* Σ_m*-непрерывной в точке* $\mathbf{x}_0$*.*

Теорема 3. *Пусть задан* m*-кратный ряд Уолша* (S)*. Тогда*:

1) *если для коэффициентов* $b_{n_1,\ldots,n_m}$ *ряда* (S) *выполнено условие*

$$\begin{gathered} b_{n_1,\ldots,n_m} \to 0, \quad \textit{если} \;\; 2^{k-1} \le n_i \le 2^k - 1 \\ \textit{для всех } i=1,\ldots,m \;\; \textit{и} \;\; k\to\infty, \end{gathered} \tag{5}$$

то квазимера τ*, порожденная рядом* (S)*, является* Σ_m*-непрерывной всюду на* $[0,1]^m$*;*

2) *если ряд* (S) $1/2$*-сходится к конечной сумме хотя бы в одной точке* $\mathbf{x}_0 \in (I_d)^m$*, то квазимера* τ*, порожденная этим рядом, является* Σ_m*-непрерывной всюду на* $[0,1]^m$*.*

В некоторых вопросах использовался следующий нелокальный аналог Σ_m-непрерывности.

Определение 4. Пусть $\Delta_0 \subset [0,1]^m$ — двоичный куб. Скажем, что квазимера τ является $(\Sigma_m,\,\Delta_0)$-*непрерывной*, если

$$\lim_{k\to\infty} \sum \pm\tau(\Delta) = 0,$$

где суммирование распространяется на все двоичные кубы $\Delta \subset \Delta_0$ ранга k, а знаки $\pm$ берутся в "шахматном" порядке. $\boxtimes$

Связь между $(\Sigma_m,\,\Delta_0)$-непрерывностью и сходимостью m-кратных рядов Уолша выражает

Теорема 5. *Пусть задан m-кратный ряд Уолша (S). Тогда:*

1) *если для коэффициентов ряда (S) выполнено условие (5), то квазимера τ, порожденная рядом (S), является $(\Sigma_m,\,\Delta_0)$-непрерывной для любого двоичного куба Δ_0;*

2) *если ряд (S) $1/2$-сходится к конечной сумме хотя бы в одной точке $\mathbf{x}_0 \in (I_d)^m$, то квазимера τ, порожденная этим рядом, является $(\Sigma_m,\,\Delta_0)$-непрерывной для любого двоичного куба Δ_0;*

3) *если ряд (S) сходится по кубам к конечной сумме на борелевском множестве $E \subset [0,1]^m$, то квазимера τ, порожденная этим рядом, является $(\Sigma_m,\,\Delta_0)$-непрерывной для любого двоичного куба Δ_0 такого, что $|E \cap \Delta_0| > 0$.*

В главе 3 рассматриваются вопросы единственности для кратных рядов Уолша на группе G^m, сходящихся по кубам или ρ-сходящихся. По сравнению с текущим положением дел для кратных тригонометрических рядов для кратных рядов Уолша получены достаточно общие результаты, касающиеся как изучения множеств единственности, так и проблемы восстановления коэффициентов.

Определение 6. Назовем множество $F \subset G^m$ *RD_m-множеством*, если существует возрастающая последовательность натуральных чисел $\mathbf{K} = \{k_j\}_{j=1}^{\infty}$ такая, что если $\omega_{\mathbf{n}}$ — многомерные функции Уолша, то

$$\omega_{2^{k_j},\dots,2^{k_j}}(\mathbf{t}) = 1 \quad \text{для всех } \mathbf{t} \in F,\ \ j = 1, 2, \dots. \tag{6}$$

$\square$

Арифметическая структура таких множеств F может быть описана следующим образом: точка $\mathbf{t} = (t^1, \dots, t^m) \in F$ только тогда, когда для всех $j = 1, 2, \dots$ у четного числа координат этой точки в двоичной записи на k_j-ом месте стоит единица. Геометрически же такие множества можно представить так: если множество G^m разбить на $2^{(k_j+1)\,m}$ непересекающихся двоичных кубов ранга $k_j + 1$ и закрасить эти кубы "в шахматном порядке", то условию (6) могут удовлетворять только те точки $\mathbf{t} \in G^m$, которые лежат в кубах, одинаково закрашенных с кубом, в котором лежит точка $(0+0, \dots, 0+0)$. RD_1-множества являются частным случаем *множеств Дирихле* для системы Уолша. Отметим, что существуют непустые совершенные (как следствие, мощности континуума) RD_m-множества. Более того, существуют совершенные RD_m-множества хаусдорфовой размерности m.

Теорема 7. 1) *Любое множество вида $F \cup E$, где F — RD_m-множество, а множество $E \subset G^m$ не более чем счетно, является U-множеством для кратных рядов Уолша на группе G^m при сходимости по кубам*; 2) *существуют совершенные U-множества для кратных рядов Уолша на группе G^m при сходимости по кубам, имеющие хаусдорфову размерность m.*

В главе 3 также построен многомерный двоичный интеграл, решающий проблему восстановления коэффициентов кратных рядов Уолша, сходящихся по кубам вне множеств единственности из достаточно широкого класса. Приведем определение этого интеграла в несколько упрощенной формулировке, сохраняющей, впрочем, его основные свойства.

