

На правах рукописи

РОМАНОВ Максим Николаевич

**ДВИЖЕНИЯ ЖИДКОСТИ МЕЖДУ ВРАЩАЮЩИМИСЯ
ПРОНИЦАЕМЫМИ ЦИЛИНДРАМИ**

01.02.05 — механика жидкости, газа и плазмы

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Ростов-на-Дону – 2011

Работа выполнена на кафедре вычислительной математики и математической физики факультета математики, механики и компьютерных наук Южного федерального университета, г. Ростов-на-Дону.

Научный руководитель: кандидат физико-математических наук,
доцент В. В. Колесов

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук
Н. В. Никитин

доктор физико-математических наук,
Е. А. Демехин

Ведущая организация: Пермский государственный университет

Защита состоится 21 октября 2011 г. в 15 часов на заседании диссертационного совета Д.501.001.89 при Московском государственном университете им. М. В. Ломоносова по адресу: 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, Главное здание МГУ, аудитория 16-10.

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке механико-математического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова.

Автореферат разослан «___» _____ 2011 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета Д.501.001.89,
доктор физико-математических наук



А. Н. Осипцов

1. Общая характеристика работы

В диссертации исследуются течения вязкой несжимаемой жидкости между двумя бесконечными вращающимися проницаемыми концентрическими цилиндрами при наличии радиального потока жидкости, направленного от одного цилиндра к другому. Рассматривается случай, когда внешние массовые силы отсутствуют и количество жидкости, поступающей в полость между цилиндрами через поверхность одного цилиндра, равно количеству жидкости, которая отводится через поверхность другого цилиндра.

Основной режим движения жидкости в рассматриваемой задаче является двумерным: он представляет собой стационарное вращательно-симметричное течение с нулевой аксиальной компонентой вектора скорости. Ему соответствует точное решение уравнений Навье-Стокса, которое существует при любых значениях параметров задачи.

В экспериментах, однако, данное течение реализуется далеко не всегда: при изменении параметров задачи (например, при увеличении скорости вращения внутреннего цилиндра) оно может потерять устойчивость и смениться вторичным режимом. При этом возможны два типа потери устойчивости основного стационарного течения. В результате монотонной вращательно-симметричной неустойчивости оно сменяется вторичным стационарным течением, а в результате колебательной трехмерной неустойчивости — автоколебательным режимом с бегущими в азимутальном направлении волнами.

Целью данной работы является исследование режимов, которые возникают вблизи точки пересечения нейтральных кривых, отвечающих этим двум типам потери устойчивости основного режима.

Актуальность работы. Помимо общетеоретического интереса, изучение течений вязкой жидкости между вращающимися проницаемыми цилиндрами привлекает внимание исследователей прежде всего в связи с возможностью использования его результатов в технических устройствах, содержащих динамические фильтры. Такие фильтры обычно состоят из вращающегося пористого внутреннего цилиндра и неподвижного или тоже вращающегося пористого внешнего цилиндра. Фильтрат обычно подается через проницаемую стенку внутреннего цилиндра и отводится через внешний цилиндр. Такие устройства используются, например, для отделения примесей в отработанном машинном масле, для расщепления крови и выделения из нее плазмы, для противодействия обрастанию мембран в системах очистки питьевой воды посредством обратного осмоса, в био-

технологиях и т. п.

Необходимо отметить также, что рассматриваемая задача представляет собой особенно удобный объект для численных исследований благодаря тому, что переходы к достаточно сложным режимам движения жидкости возникают здесь при довольно малых числах Рейнольдса.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и двух приложений. Объем диссертации — 123 страницы, включая 59 рисунков, 16 таблиц и список литературы из 161 работы. В главе 1 исследована устойчивость основного режима движения жидкости в линейной постановке. Во второй главе исследована устойчивость основного режима в нелинейной постановке. В главе 3 приведены результаты численного анализа режимов, возникающих после потери устойчивости основного стационарного течения. В заключении кратко суммированы результаты проделанной работы. В приложениях приведены таблицы критических значений чисел Рейнольдса, графики нейтральных кривых и рассчитанные коэффициенты амплитудной системы.

Научная новизна. В диссертации впервые подробно исследованы вторичные стационарные, периодические и квазипериодические течения жидкости между вращающимися проницаемыми цилиндрами, возникающие в результате потери устойчивости основного стационарного течения. Построены бифуркационные диаграммы, показывающие эволюцию и бифуркации этих режимов. Обнаружены хаотические движения жидкости, возникающие в результате каскада удвоений периода квазипериодических течений.

Используемый математический аппарат. Для вывода формул коэффициентов амплитудной системы применялась теория бифуркаций коразмерности два, развитая в работах В. И. Юдовича, Ж. Йосса и П. Шосса. Вторичные стационарные, периодические и квазипериодические течения жидкости найдены путем аналитического и численного анализа комплексной системы амплитудных уравнений. Для расчета трехчастотных квазипериодических течений жидкости (им соответствуют циклы моторной подсистемы) на начальном этапе применялся метод установления с последующим уточнением периода течения и координат точки на течении методом отыскания неподвижной точки эволюционного оператора или отображения Пуанкаре. Устойчивость трехчастотных квазипериодических течений и их бифуркации исследовались путем вычисления мультипликаторов Флоке.

Научная достоверность результатов обусловлена корректностью

математической постановки задачи, строгостью математических методов, применяемых в работе. Все вычисления, выполненные в работе, проводились с контролируемой точностью.

Научная и практическая значимость работы. Полученные результаты являются частью общего исследования задач о движениях вязкой жидкости для систем с цилиндрическими симметриями. Практическая значимость работы заключается в возможности использования результатов в технических устройствах, в частности, содержащих динамические фильтры.