Определение 8. Пусть конечная функция f определена всюду на G^m, за исключением, быть может, точек некоторого множества вида $F \cup E$, где F — RD_m-множество, а E — не более чем счетное множество. Назовем функцию f $(PWRD)$-*интегрируемой*, если для любого $\varepsilon > 0$ найдутся квазимеры F_1 и F_2 такие, что:

(A) для всех $\mathbf{t} \in G^m \setminus (F \cup E)$ имеет место следующая формула (μ — мера Хаара на G^m):

$$\underline{\lim} \frac{F_1(\Delta)}{\mu(\Delta)} \geq f(\mathbf{t}) \geq \overline{\lim} \frac{F_2(\Delta)}{\mu(\Delta)}, \quad \mu(\Delta) \to 0, \quad \Delta \text{ — двоичный куб}, \quad \Delta \ni \mathbf{t};$$

(B) квазимеры F_1 и F_2 являются (Σ_m, Δ_0)-непрерывными для всех двоичных кубов $\Delta_0 \subseteq G^m$;

(C) $F_1(G^m) - F_2(G^m) < \varepsilon$.

Значение $(PWRD)$-интеграла (интеграла Перрона–Уолша–Радемахера–Дирихле) от функции f по любому двоичному интервалу Δ определяется так:

$$(PWRD) \int\limits_{\Delta} f(\mathbf{t})\, d\mu(\mathbf{t}) = \inf_{F_1} F_1(\Delta) = \sup_{F_2} F_2(\Delta). \tag{7}$$

$\square$

Теорема 9. *Пусть кратный ряд Уолша (S) на группе G^m сходится по кубам к конечной сумме $f(\mathbf{t})$ во всех точках $\mathbf{t} \in G^m \setminus (F \cup E)$, где F — некоторое RD_m-множество, а $E \subset G^m$ — некоторое не более чем счетное множество. Тогда функция f является $(PWRD)$-интегрируемой и (S) является $(PWRD)$-рядом Фурье–Уолша этой функции.*

Ситуация интересна еще тем, что большинство известных интегралов, которые решают проблему восстановления коэффициентов рядов по различным системам функций, делают это лишь для рядов, сходящихся вне не более чем счетных множеств (если не накладывать никаких ограничений на поведение коэффициентов ряда). По-видимому, первый обобщенный интеграл, решающий проблему восстановления коэффициентов рядов, сходящихся вне измеримых несчетных U-множеств из некоторого достаточно широкого класса, был построен в 2001 году для одномерной тригонометрической системы Н. Н. Холщевниковой[25], см. также[26]. $(PWRD)$-интеграл решает задачу восстановления коэффициентов кратных рядов Уолша, сходящихся вне множеств вида $F \cup E$ (множество E не более чем счетно, F — RD_m-множество). Класс этих множеств не слишком широк, но при этом рассматривается случай кратных рядов, причем при сходимости по кубам. Напомним, что для кратных тригонометрических рядов для сходимости по кубам до сих пор не доказана (и не опровергнута) теорема типа Кантора даже в ее простейшей форме. Теоремы 7 и 9, а также ряд других теорем из диссертации решают для кратных рядов Уолша на группе G^m намного более общие задачи.

Оказывается, что $(PWRD)$-интеграл покрывает интеграл Лебега, из чего сразу вытекает

Теорема 10. *Любое множество вида $F \cup E$, где F — RD_m-множество, а $E \subset G^m$ — не более чем счетное множество, является V-множеством для кратных рядов Уолша на группе G^m при сходимости по кубам. Это означает, что если кратный ряд Уолша на группе G^m сходится по кубам вне множества $F \cup E$ указанного типа к конечной суммируемой функции f, то этот ряд является рядом Фурье–Уолша функции f.*

В главах 4 и 5 изучаются вопросы единственности m-кратных рядов Хаара

$$\sum_{\mathbf{n}=\mathbf{0}}^{\infty} a_{\mathbf{n}} \chi_{\mathbf{n}}(\mathbf{x}) = \sum_{n_1=0}^{\infty} \dots \sum_{n_m=0}^{\infty} a_{n_1,\dots,n_m} \prod_{q=1}^{m} \chi_{n_q}(x^q) \tag{8}$$

на единичном кубе $[0,1]^m$, а также смежные вопросы теории обобщенных интегралов. До последнего времени не было известно даже, является ли пустое

[25] Н. Н. Холщевникова, "Обобщенный тригонометрический интеграл", *Изв. НАН Армении. Сер. Матем.*, **36**:4 (2001), 82–89.

[26] В. А. Скворцов, Н. Н. Холщевникова, "Сравнение двух обобщенных тригонометрических интегралов", *Матем. заметки*, **79**:2 (2006), 278–287.

множество U-множеством для рядов (8) при сходимости по кубам или ρ-сходимости. Нами изучена не только эта, но и гораздо более общие проблемы, и получены окончательные или очень близкие к ним результаты, относящиеся к проблеме единственности и проблеме восстановления коэффициентов. Неожиданным оказался результат о неединственности кратных рядов Хаара на кубе $[0,1]^m$ при сходимости по кубам и некоторых близких к ней сходимостях.

В главе 4 рассматриваются вопросы единственности рядов (8) при сходимости по кубам и ρ-сходимости. Сначала сформулируем теорему единственности для квазимер, для простоты приводя теорему не в самой общей форме и ограничиваясь случаем $m = 2$.