Результаты, полученные в работе, могут быть использованы в НИИ механики МГУ, в Институте космических исследований РАН (г. Москва), в Институте гидродинамики и Институте теплофизики СО РАН (г. Новосибирск), в Пермском государственном университете, в Тбилисском математическом институте АН Грузии, в НИИ механики и прикладной математики (г. Ростов-на-Дону), в Южном федеральном университете.

Апробация. Основные результаты диссертации докладывались и обсуждались на научных семинарах кафедры вычислительной математики и математической физики ЮФУ, на семинаре по механике сплошных сред в Институте механики МГУ (2011), на международных конференциях «Нелинейные задачи теории гидродинамической устойчивости и турбулентность» (Москва, 2008, 2010) и на международных конференциях «Современные проблемы механики сплошной среды» (Ростов н/Д, 2009, 2010).

Публикации и личный вклад автора. По теме диссертации опубликовано 9 печатных работ [1–9], из них 3 статьи [1–3] в изданиях, входящих в перечень ведущих научных журналов и изданий, выпускаемых в Российской Федерации, утвержденных ВАК.

В совместных публикациях [1–8] постановка задачи и разработка алгоритмов расчета коэффициентов амплитудной системы и численного исследования устойчивости и бифуркаций решений моторной подсистемы выполнена В. В. Колесовым. Реализация этих алгоритмов, проведение компьютерных вычислений, расчет нейтральных кривых и вывод формул для расчета коэффициентов амплитудной системы выполнены автором диссертации.

Представленные в диссертации исследования поддерживались грантами: Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 11-05-01138, и Министерства образования и науки РФ в рамках Федеральной целевой программы «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 гг., гос. контракт № 14.740.11.0877.

2. Содержание работы

Во введении дан краткий обзор работ по теме диссертации и обзор современного состояния проблемы, изложена структура и основные положения диссертации.

В первой главе исследуется устойчивость основного режима движения жидкости в линейной постановке задачи.

В § 1.1 выписаны уравнения движения вязкой жидкости в цилиндрических координатах и краевые условия. Они допускают точное решение, представляющее собой основное стационарное вращательно-симметричное течение с нулевой аксиальной компонентой вектора скорости $\mathbf{V}_0$ и давления Π_0

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_0 = \{v_{0r}, v_{0\varphi}, 0\}, \quad \Pi_0 = \int_1^r \left(\frac{v_{0\varphi}^2}{s} + \frac{\chi_0^2}{s^3} \right) ds + \text{const}, \\ v_{0r} = \frac{\chi_0}{r}, \quad v_{0\varphi} = \begin{cases} ar^{\chi+1} + \frac{b}{r}, & \chi \neq -2, \\ \frac{a_1 \ln r + 1}{r}, & \chi = -2, \end{cases} \\ a = \frac{\Omega R^2 - 1}{R^{\chi+2} - 1}, \quad b = 1 - a, \quad a_1 = \frac{\Omega R^2 - 1}{\ln R}, \quad \chi_0 = \frac{\chi}{\lambda}. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь $\lambda = \Omega_1 R_1^2 / \nu$ — число Рейнольдса, ν — коэффициент кинематической вязкости, $\chi_0 = S / \Omega_1 R_1^2$ — безразмерный коэффициент, характеризующий поток жидкости сквозь цилиндры, S — размерный коэффициент, определяющий интенсивность поступления жидкости через поверхность одного цилиндра и вытекания ее через поверхность другого цилиндра, $\Omega = \Omega_2 / \Omega_1$ — отношение угловых скоростей вращения цилиндров, $R = R_2 / R_1$ — отношение радиусов цилиндров ($R_1 < R_2$), $\chi = S / \nu$ — радиальное число Рейнольдса. При $\chi > 0$ радиальный поток жидкости направлен от внутреннего цилиндра к внешнему, а при $\chi < 0$ — наоборот.

Далее в § 1.2 приводится уравнение линий тока основного режима (1) и дается описание его траекторий движения частиц жидкости.

Наличие даже небольшого радиального потока жидкости ($\chi \neq 0$) приводит к тому, что радиальная компонента вектора скорости становится ненулевой. Поэтому частицы жидкости перемещаются не только в азимутальном, но и в радиальном направлении (рис. 1).

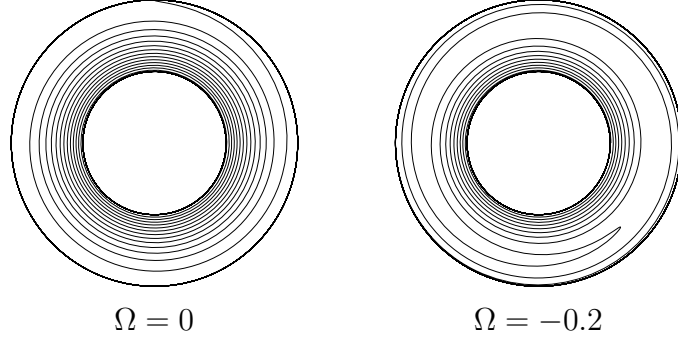


Рис. 1. Линии тока основного стационарного течения
при $R = 2$, $\chi = 0.05$, $\lambda = 10$.

В § 1.3 сформулирована постановка задачи устойчивости. С ростом числа Рейнольдса λ основной режим может потерять устойчивость двумя способами. В результате его монотонной вращательно-симметричной неустойчивости возникает вторичное стационарное течение. Колебательная трехмерная неустойчивость порождает автоколебательный режим с бегущими в азимутальном направлении волнами. Соответствующие этим бифуркациям нейтральные кривые при определенных значениях параметров задачи могут пересекаться.