Теорема 11. *Пусть на единичном квадрате* $[0,1]^2$ *заданы не более чем счетное множество* A *и квазимера* τ. *Предположим, что выполнены следующие условия*:

(I) *если* $\mathbf{x} \in (I_d)^2 \setminus A$, *то*

$$\lim \frac{\tau(\Delta)}{|\Delta|} = 0, \quad |\Delta| \to 0, \quad \Delta \text{ — \textit{двоичный квадрат}}, \quad \Delta \ni \mathbf{x};$$

(II) *если* $\mathbf{x} \in (Q_d \times I_d) \setminus A$ $(\mathbf{x} \in (I_d \times Q_d) \setminus A)$, *то для любой последовательности* $\{\Delta_{\mathbf{k}}^{(\boldsymbol{\sigma})}\}$, *определяемой формулами* (2) *и* (3), *выполнено условие*

$$\tau(\Delta_{k,k}^{(0,0)}) - \tau(\Delta_{k,k}^{(1,0)}) = \bar{\bar{\text{o}}}\left(\sqrt{|\Delta_{k,k}|}\right), \quad k \to \infty \tag{9}$$

$$\left(\tau(\Delta_{k,k}^{(0,0)}) - \tau(\Delta_{k,k}^{(0,1)}) = \bar{\bar{\text{o}}}\left(\sqrt{|\Delta_{k,k}|}\right), \quad k \to \infty \right); \tag{10}$$

(III) *квазимера* τ *является* Σ_2-*непрерывной в каждой точке* $\mathbf{x} \in [0,1]^m$.

Тогда $\tau(\Delta) = 0$ *для любого двоичного интервала* Δ.

Теперь сформулируем теорему единственности для рядов (8), также ограничиваясь для простоты случаем $m = 2$ и приводя теорему не в самой общей форме. Теорема 12 является следствием теоремы 14, приведенной ниже.

Теорема 12. *Пусть на единичном квадрате* $[0,1]^2$ *заданы не более чем счетное множество* A *и двойной ряд Хаара* (S), *причем*:

(I*) *если* $\mathbf{x} \in (I_d)^2 \setminus A$, *то ряд* (S) *сходится по двоичным кубам к нулю в точке* $\mathbf{x}$;

(II*) *если точка* $\mathbf{x} \in [0,1]^2 \setminus A$ *имеет ровно одну двоично-рациональную координату, то для прямоугольных частичных сумм* S_{N_1,N_2} *ряда* (S) *выполнено условие*

$$\begin{gathered} S_{N_1,N_2}(\mathbf{x}) = \bar{\bar{\text{o}}}_{\mathbf{x}}(\sqrt{N_1\,N_2}\,), \\ \min\{N_1, N_2\} \to \infty, \quad \min\{N_1/N_2, N_2/N_1\} \geq 1/2; \end{gathered} \tag{11}$$

(III*) *всюду на* $[0,1]^m$ *ряд* (S) *удовлетворяет при* $m = 2$ *условию* (4).

Тогда ряд (S) *является тождественно нулевым.*

Теоремы 11 и 12 являются дуальными в том смысле, что каждое условие в предположении теоремы 11 является переформулировкой соответствующего условия в предположении теоремы 12. Тесную связь между кратными рядами Хаара и квазимерами демонстрируют также следующие факты. Теорема 12 перестает быть верной, если в условии (11) во всех точках, имеющих ровно одну двоично-рациональную координату, заменить $'\bar{\bar{\text{o}}}'$ на $'\underline{\text{O}}'$. Двойственный факт состоит в том, что нельзя во всех точках, имеющих ровно одну двоично-рациональную координату, заменить $'\bar{\bar{\text{o}}}'$ на $'\underline{\text{O}}'$ в условиях (9) и (10) без того, чтобы теорема 11 перестала быть верной. Далее, теорема 12 перестает быть верной, если в условии (4) заменить $'\bar{\bar{\text{o}}}'$ на $'\underline{\text{O}}'$ даже в одной точке. Двойственный факт состоит в том, что нельзя даже в одной точке заменить Σ_2-непрерывность на Σ_2-ограниченность без того, чтобы теорема 11 перестала быть верной.

Еще одним важным моментом явилось построение интеграла, решающего проблему восстановления коэффициентов ρ-сходящихся кратных рядов Хаара. Этот интеграл был назван (P_d^*)-интегралом. Конструкция этого интеграла достаточно сложна, поэтому приведем ее в несколько упрощенной формулировке и лишь для случая $m = 2$.

Определение 13. Пусть конечная функция f определена, по меньшей мере, на множестве $(I_d)^2 \setminus A$, где A — некоторое не более чем счетное множество. Назовем функцию f (P_d^*)-*интегрируемой*, если для любого $\varepsilon > 0$ найдутся квазимеры F_1 и F_2, обладающие следующими свойствами:

(A) для всех $\mathbf{x} \in (I_d)^2 \setminus A$

$$\underline{\lim}\, \frac{F_1(\Delta)}{|\Delta|} \geq f(\mathbf{x}) \geq \overline{\lim}\, \frac{F_2(\Delta)}{|\Delta|}, \quad |\Delta| \to 0, \quad \Delta \text{ — двоичный куб}, \quad \Delta \ni \mathbf{x};$$

(B) если $\mathbf{x} \in (Q_d \times I_d) \setminus A$ ($\mathbf{x} \in (I_d \times Q_d) \setminus A$), то для любой последовательности $\{\Delta_{\mathbf{k}}^{(\boldsymbol{\sigma})}\}$, определяемой формулами (2) и (3), а также для каждого ($i = 1, 2$), выполнено условие (9) (соответственно, (10));

(C) квазимеры F_1 и F_2 являются Σ_2-непрерывными всюду на $[0,1]^2$;

(D) $F_1([0,1]^2) - F_2([0,1]^2) < \varepsilon$.

Значение (P_d^*)-интеграла от функции f по любому двоичному интервалу Δ определяется формулой, аналогичной (7). $\boxtimes$

Теорема 14. *Пусть задано не более чем счетное множество $A \subset [0,1]^m$, а кратный ряд Хаара (S) на кубе $[0,1]^m$ с прямоугольными частичными суммами $S_{N_1,\dots,N_m}$ обладает следующими свойствами:*

1) *если $\mathbf{x} \in (I_d)^m \setminus A$, то существует величина $C_{\mathbf{x}} > 0$ такая, что*

$$|S_{2^k,\dots,2^k}(\mathbf{x})| \le C_{\mathbf{x}}, \quad k = 0, 1, \dots;$$

2) *если точка $\mathbf{x} \in [0,1]^m \setminus A$ имеет ровно $s \in \{1, \dots, m-1\}$ двоично-рациональных координат, то выполнено условие*

$$S_{N_1,\dots,N_m}(\mathbf{x}) = \bar{\bar{\mathrm{o}}}_{\mathbf{x}}((N_1 \cdot \ldots \cdot N_m)^{s/m}), \quad \min_i\{N_i\} \to \infty, \quad \min_{i,j}\{N_i/N_j\} \ge 1/2;$$

3) *всюду на $[0,1]^m$ для ряда (S) имеет место условие* (4).

Тогда ряд (S) почти всюду на $(I_d)^m \setminus A$ сходится по двоичным кубам к конечной функции f, являющейся (P_d^*)-интегрируемой, и ряд (S) является (P_d^*)-рядом Фурье–Хаара функции f (подразумевается, что в точках множества $(I_d)^m \setminus A$, в которых она не определена, она доопределяется любыми конечными значениями).

Следствие 15. *Если $\rho \in (0, 1/2]$, то пустое множество является U-множеством для кратных рядов Хаара при ρ-сходимости.*

Насколько условие $\rho \in (0, 1/2]$ необходимо в следствии 15, подробно изучено в двумерном случае. Оказывается, при значениях ρ, близких к единице, то есть при сходимостях, близких к сходимости по кубам, аналоги следствия 15 не верны, что означает в таких случаях отсутствие единственности. Следующая теорема указывает границу существования единственности двойных рядов Хаара на единичном квадрате $[0,1]^2$ при ρ-сходимостях.

Теорема 16. 1) *Для любого $\rho \in (\sqrt{2}/2, 1]$ существует нетривиальный двойной ряд Хаара на единичном квадрате $[0,1]^2$, всюду ρ-сходящийся к нулю*; 2) *если $\rho \in (0, \sqrt{2}/2)$, то пустое множество является U-множеством для двойных рядов Хаара при ρ-сходимости.*

Следствие 17. *Существует нетривиальный двойной ряд Хаара на единичном квадрате* $[0,1]^2$*, всюду сходящийся к нулю по кубам.*

При этом утверждение 1 теоремы 16 и следствие 17 не переносятся на кратные ряды Хаара на группе G^m.

Кроме (P_d^*)-интеграла, в главе 4 в двумерном случае построено семейство (P_d^ρ)-интегралов ($\rho \in (0, \sqrt{2}/2)$), каждый из которых при соответствующем ρ восстанавливает коэффициенты ρ-сходящихся **всюду** двойных рядов Хаара. При $\rho \in (0, 1/2]$ (P_d^ρ)-интеграл является сужением (P_d^*)-интеграла. Конструкции этих интегралов достоточно схожи. (P_d^ρ)-интеграл привлекает интерес тем, что он не покрывает интеграл Лебега. Этот факт является нехарактéрным для интегралов, решающих проблему восстановления коэффициентов ортогональных рядов. Структура (P_d^ρ)-интеграла в значительной мере увязана со структурой рядов Хаара и этот интеграл "не берет" некоторые "лишние" функции, которые нельзя изменить на множестве нулевой меры так, чтобы получившиеся функции были представимы в виде суммы всюду сходящегося двойного ряда Хаара.

В главе 5 изучаются свойства многомерных обобщенных интегралов. В случае $m = 2$ (P_d^*)-интеграл, построенный в главе 4 для решения проблемы восстановления коэффициентов m-кратных рядов Хаара, сравнивается с достаточно общими интегралами хенстоковского типа на плоскости, заведомо покрывающими не только интеграл Лебега, но и нерегулярный интеграл Перрона.

Теорема 18. 1) *В случае* $m = 2$ (P_d^*)*-интеграл не противоречит двоичному* $1/2$*-регулярному интегралу Хенстока на плоскости* ($(H_{1/2,d})$*-интегралу*); 2) *в случае* $m = 2$ (P_d^*)*-интеграл противоречит двоичному* 1*-регулярному (квадратному) интегралу Хенстока на плоскости* ($(H_{1,d})$*-интегралу*).

Следствием первой части теоремы 18 служит следующий результат, являющийся теоремой типа дю Буа-Реймона для двойных рядов Хаара. Этот результат является далеко идущим обобщением, правда, только для двумерного случая, известных теорем В. А. Скворцова.