В § 1.4 путем наложения возмущений $\mathbf{V}$ и Π соответственно на компоненты скорости $\mathbf{V}_0$ и давление Π_0 основного стационарного течения (1), исходные уравнения сводятся к нелинейной задаче для возмущений

$$\begin{aligned}
 D_1 v_r - \frac{v_\varphi^2}{r} + \frac{1}{\lambda} \frac{\partial \Pi}{\partial r} &= \frac{1}{\lambda} \left(D_2 v_r + \chi \frac{v_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} \right) + 2\omega v_\varphi, \\
 D_1 v_\varphi + \frac{v_r v_\varphi}{r} + \frac{1}{\lambda r} \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} &= \frac{1}{\lambda} \left(D_2 v_\varphi - \chi \frac{v_\varphi}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} \right) + g v_r, \\
 D_1 v_z + \frac{1}{\lambda} \frac{\partial \Pi}{\partial z} &= \frac{1}{\lambda} \left(D_2 v_z + \frac{v_z}{r^2} \right), \quad \text{div } \mathbf{V} = 0,
 \end{aligned} \tag{2}$$

$$v_r = v_\varphi = v_z = 0 \quad (r = 1, R),$$

$$D_1 = \frac{\partial}{\partial t} + \omega \frac{\partial}{\partial \varphi} + (\mathbf{V}, \nabla), \quad D_2 = \Delta - \frac{\chi}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r^2},$$

$$\omega = \frac{v_{0\varphi}}{r}, \quad g = - \left(\frac{d}{dr} + \frac{1}{r} \right) v_{0\varphi} = \begin{cases} -a(\chi + 2)r^\chi, & \chi \neq -2, \\ -\frac{a_1}{r^2}, & \chi = -2. \end{cases}$$

Уравнения движения жидкости и основной режим симметричны относительно вращений около оси цилиндров на произвольный угол, сдвигов вдоль этой оси на произвольное расстояние и инверсии J (зеркальной симметрии относительно отражений в плоскости поперечного сечения цилиндров). Соответствующие формулы выписаны в § 1.5.

§ 1.6 посвящен численному исследованию устойчивости основного режима относительно бесконечно малых возмущений. Приводятся результаты расчета нейтральных кривых, соответствующих монотонной вращательно-симметричной и трехмерной колебательной потере устойчивости.

Нейтральная кривая, соответствующая бифуркации возникновения вторичного стационарного течения, находится путем решения линеаризованной задачи устойчивости, отвечающей (2), для случая, когда возмущения являются монотонными и вращательно-симметричными. После разделения переменных получается вещественная спектральная задача для определения критического значения числа Рейнольдса λ .

Для расчета нейтральной кривой, соответствующей бифуркации возникновения азимутальных волн, предполагаем возмущения колебательными и трехмерными. После разделения переменных получается комплексная спектральная задача для определения критического значения числа Рейнольдса λ и частоты нейтральной азимутальной моды s .

Спектральные задачи решались численно методом пристрелки. Результатом данного расчета являются зависимости критических значений числа Рейнольдса λ и частоты нейтральной колебательной моды s от отношения угловых скоростей вращения цилиндров Ω .

Особое внимание уделяется отысканию точек пересечения нейтральных кривых, поскольку вблизи таких точек взаимодействие мод, соответствующих вторичному стационарному течению и азимутальным волнам, может приводить к возникновению достаточно сложных режимов движения жидкости.

Расчеты показали, что при определенных значениях параметров задачи нейтральные кривые не имеют точек пересечения, а при других значениях параметров они пересекаются в одной или нескольких точках. Графики нейтральных кривых и таблицы критических значений чисел Рейнольдса λ представлены в приложении 1.

Во второй главе исследуется устойчивость основного режима в нелинейной постановке.

В § 2.1 разыскивается решение нелинейной задачи для возмущений (2)

в точке (Ω, λ) , лежащей вблизи точки пересечения нейтральных кривых (Ω_*, λ_*) , в виде

$$\mathbf{V} = \sqrt{|\delta_1|}(\Phi + \Phi^*), \quad \Pi = \sqrt{|\delta_2|}(p + p^*), \quad (3)$$

$$\Phi = \eta_0(\xi)\Phi_0(r, z) + e^{ic_*t}[\eta_1(\xi)\Phi_1(r, \varphi, z) + \eta_2(\xi)\Phi_2(r, \varphi, z)] + \dots,$$

$$p = \eta_0(\xi)p_0(r, z) + e^{ic_*t}[\eta_1(\xi)p_1(r, \varphi, z) + \eta_2(\xi)p_2(r, \varphi, z)] + \dots.$$

Здесь $\delta_1 = \lambda - \lambda_*$ и $\delta_2 = \Omega - \Omega_*$ — малые параметры одного порядка, η_0, η_1, η_2 — неизвестные комплексные амплитуды — функции «медленного» времени $\xi = |\delta_1|t$; c_* — неизвестная циклическая частота, найденная при $\lambda = \lambda_*$ и $\Omega = \Omega_*$; Φ_0, p_0 — собственное решение линеаризованной задачи устойчивости для монотонных вращательно-симметричных возмущений; Φ_1, p_1 и Φ_2, p_2 — независимые собственные решения линеаризованной задачи устойчивости для колебательных трехмерных возмущений. При этом вектор Φ_2 получается инверсией J (см. § 1.5) из вектора Φ_1 , так что $\Phi_2 = J\Phi_1$. Величины порядка δ_1, δ_2 и выше в (3) опущены.