Теорема 19. *Пусть задано не более чем счетное множество* $A \subset [0,1]^2$ *и двойной ряд Хаара* (S)*. Предположим, что ряд* (S) *всюду на* $[0,1]^2$ *удовлетворяет (при* $m = 2$*) условию (4), во всех точках множества* $(I_d)^2 \setminus A$ *данный ряд сходится по кубам к конечной функции* f*, интегрируемой в* *смысле* $(H_{1/2,d})$*-интеграла, а во всех точках* $\mathbf{x} \in [0,1]^2 \setminus A$*, имеющих ровно одну двоично-рациональную координату, для прямоугольных частичных сумм* S_{N_1,N_2} *ряда* (S) *выполняется условие* (11). *Тогда* (S) *является рядом Фурье–Хаара функции* f *относительно* $(H_{1/2,d})$*-интеграла.*

Теорема 19 неусиляема ни в одном из следующих направлений. Во-первых, эта теорема перестает быть верной, если одновременно во всех точках $\mathbf{x} \in [0,1]^m \setminus A$, имеющих ровно одну двоично-рациональную координату, заменить в формуле (11) $\bar{\bar{o}}$ на $\underline{O}$. Во-вторых, даже в одной точке $\mathbf{x} \in [0,1]^2$ нельзя заменить в условии (4) $\bar{\bar{o}}$ на $\underline{O}$. В-третьих, теорема 19 перестает быть верной, если в условии (11) заменить 1/2 на 1. Наконец, $(H_{1/2,d})$-интеграл в теореме 19 нельзя заменить на $(H_{1,d})$-интеграл, даже если ряд (S) 1/2-сходится всюду. Последний факт следует из теоремы 20, являющейся двойственной ко второй части теоремы 18.

Теорема 20. *Существует двойной ряд Хаара на единичном квадрате* $[0,1]^2$*, всюду* ρ*-сходящийся к конечной* $(H_{1,d})$*-интегрируемой функции, но не являющийся рядом Фурье–Хаара этой функции относительно* $(H_{1,d})$*-интеграла.*

В главе 6 изучаются множества относительной единственности для одномерных и кратных рядов Хаара и Уолша. Рассматриваются классы таких рядов, прямоугольные частичные суммы которых имеют не более чем степенной рост. Для кратных рядов Хаара находится полное описание таких множеств. В качестве следствия получено почти полное, а для некоторых классов множеств полное, описание класса множеств единственности одномерных рядов Хаара, удовлетворяющих условию Вэйда. Помимо этого рассматривается более общая задача восстановления коэффициентов кратных рядов Хаара и Уолша, сходящихся вне множеств относительной единственности. Приведем основные результаты.

Пусть $\Theta_{\alpha,\rho}$ означает множество кратных рядов Уолша (Хаара) на группе G^m, ρ- регулярные прямоугольные частичные суммы $S_{N_1,\dots,N_m}$ которых имеют не более чем $(1-\alpha)$-степенной рост, то есть удовлетворяют условию

$$|S_{N_1,\dots,N_m}(\mathbf{t})| \le C(N_1 \cdot \ldots \cdot N_m)^{1-\alpha}, \quad \min_{i,j}\{N_i/N_j\} \ge \rho, \\ \text{величина } C \text{ не зависит от } N_1,\dots,N_m \in \mathbb{Z}_+ \text{ и } \mathbf{t} \in G^m. \tag{12}$$

Символом $U_{W,m,\rho}(\alpha)$ $(U_{H,m,\rho}(\alpha))$ обозначим класс U-множеств для рядов из класса $\Theta_{\alpha,\rho}$ при ρ-сходимости. В случае $0 < \alpha < 1$ (а именно этот случай представляется наиболее сложным и интересным) найдено достаточное условие (для кратных рядов Уолша) и критерий (для кратных рядов Хаара) принадлежности заданного множества классу $U_{W,m,\rho}(\alpha)$ или $U_{H,m,\rho}(\alpha)$. И снова оказалось, что вопросы единственности для кратных рядов Хаара увязаны с некоторыми свойствами квазимер. А именно, нахождение необходимого условия принадлежности заданного множества классу $U_{H,m,\rho}(\alpha)$ свелось к существованию нетривиальной квазимеры, сосредоточенной на некотором замкнутом подмножестве заданного множества и имеющей необходимый порядок гладкости. Обнаружена связь между поведением частичных сумм кратных рядов Хаара и аналогами для квазимер известных в теории размерности прямого и обратного *принципов распределения масс* (см., напр.,[27]). Найденные закономерности позволили получить, в частности, следующие результаты.

Теорема 21. *Пусть заданы* $\alpha \in (0,1)$ *и* $\rho \in (0,1]$. *Тогда*:

1) *если множество* $E \subset G^m$ *не содержит совершенных подмножеств, хаусдорфова* αm*-мера которых положительна, то* $E \in U_{W,m,\rho}(\alpha)$;

2) $E \in U_{H,m,\rho}(\alpha)$ *тогда и только тогда, когда множество* E *не содержит совершенных подмножеств, хаусдорфова* αm*-мера которых положительна*;

3) ***замкнутое*** *множество* $X \in U_{H,m,\rho}(\alpha)$ *в том и только том случае, когда хаусдорфова* αm*-мера множества* X *равна нулю.*

Отметим, что, в силу теоремы 7, теорема 21 в ее части, касающейся кратных рядов Уолша, не может быть обратимой. Интерес представляют также следующие результаты.

Теорема 22. *Пусть выбраны* $\alpha \in (0,1)$ *и* $\rho \in (0,1]$. *Тогда объединение не более чем счетного числа замкнутых множеств из класса* $U_{H,m,\rho}(\alpha)$ *также есть множество из этого класса.*

Теорема 23. *Выберем произвольные* $\alpha \in (0,1)$, $\rho \in (0,1]$ *и множество* $E \notin U_{H,m,\rho}(\alpha)$. *Если* (S) *— нетривиальный* m*-кратный ряд Хаара, реализующий* M*-множество* E, *то есть* (S) ρ*-сходится к нулю на множестве* $G^m \setminus E$ *и удовлетворяет условию* (12), *то его можно выбрать таким, что все его частичные суммы будут неотрицательными.*

---

[27] K. Falconer, *Fractal Geometry: Mathematical Foundations and Applications*, John Wiley&Sons, Chichester–New York–Brisbane–Toronto–Singapore, 1990.

Теорема 24. *Для любых α_1, $\alpha_2 \in (0,1)$ $(\alpha_1 \neq \alpha_2)$ и $\rho \in (0,1]$ $U_{H,m,\rho}(\alpha_1) \neq U_{H,m,\rho}(\alpha_2)$.*

Теорема 22 является теоремой типа Бари для кратных рядов Хаара. Теорема 23 является аналогом для кратных рядов Хаара теоремы Шиппа, а теорема 24 выдержана в духе работ Р. И. Овсепяна, А. В. Бахшецяна и Г. Г. Геворкяна.

Получены также некоторые новые результаты о множествах относительной единственности для одномерных рядов Хаара. Пусть Θ_p — класс рядов Хаара, коэффициенты a_n которых удовлетворяют следующему условию Вэйда:

$$a_n = \bar{\bar{\text{o}}}\,(n^{p-1/2}), \quad n \to \infty.$$

Отметим, что при $p = 1$ условие Вэйда превращается в равномерный аналог условия Арутюняна–Талаляна. Символом $U(\Theta_p)$ обозначим семейство U-множеств для рядов из класса Θ_p. Из теоремы 21 можно легко вывести близкое к критерию условие принадлежности семейству $U(\Theta_p)$. Мы не будем этого делать, а укажем класс множеств, для которых можно точно сказать, при каких p они принадлежат семейству $U(\Theta_p)$.

Теорема 25. *Пусть выбрано замкнутое множество $X \subset [0,1]$. Предположим, что для некоторого $p \in (0,1)$ хаусдорфова α-мера множества X бесконечна при $\alpha < 1-p$ и конечна при $\alpha \geq 1-p$. Тогда $X \in U(\Theta_q)$ для всех $q \leq p$ и $X \notin U(\Theta_q)$ для всех $q > p$.*

Следствие 26. *Если F_ζ — симметрическое совершенное множество с постоянным отношением ζ, то $F_\zeta \in U(\Theta_q)$ тогда и только тогда, когда*

$$q \leq 1 + \frac{\ln 2}{\ln \zeta}.$$

В частности, канторовское троичное множество $F_{1/3} \in U(\Theta_q)$ тогда и только тогда, когда

$$q \leq 1 - \frac{\ln 2}{\ln 3}\,.$$

Сравнив результаты для одномерных и кратных рядов Хаара (например, теорему 21 в ее части, касающейся кратных рядов Хаара) с результатами для одномерных и кратных рядов Уолша, получим следующую интересную картину. Для рядов Хаара в терминах хаусдорфовых мер получен **критерий** принадлежности заданного множества классу множеств единственности рядов, удовлетворяющих условию (12). В аналогичном случае для рядов Уолша найдено лишь **достаточное условие** подобной принадлежности. При этом, необходимое условие и не может быть получено в терминах хаусдорфовых мер в силу теоремы 7. Кроме того, отметим следующий очень важный, с нашей точки зрения, факт. Принадлежность множества рассмотренным выше классам $U(\Theta)$ для рядов Хаара (и одномерным, и кратным) не зависит (!) от арифметической структуры этих множеств, чего нет в случае рядов Уолша или тригонометрических. Подобное поведение рядов Хаара объясняется, по-видимому, некоторой "локальностью" системы Хаара, в частности, тем свойством, что диаметр носителя функций Хаара χ_n стремится к нулю при $n \to \infty$. Подобная "локальность" приводит к тому, что поведение частичных сумм ряда Хаара в одной точке не слишком сильно зависит от такого поведения в другой точке. В случае же рядов Уолша или тригонометрических носители соответствующих функций заполняют всю область определения. В связи с этим зависимость между поведением частичных сумм ряда в двух разных точках должна быть более сильной. Это, по всей видимости, и приводит к тому, что описание U-множеств для таких рядов требует привлечения не только метрических, но и арифметических характеристик множеств.

Была также рассмотрена более общая задача восстановления коэффициентов кратных рядов Хаара и Уолша, сходящихся вне множеств относительной единственности. Для каждого $\alpha \in (0,1)$ и семейства

$$\mathbf{K} = \{\{k_j(\mathbf{t})\} : \mathbf{t} \in G^m\} \tag{13}$$

возрастающих последовательностей $\{k_j(\mathbf{t})\}$ натуральных чисел построен интеграл двоичного перроновского типа, названный $(PHW^{\alpha}(\mathbf{K}))$-интегралом, относительно которого верна

Теорема 27. *Пусть выбраны $\alpha \in (0,1)$, $\rho \in (0,1]$, кратный ряд Хаара или Уолша (S) на группе G^m, а также семейство $\mathbf{K}$ возрастающих последовательностей натуральных чисел, определяемое формулой* (13). *Предположим, что выполнены следующие условия*:

1) *для всех $\mathbf{t} \in G^m$, кроме, быть может, точек из некоторого множества нулевой хаусдорфовой αm-меры, подпоследовательность $S_{2^{k_j(\mathbf{t})}}(\mathbf{t})$ кубических частичных сумм ряда (S) стремится при $j \to \infty$ к конечному значению $f(\mathbf{t})$;*

2) *всюду на G^m прямоугольные частичные суммы $S_{\mathbf{N}}(\mathbf{t})$ ряда (S) в точке $\mathbf{t}$ удовлетворяют условию* (12).