Амплитуды η_0, η_1, η_2 разложений (3) удовлетворяют следующей системе с кубическими ведущими нелинейными членами:

$$\begin{aligned} \frac{d\eta_0}{d\xi} &= (\sigma + A|\eta_0|^2 + B|\eta_1|^2 + B^*|\eta_2|^2)\eta_0 + D\eta_0^*\eta_1^*\eta_2, \\ \frac{d\eta_1}{d\xi} &= (\mu + P|\eta_0|^2 + Q|\eta_1|^2 + R|\eta_2|^2)\eta_1 + S\eta_0^{*2}\eta_2, \\ \frac{d\eta_2}{d\xi} &= (\mu + P|\eta_0|^2 + R|\eta_1|^2 + Q|\eta_2|^2)\eta_2 + S\eta_0^2\eta_1. \end{aligned} \quad (4)$$

Амплитудная система (4) получена путем использования техники теории бифуркаций, связанной с применением теоремы о нейтральном многообразии. Впервые эта система была получена В. И. Юдовичем в России и Ж. Йоссом и П. Шосса во Франции. Она является обобщением известного амплитудного уравнения Ландау.

Система (4) применима в широком классе задач о течениях жидкости между вращающимися цилиндрами, обладающих группой симметрии G (см. § 1.5), но в различных задачах значения ее коэффициентов будут различными.

Коэффициенты системы (4) выражаются явно через решения серии линейных краевых задач для систем обыкновенных дифференциальных уравнений с переменными комплексными коэффициентами. Соответствующие формулы приводятся в § 2.6.

В § 2.2 приводится система обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, представляющая собой основной объект анализа устойчивости и бифуркаций вторичных режимов в проблеме Куэтта–Тейлора для проницаемых цилиндров — моторная подсистема амплитудной системы.

Представление комплексных амплитуд в форме $\eta_0 = \rho_0 e^{i\psi_0}$, $\eta_1 = \rho_1 e^{i\psi_1}$, $\eta_2 = \rho_2 e^{i\psi_2}$ позволяет для модулей амплитуд ρ_0 , ρ_1 , ρ_2 и фазового инварианта $\beta = 2\psi_0 + \psi_1 - \psi_2$ получить следующую замкнутую систему, которая называется моторной подсистемой амплитудной системы

$$\begin{aligned}\frac{d\rho_0}{d\xi} &= [\sigma + A\rho_0^2 + B_r(\rho_1^2 + \rho_2^2)] \rho_0 + D\rho_0\rho_1\rho_2 \cos \beta, \\ \frac{d\rho_1}{d\xi} &= (\mu_r + P_r\rho_0^2 + Q_r\rho_1^2 + R_r\rho_2^2)\rho_1 + (S_r \cos \beta + S_i \sin \beta)\rho_0^2\rho_2, \\ \frac{d\rho_2}{d\xi} &= (\mu_r + P_r\rho_0^2 + R_r\rho_1^2 + Q_r\rho_2^2)\rho_2 + (S_r \cos \beta - S_i \sin \beta)\rho_0^2\rho_1, \\ \frac{d\beta}{d\xi} &= C(\rho_1^2 - \rho_2^2) - 2D\rho_1\rho_2 \sin \beta - [S_i(\rho_1^2 - \rho_2^2) \cos \beta + \\ &\quad + S_r(\rho_1^2 + \rho_2^2) \sin \beta] \rho_0^2/\rho_1\rho_2, \quad C = 2B_i + Q_i - R_i.\end{aligned}\tag{5}$$

Исследование моторной подсистемы (5) позволяет отыскивать стационарные, периодические и квазипериодические течения. Причем стационарные, периодические и двухчастотные квазипериодические режимы находятся аналитически. Трехчастотные квазипериодические течения рассчитываются численно.

§ 2.3 содержит формулы для отыскания двух стационарных течений: основного режима и вторичного стационарного вращательно-симметричного течения. Им соответствуют равновесия моторной подсистемы, которые лежат на инвариантных плоскостях.

В § 2.4 выписаны формулы для отыскания периодических режимов движения жидкости. Это следующие течения: чистые азимутальные волны, пара спиральных волн, смешанные азимутальные волны первого и второго родов. Периодическим течениям, также как и стационарным (§ 2.3), соответствуют равновесия моторной подсистемы, которые лежат на инвариантных плоскостях.

§ 2.5 содержит формулы для отыскания квазипериодических колебательных режимов с двумя независимыми частотами. Всем таким течениям соответствуют равновесия общего положения моторной подсистемы.

§ 2.6 посвящен расчету коэффициентов амплитудной системы. Для реализации этих вычислений потребовалось рассчитать на компьютере решения серии линейных краевых задач для систем обыкновенных дифференциальных уравнений с переменными комплексными коэффициентами.

Вычисления проводились для фиксированных значений следующих трех параметров: отношения радиусов цилиндров R , аксиального и азимутального волновых чисел α и m .

Результаты вычислений для случая, когда радиус внешнего цилиндра в два раза превосходит радиус внутреннего цилиндра $R = 2$ и азимутальное волновое число $m = 1$ при различных значениях радиального числа Рейнольдса χ и аксиального волнового числа α представлены в приложении 2.

В третьей главе приводятся результаты численного анализа режимов, возникающих после потери устойчивости основного стационарного течения.

В § 3.1 изучаются стационарные, периодические и двухчастотные квазипериодические режимы движения жидкости, соответствующие равновесиям моторной подсистемы, а также их устойчивость и бифуркации. Установлено, что при определенных значениях параметров задачи от некоторых равновесий ответвляются предельные циклы. Результаты вычислений представлены бифуркационными диаграммами.

Для случая, когда радиальный поток жидкости направлен от внутреннего цилиндра к внешнему ($\chi = 0.25$), возмущения являются 2π -периодическими в азимутальном направлении ($\alpha = 2$), точка пересечения нейтральных кривых расположена выше нейтральной кривой, соответствующей бифуркации возникновения вторичного стационарного течения ($\sigma = 10$), схема бифуркационных переходов представлена на рис. 2.

На схеме одинарными линиями изображены J -симметричные течения, двойными линиями — J -связанные пары течений. Устойчивые течения нарисованы сплошными линиями, неустойчивые — штриховыми. Точками обозначены бифуркации течений, соответствующих равновесиям моторной подсистемы. Кружками отмечены точки, в которых ответвляются трехчастотные квазипериодические режимы движения жидкости. Им соответствуют циклы моторной подсистемы.

В рассматриваемом случае существуют следующие течения: основное стационарное течение MF , вторичное стационарное течение SF , чистые азимутальные волны AW , пара спиральных волн SW , смешанные азимутальные волны первого рода MW^+ , смешанные азимутальные волны

второго рода MW^- , а также две J -связанные пары двухчастотных квазипериодических течений, соответствующих равновесиям общего положения QPF_1 и QPF_2 .

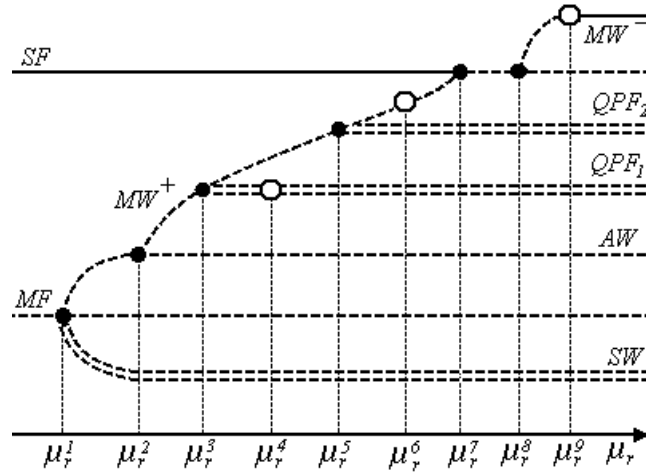


Рис. 2. Схема переходов при $R = 2$, $\chi = 0.25$, $m = 1$, $\alpha = 2$, $\sigma = 10$.

Бифуркационные значения: $\mu_r^1 = 0$, $\mu_r^2 = 6.8648$, $\mu_r^3 = 6.8778$, $\mu_r^4 = 7.3809$, $\mu_r^5 = 8.4264$, $\mu_r^6 = 8.5841$, $\mu_r^7 = 8.5986$, $\mu_r^8 = 8.8269$, $\mu_r^9 = 9.2312$.

При $\mu_r = \mu_r^4$, $\mu_r = \mu_r^6$ и $\mu_r = \mu_r^9$ ответвляются трехчастотные квазипериодические течения. Им соответствуют J -симметричные циклы моторной подсистемы (а при $\mu_r = \mu_r^4$ пара циклов).

Таким образом, для рассматриваемых значений параметров задачи в диапазоне $\mu_r^7 < \mu_r < \mu_r^9$ нет ни одного устойчивого равновесия моторной подсистемы. Это означает, что в данном интервале изменения свободного параметра μ_r в экспериментах могут реализоваться достаточно сложные режимы движения жидкости.

§ 3.2 содержит результаты расчета квазипериодических колебательных режимов движения жидкости с тремя независимыми частотами, которым соответствуют предельные циклы — изолированные периодические решения моторной подсистемы. Обнаружены устойчивые и неустойчивые симметричные циклы, а также инверсионно-связанные пары несимметричных циклов. Исследованы бифуркации циклов. Установлено, что при определенных значениях параметров задачи бифуркации циклов приводят к возникновению хаотических аттракторов. Выполнен расчет инверсионно-связанной пары хаотических режимов движения жидкости, соответствующих хаотическим аттракторам моторной подсистемы, возникающей в результате бесконечного каскада удвоений устойчивых инверсионно-связанных пар предельных циклов моторной подсистемы.

Однооборотные циклы. Симметричные циклы. В случае $R = 2$, $\chi = 1$, $m = 1$, $\alpha = 2$, $\sigma = 10$ единственный устойчивый J -симметричный предельный цикл A_0 (рис. 3) ответвляется при $\mu_r = 22.3504$ от смешанных азимутальных волн второго рода MW^- . Он существует для $\mu_r < 22.3504$ и устойчив в интервалах $7.4303 < \mu_r < 7.7875$, $8.1833 < \mu_r < 22.3504$. При $\mu_r = 8.1833$ цикл A_0 теряет устойчивость в результате бифуркации потери симметрии: от цикла ответвляется устойчивая J -связанная пара циклов $A_{\pm 1}^1$.

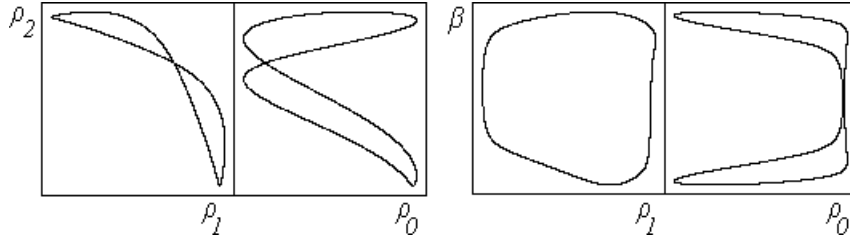


Рис. 3. Симметричный цикл A_0 при $\mu_r = 12$ в случае $R = 2$, $\chi = 1$, $m = 1$, $\alpha = 2$, $\sigma = 10$. Координаты точки на цикле: $\rho_0 = 0.188204$, $\rho_1 = 0.135322$, $\rho_2 = 0.135322$, $\beta = 3.141593$. Период $T = 0.367969$. Устойчив.

Дальнейшее уменьшение параметра μ_r приводит к тому, что в точках $\mu_r = 7.7875$ и $\mu_r = 7.4303$ цикл A_0 претерпевает еще две бифуркации потери симметрии, в результате которых ответвляются неустойчивые J -связанные пары циклов $A_{\pm 1}^2$ и $A_{\pm 1}^3$.