Тогда функция f является $(PHW^{\alpha}(\mathbf{K}))$-интегрируемой и ряд (S) является $(PHW^{\alpha}(\mathbf{K}))$-рядом Фурье–Хаара или, соответственно, Фурье–Уолша функции f.

В главе 7 мы несколько отступаем от основной линии для того, чтобы еще раз указать на значительные различия между поведением кратных рядов, сходящихся по кубам или по ограниченным прямоугольникам, от рядов, сходящихся по (неограниченным) прямоугольникам. В этой главе представлены некоторые результаты, касающиеся поведения коэффициентов сходящихся кратных рядов Хаара и Уолша. Показано, что поведение коэффициентов сходящихся по кубам кратных рядов Уолша может сильно отличаться от поведения коэффициентов сходящихся по прямоугольникам таких рядов. С другой стороны, если рассматривать сходимость по кубам, то поведение коэффициентов кратных рядов Уолша сильно отличается и от поведения коэффициентов кратных тригонометрических рядов. Сходимость кратных рядов Уолша **по кубам** к конечной функции даже **всюду** в определенном смысле не гарантирует никаких ограничений на поведение их коэффициентов с номерами, взятыми из достаточно массивного множества. В частности, показано, что двойной ряд Уолша может всюду сходиться по квадратам, а его коэффициенты с номерами из некоторого множества при этом могут расти быстрее любой наперед заданной последовательности. Для кратных тригонометрических рядов подобное невозможно в силу теоремы Коэна. Но некоторые подпоследовательности коэффициентов сходящихся по кубам к конечной функции на множестве определенной меры кратных рядов Уолша, как доказано в главе 7, все-таки обязаны стремиться к нулю.

Также мы рассмотрим случай сходящихся по кубам или по ограниченным прямоугольникам кратных рядов Хаара. И здесь ситуация будет отличаться как от той, что имеет место для сходящихся по (неограниченным) прямоугольникам кратных рядов Хаара, так и от той, что имеет место для сходящихся по кубам кратных тригонометрических рядов. Более того, такое различие может быть уже тогда, когда кратный ряд Хаара сходится по прямоугольникам всюду, кроме всего одной точки $\mathbf{t}_0 \in G^m$, в которой он сходится по кубам или в смысле ρ-сходимости.

Приведем некоторые результаты главы 7.

Теорема 28. *Рассмотрим множества*

$$T_k = \{(n_1, n_2) \in \mathbb{N}^2 : \ 2^k \le n_1, \, n_2 \le 2^{k+1} - 1\}, \quad k = 0, 1, \ldots; \quad T = \bigcup_{k=0}^{\infty} T_k.$$

Пусть заданы двойная последовательность $\{B_{n_1,n_2}\}$ не равных нулю действительных чисел, стремящаяся к ∞ последовательность $\{C_k\}$ положительных чисел, а также числа β_1 и β_2 такие, что $0 < \beta_1 < \beta_2 < 1$. Тогда существует двойной ряд Уолша, всюду на G^2 сходящийся по квадратам к конечной сумме, для коэффициентов b_{n_1,n_2} которого выполнены следующие равенства:

$$\lim_{\substack{|||(n_1,n_2)|||\to\infty,\\ (n_1,n_2)\notin T}} \frac{b_{n_1,n_2}}{B_{n_1,n_2}} = \infty; \qquad \overline{\lim_{\substack{2^k \le n_1, n_2 \le 2^k + C_k,\\ k\to\infty}}} \frac{|b_{n_1,n_2}|}{|B_{n_1,n_2}|} = +\infty;$$

$$\overline{\lim_{\substack{2^k(1+\beta_1) \le n_1, n_2 \le 2^k(1+\beta_2),\\ k\to\infty}}} \frac{|b_{n_1,n_2}|}{|B_{n_1,n_2}|} = +\infty.$$

Теорема 29. *Пусть заданы $s \in \mathbb{Z}_+$, борелевское множество $E \subset G^m$, для которого выполнено неравенство*

$$\mu(E) > 1 - \frac{1}{2^{m-1+ms}},$$

а также кратный ряд Уолша (S), всюду сходящийся по кубам на множестве E. Тогда для коэффициентов $b_{n_1,\ldots,n_m}$ ряда (S) справедливо равенство

$$\lim_{k\to\infty} \max_{2^k \le n_1,\ldots,n_m \le 2^k + 2^s - 1} |b_{n_1,\ldots,n_m}| = 0.$$

Теорема 30. *Пусть заданы произвольные $\rho \in (0, 1]$, $m \in \{2, 3, \ldots\}$, m-мерная последовательность $\{A_{n_1,\ldots,n_m}\}$ не равных нулю действительных чисел и точка $\mathbf{t}_0 \in G^m$. Тогда существует m-кратный ряд Хаара, ρ-сходящийся к конечной сумме в точке $\mathbf{t}_0$, сходящийся по прямоугольникам, повторно и по сферам к конечной сумме во всех точках множества $G^m \setminus \{\mathbf{t}_0\}$, для общего члена $a_{n_1,\ldots,n_m}\chi_{n_1,\ldots,n_m}$ которого выполнены условия*

$$\overline{\lim_{\|(n_1,\ldots,n_m)\|\to\infty}} \frac{|a_{n_1,\ldots,n_m}|}{|A_{n_1,\ldots,n_m}|} = \infty \quad \text{и} \quad \overline{\lim_{\|(n_1,\ldots,n_m)\|\to\infty}} \frac{|a_{n_1,\ldots,n_m}\chi_{n_1,\ldots,n_m}(\mathbf{t}_0)|}{|A_{n_1,\ldots,n_m}|} = \infty.$$