Инверсионно-связанные пары несимметричных циклов. Устойчивая J -связанная пара циклов $A_{\pm 1}^1$ (рис. 4) при $\mu_r = 8.1833$ ответвляется от J -симметричного цикла A_0 . Она существует в интервале $8.1782 < \mu_r < 8.1833$ и устойчива всюду, где существует. В точке $\mu_r = 8.1782$ пара циклов $A_{\pm 1}^1$ одновременно гибнет с неустойчивой J -связанной парой циклов $B_{\pm 1}$, которая существует для $\mu_r > 8.1782$.

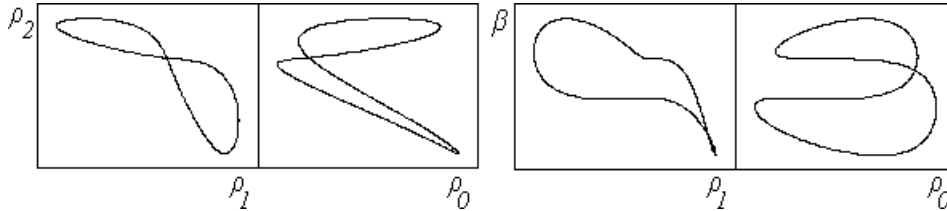


Рис. 4. Один из циклов пары циклов $A_{\pm 1}^1$ при $\mu_r = 8.18$ в случае $R = 2$, $\chi = 1$, $m = 1$, $\alpha = 2$, $\sigma = 10$. Координаты точки на цикле: $\rho_0 = 0.172140$, $\rho_1 = 0.128736$, $\rho_2 = 0.128743$, $\beta = 3.317110$. Период $T = 1.043100$. Устойчив.

Удвоения циклов. Вычисления показывают, что J -связанные пары несимметричных циклов моторной подсистемы могут претерпевать бифуркации удвоения периода, в том числе и неограниченные последовательности таких бифуркаций.

Устойчивая J -связанная пара двухоборотных предельных циклов $G_{\pm 2}$ (рис. 5) в случае $R = 2$, $\chi = -1$, $m = 1$, $\alpha = 3$, $\sigma = 10$ ответвляется при $\mu_r = 11.9237$ от J -связанной пары предельных циклов $G_{\pm 1}$. Она устойчива в интервале $11.9237 < \mu_r < 12.0078$. В точке $\mu_r = 12.0078$ претерпевает бифуркацию удвоения периода цикла и от нее ответвляется устойчивая J -связанная пара четырехоборотных предельных циклов $G_{\pm 3}$.

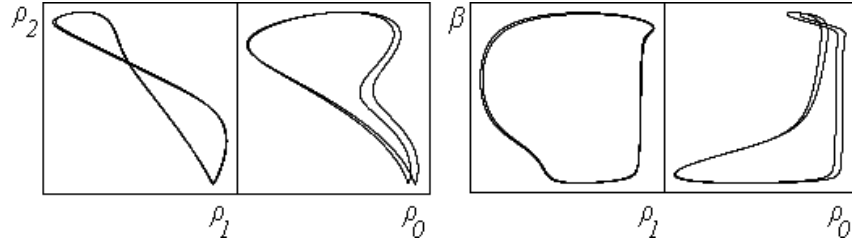


Рис. 5. Один из двухоборотных циклов J -связанной пары циклов $G_{\pm 2}$ при $\mu_r = 11.9312$ в случае $R = 2$, $\chi = -1$, $m = 1$, $\alpha = 3$, $\sigma = 10$.

Координаты точки на цикле: $\rho_0 = 0.078606$, $\rho_1 = 0.151073$, $\rho_2 = 0.175375$, $\beta = 2.628381$.
Период $T = 0.567672$. Устойчив.

Сложные режимы. Для значений параметров $R = 2$, $\chi = 0.25$, $m = 1$, $\alpha = 2$, $\sigma = 10$ в точке $\mu_r = 8.608252$ от J -симметричного цикла E_0 ответвляется устойчивый двухчастотный квазипериодический режим E , фазовые траектории которого лежат на инвариантном двумерном торе. Он существует при $\mu_r < 8.608252$. Проекция фазовых траекторий в начальной стадии формирования (на небольшом отрезке времени) показаны на рис. 6. Отображение Пуанкаре, соответствующее тору E , приведено на рис. 7.

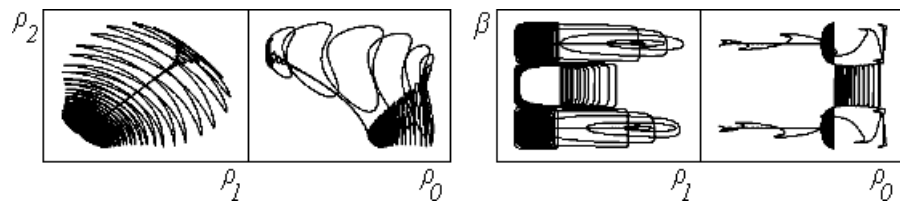


Рис. 6. Устойчивый двумерный тор E с вращением при $\mu_r = 8.603$ в случае $R = 2$, $\chi = 0.25$, $m = 1$, $\alpha = 2$, $\sigma = 10$. Координаты точки на торе: $\rho_0 = 0.140548$, $\rho_1 = 0.037003$, $\rho_2 = 0.037003$, $\beta = 138.23$.

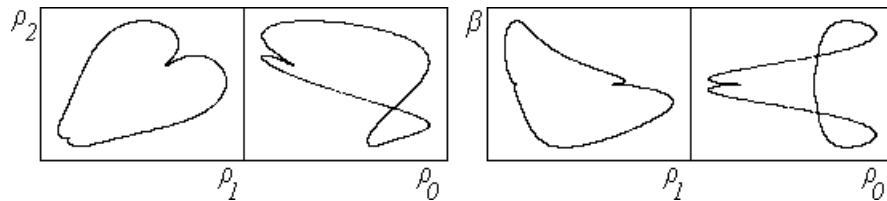


Рис. 7. Отображение Пуанкаре двумерного тора E с вращением при $\mu_r = 8.603$ в случае $R = 2$, $\chi = 0.25$, $m = 1$, $\alpha = 2$, $\sigma = 10$.