Возвращаясь к теореме 28, обратим внимание на еще одно различие между сходящимися по квадратам и по прямоугольникам двойными рядами Уолша. В работе Ш.Т. Тетунашвили[6] для кратных тригонометрических рядов доказан следующий результат. Приведем его в сильно упрощенной формулировке и в двумерном случае. Пусть $\mathcal{U}$ означает класс U-множеств для двойных тригонометрических рядов при сходимости по прямоугольникам, построенный в работе[6] (см. теорему 2 из этой работы), и включающий, в частности, некоторые континуальные U-множества меры нуль, а также неизмеримые U-множества. Тогда, если конечная функция $f(t^1, t^2)$, определенная на множестве $[-\pi, \pi] \setminus A$, где $A \in \mathcal{U}$, измерима по переменной t^1 при любом фиксированном $t^2 \in [-\pi, \pi]$, то из сходимости по прямоугольникам к функции f на множестве $[-\pi, \pi] \setminus A$ двойного тригонометрического ряда вытекает его повторная сходимость к функции f на том же множестве. Для двойных рядов Уолша аналогичный результат вытекает из результатов работы Л. Д. Гоголадзе[9].

Что касается сходимости по квадратам, то из теоремы 28 вытекает, что даже всюду сходящийся таким образом двойной ряд Уолша может не сходиться повторно ни в одной точке. Действительно, если последовательность $\{B_{n_1,n_2}\}$, фигурирующая в формулировке теоремы 28, отделена от нуля, то ряд (S) из утверждения этой теоремы не может сходиться повторно, так как его общий член не стремится к нулю по одной переменной при любом фиксированном значении другой.

БЛАГОДАРНОСТИ

Выражаю глубокую благодарность своему Учителю, профессору кафедры теории функций и функционального анализа МГУ имени М. В. Ломоносова Валентину Анатольевичу Скворцову за внимание к работе и многолетнее плодотворное сотрудничество. Хочу выразить признательность руководителям семинаров по теории функций на Механико–математическом факультете МГУ имени М. В. Ломоносова член-корр. РАН Б. С. Кашину, профессорам М. И. Дьяченко, Б. И. Голубову, С. В. Конягину, М. К. Потапову, Т. П. Лукашенко, а также всем участникам этих семинаров за творческую атмосферу и обсуждение тем, затронутых в диссертации. Считаю своим долгом вспомнить об академике П. Л. Ульянове (1928–2006), чье внимание и поддержка сыграли важную роль в творческой судьбе автора. Выражаю признательность Татьяне Своровска за ряд замечаний и советов, значительно улучшивших текст работы. Благодарю свою семью за понимание и поддержку.

Работы автора по теме диссертации

[1] М. Г. Плотников, "Об интеграле Моэна и его применении к рядам Хаара", *Вестник Московского Университета. Математика. Механика*, 2000, № 4, 63–66.

[2] М. Г. Плотников, "О единственности всюду сходящихся кратных рядов Хаара", *Вестник Московского Университета. Математика. Механика*, 2001, № 1, 23–28.

[3] М. Г. Плотников, "О нарушении единственности для двумерных рядов Хаара", *Вестник Московского Университета. Математика. Механика*, 2003, № 4, 20–24.

[4] М. Г. Плотников, "Об одном интеграле перроновского типа", *Вестник Московского Университета. Математика. Механика*, 2004, № 2, 12–15.

[5] М. Г. Плотников, "Вопросы единственности для некоторых классов рядов Хаара", *Математические заметки*, **75**:3 (2004), 392–404.

[6] М. Г. Плотников, "Вопросы единственности для кратных рядов Хаара", *Математический сборник*, **196**:2 (2005), 97–116.

[7] М. Г. Плотников, "О восстановлении коэффициентов двумерных рядов Хаара", *Известия вузов. Математика*, 2005, № 2, 45–53.

[8] М. Г. Плотников, "О границе существования единственности для двумерных рядов Хаара", *Известия вузов. Математика*, 2006, № 7, 57–64.

[9] М. Г. Плотников, "О кратных рядах Уолша, сходящихся по кубам", *Известия РАН. Серия математическая*, **71**:1 (2007), 61–78.

[10] М. Г. Плотников, "О множествах единственности для кратных рядов Уолша", *Математические заметки*, **81**:2 (2007), 265–279.

[11] М. Г. Плотников, "Некоторые свойства многомерных обобщенных интегралов и теоремы типа дю Буа-Реймона для двойных рядов Хаара", *Математический сборник*, **198**:7 (2007), 63–90.

[12] M. G. Plotnikov, "Recovery of the coefficients of multiple Haar and Walsh series", *Real Analysis Exchange*, **33**:2 (2008), 291–308.

[13] M. G. Plotnikov, "Quasi-measures and Walsh Series", *Facta Universitatis. Series Electronics & Energetics*, **21**:3 (2008), 267–273.

[14] М. Г. Плотников, "Об интегралах обобщенного римановского типа на плоскости и об одном примере двойного ряда Хаара", *Математические заметки*, **86**:4 (2009), 601–611.

[15] М. Г. Плотников, "Квазимеры, хаусдорфовы p-меры и ряды Уолша и Хаара", *Известия РАН. Серия математическая*, **74**:4 (2010), 157–188.

[16] М. Г. Плотников, "Квазимеры на группе G^m, множества Дирихле и проблемы единственности для кратных рядов Уолша", *Математический сборник*, **201**:12 (2010), 131–156.