Таким образом, для данных значений параметров задачи в зазоре между двумя цилиндрами могут наблюдаться течения жидкости, имеющие сложную структуру.

Расчеты стохастических решений моторной подсистемы проводились методом установления — путем прямого численного интегрирования системы (5) методом Рунге-Кутты-Фельберга 4-5-го порядка точности с автоматическим выбором шага интегрирования. Результаты вычислений выводились на экран дисплея в виде проекций фазовых траекторий на координатные плоскости и образов отображения Пуанкаре. При построении отображения Пуанкаре секущая плоскость автоматически выбиралась трансверсальной к траекториям системы (5) в некоторый фиксированный момент времени.

Для случая $R = 2$, $\chi = -1$, $m = 1$, $\alpha = 3$, $\sigma = 10$ рассчитаны J -связанные пары устойчивых предельных циклов $G_{\pm n}$, претерпевающих при увеличении μ_r бифуркации удвоения периода. Всего удалось проследить 5 таких последовательных бифуркаций. Соответствующие им критические значения μ_r^n параметра μ_r представлены в таблице.

Критические значения μ_r для бифуркаций удвоения циклов $G_{\pm n}$
при $R = 2$, $\chi = -1$, $m = 1$, $\alpha = 3$, $\sigma = 10$.

n	μ_r^n	$\delta^n = (\mu_r^n - \mu_r^{n-1})/(\mu_r^{n+1} - \mu_r^n)$
1	11.923661	
2	12.007761	5.0678
3	12.024356	4.6733
4	12.027907	4.6724
5	12.028667	

Согласно закону универсальности Фейгенбаума, при неограниченной последовательности бифуркаций удвоения устойчивых циклов, приводящей к возникновению хаотического аттрактора, последовательность отношений

$$\delta^n = (\mu_r^n - \mu_r^{n-1})/(\mu_r^{n+1} - \mu_r^n) \rightarrow \delta^* \approx 4.6692, \quad \text{когда } n \rightarrow \infty.$$

Значения δ^n , представленные в таблице, с удовлетворительной точностью соответствуют закону универсальности Фейгенбаума. Это позволяет предположить, что $\mu_r^n \rightarrow \mu_r^* \approx 12.028875$, когда $n \rightarrow \infty$, и при $\mu_r = \mu_r^*$ в результате каскада бифуркаций удвоения J -связанных пар циклов $G_{\pm n}$

возникает J -связанная пара хаотических аттракторов $G_{\pm}$, которая существует при $\mu_r \geq \mu_r^*$.

Вычисления данное предположение подтверждают. Проекции фазовой траектории одного из аттракторов J -связанной пары $G_{\pm}$ на координатные плоскости показаны на рис. 8.

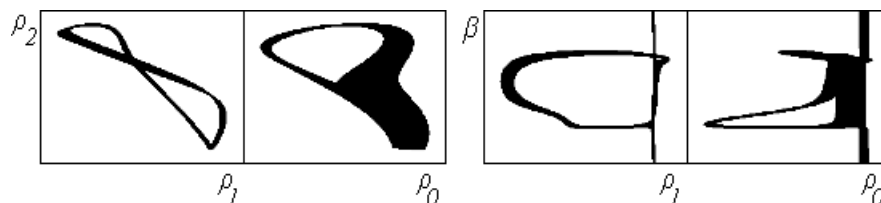


Рис. 8. Один из аттракторов J -связанной пары хаотических аттракторов $G_{\pm}$ при $\mu_r = 12.05$ в случае $R = 2$, $\chi = -1$, $m = 1$, $\alpha = 3$, $\sigma = 10$. Координаты точки на аттракторе: $\rho_0 = 0.090088$, $\rho_1 = 0.100506$, $\rho_2 = 0.252663$, $\beta = 1.729146$.

Таким образом, вычисления показали, что при продолжении решений моторной подсистемы по параметру наблюдаются следующие типы бифуркаций:

- ответвление симметричного цикла от симметричного равновесия моторной подсистемы в результате колебательной потери устойчивости равновесия;
- ответвление J -связанной пары несимметричных циклов от J -связанной пары несимметричных равновесий в результате колебательной потери устойчивости пары равновесий;
- ответвление одной J -связанной пары несимметричных циклов от другой в результате бифуркации удвоения пары циклов;
- ответвление J -связанной пары несимметричных циклов от симметричного цикла в результате бифуркации потери симметрии цикла;
- одновременное возникновение (или исчезновение) двух симметричных циклов «из воздуха»;
- одновременное возникновение (или исчезновение) двух J -связанных пар несимметричных циклов «из воздуха»;
- ответвление симметричного двумерного тора от J -симметричного цикла;
- возникновение J -связанной пары несимметричных хаотических аттракторов в результате бесконечного каскада удвоений J -связанной пары несимметричных циклов.

В заключении к диссертации подведены итоги работы и сформулированы основные результаты и выводы.

3. Основные результаты и выводы

В работе исследованы различные режимы движения вязкой несжимаемой жидкости в зазоре между двумя бесконечными концентрическими вращающимися проницаемыми цилиндрами в случае, когда имеется приток жидкости через поверхность одного цилиндра и отток через поверхность другого. Основным режим движения жидкости в рассматриваемой задаче представляет собой стационарное вращательно-симметричное течение с нулевой аксиальной компонентой вектора скорости. Это течение может потерять устойчивость двумя способами. В результате монотонной вращательно-симметричной неустойчивости оно сменяется вторичным стационарным течением, а в случае колебательной трехмерной неустойчивости — вторичным автоколебательным режимом типа бегущих азимутальных волн. Вблизи пересечения этих двух бифуркаций существует множество различных вторичных режимов, возникающих благодаря нелинейному взаимодействию монотонной вращательно-симметричной и колебательных трехмерных мод.

Исследование линеаризованной задачи устойчивости показало, что когда цилиндры вращаются в разные стороны и модуль отношения угловых скоростей достаточно велик, рост скорости втекания жидкости через поверхность внутреннего цилиндра дестабилизирует основной режим, причем этот эффект проявляется тем сильнее, чем больше величина отношения угловых скоростей вращения цилиндров. Если же цилиндры вращаются в одинаковых направлениях либо модуль отношения угловых скоростей вращения цилиндров имеет небольшие значения, то ситуация усложняется. В зависимости от значений других параметров задачи изменение скорости втекания жидкости через поверхность внутреннего или внешнего цилиндров может оказывать как дестабилизирующее, так и стабилизирующее воздействие на основной режим.

Исследование моторной подсистемы позволило найти следующие вторичные течения жидкости: вторичное стационарное течение, пара спиральных волн, чистые азимутальные волны, смешанные азимутальные волны первого и второго родов, а также двухчастотные и трехчастотные квазипериодические движения жидкости. Эти режимы при различных значениях параметров оказываются как устойчивыми, так и не устойчивыми. С помощью численного анализа их бифуркаций удалось отыскать ряд режимов имеющих существенно более сложную природу, в том числе и хаотические движения.

Основные научные результаты, представленные в диссертации:

1. В широком диапазоне изменений параметров задачи рассчитаны нейтральные кривые, соответствующие монотонной вращательно-симметричной и трехмерной колебательной потере устойчивости основного режима, а также точки их пересечения.

2. Исследовано влияние направления и интенсивности радиального потока жидкости на устойчивость основного стационарного движения жидкости.

3. Путем применения теории бифуркаций коразмерности два получены формулы для коэффициентов амплитудной системы трех комплексных дифференциальных уравнений первого порядка с кубическими ведущими нелинейными членами. Данная система описывает различные движения жидкости, существующие вблизи пересечения бифуркаций возникновения вторичного стационарного течения и автоколебаний с бегущими в азимутальном направлении волнами. Коэффициенты этой системы рассчитаны на компьютере путем решения серии линейных краевых задач.

4. Путем аналитического и численного анализа амплитудной системы найдены стационарные, периодические и квазипериодические колебательные течения жидкости с двумя и тремя независимыми частотами. Исследованы их устойчивость и бифуркации.

5. Обнаружено, что при определенных значениях параметров задачи образуются режимы движения жидкости, имеющие достаточно сложную природу. В частности, в результате последовательного удвоения инверсионно-связанной пары несимметричных циклов возникают стохастические аттракторы амплитудной системы, которым соответствуют хаотические режимы движения жидкости.

Публикации по теме диссертации

1. Колесов В. В., Романов М. Н. Расчет стационарных, периодических и квазипериодических движений вязкой жидкости между двумя вращающимися проницаемыми цилиндрами // Изв. РАН, МЖГ. 2010. № 6. С. 53–62.
2. Колесов В. В., Романов М. Н. Расчет бикритических точек в задаче об устойчивости течения вязкой жидкости между двумя вращающимися проницаемыми цилиндрами // Изве-

ствия вузов. Северо-кавказский регион. Естественные науки. 2009. № 5. С. 28–30.

3. Колесов В. В., Романов М. Н. Пересечение бифуркаций возникновения вихрей Тейлора и азимутальных волн между вращающимися проницаемыми цилиндрами // Известия вузов. Северо-кавказский регион. Естественные науки. 2009. С. 112–114.
4. Колесов В.В., Романов М.Н. Монотонная и колебательная неустойчивость основного режима движения жидкости между двумя вращающимися проницаемыми цилиндрами // Рук. деп. в ВИНТИ, 2010. № 483-В2010. 27 с.
5. Колесов В. В., Романов М. Н. Расчет вторичных течений вязкой жидкости, возникающих вблизи пересечения бифуркаций рождения вихрей Тейлора и азимутальных волн, между проницаемыми цилиндрами // Совр. проблемы механики сплошной среды. Труды XIV международной конференции. Ростов н/Д: Изд-во ЮФУ, 2009. Т. 2. С. 156–160.
6. Колесов В. В., Романов М. Н. Расчет коэффициентов амплитудной системы в задаче о движениях вязкой жидкости между двумя вращающимися проницаемыми цилиндрами // Совр. проблемы механики сплошной среды. Труды XIII международной конференции. Ростов н/Д: Изд-во ЮФУ, 2009. Том II. С. 103–107.
7. Колесов В. В., Романов М. Н. Расчет нейтральных кривых, соответствующих потере устойчивости основного режима движения жидкости между двумя вращающимися проницаемыми цилиндрами // Неделя науки 2007. Ростов н/Д: Изд-во «ЦВВР», 2007. С. 37–39.
8. Колесов В. В., Романов М. Н. Расчет нейтральных кривых монотонной и колебательной неустойчивости кругового движения жидкости между вращающимися проницаемыми цилиндрами // Материалы международной конференции «Нелинейные задачи теории гидродинамической устойчивости и турбулентность». М.: Изд-во Моск. ун-та, 2008. С. 74.
9. Романов М. Н. Расчёт коэффициентов амплитудной системы в задаче об устойчивости течений между двумя вращающимися проницаемыми цилиндрами // Труды аспирантов и соискателей Южного федерального университета. Ростов н/Д: ИПО ПИ ЮФУ, 2009. Том XIV. С. 61–65.