МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ имени М.В. ЛОМОНОСОВА

На правах рукописи УДК 539.3:534.1

Малашин Алексей Анатольевич

ВЗАИМОВЛИЯНИЕ ВОЛНОВЫХ И КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ ПРОЦЕССОВ В ПРЕДВАРИТЕЛЬНО НАПРЯЖЕННЫХ ЭЛЕМЕНТАХ И СИСТЕМАХ

01.02.04- Механика деформируемого твердого тела

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени доктора физико-математических наук

Москва 2011

Работа выполнена	В	Московском	.]	Государственном	 Университете ле	eca ((МГУЛ	I),
г. Москва.								

Официальные оппоненты: Академик РАН, профессор Профессор, д.ф.-м.н. Профессор, д.ф.-м.н.

Андрей Геннадиевич Куликовский, Дмитрий Леонидович Быков Сергей Геннадиевич Пшеничнов

Ведущая организация: Акустический институт РАН им. Н.Н. Андреева

Защита диссертации состоится "<u>7</u>" <u>октября</u> 2011 г. в 14 часов на заседании диссертационного совета Д501.001.91 при МГУ им. М. В. Ломоносова по адресу: 119899, г. Москва, ГСП, Воробьевы горы, МГУ, Главное здание, Механикоматематический факультет, ауд. 16-10.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Механико-математического факультета МГУ (Главное здание, 14 эт.)

Автореферат разослан "__"____2011 г.

Ученый секретарь диссертационного совета Д501.001.91 при МГУ д.ф.-м.н., профессор Шешенин С.В.

Общая характеристика работы

Объектом исследований являются волновые взаимодействия в элементах и системах, распространение и взаимовлияние поперечных, продольных и сдвиговых волн и вызванных ими колебаний, обусловленных учетом нелинейных членов в тензоре деформаций на примере колебаний струн, канатов, мембран, тонких стержней и тонкостенных труб с учетом динамических воздействий на них. Исследованы условия возникновения резонансов различных типов между модами отдельных колебаний, изучена возможность граничного управления поперечно-продольными колебаниями струн.

Актуальность темы. До последнего времени при рассмотрении колебаний (и динамических нагружений при этом) струн, канатов, мембран и других элементов гибких связей исходили из того, что эти колебания можно считать поперечными. В последние годы благодаря работам Ю.А. Демьянова было установлено, что вклад продольных колебаний в динамическое деформирование и нагружение гибких связей одного порядка со вкладом поперечных колебаний, хотя амплитуды поперечных колебаний на порядок больше продольных. Поэтому учет продольных динамических составляющих натяжения в струне необходим для более полного описания механизма передачи колебаний в присоединенные к гибким связям элементы. В результате исследований было показано, что имеют место вынужденные продольные колебания, которые происходят на частотах поперечных колебаний. С участием автора было показано, что при определенных обстоятельствах возможны резонансные явления между продольными и поперечными колебаниями, что может быть причиной разрушения конструкций. Кроме того было установлено, что в период каких-либо динамических воздействий на гибкие связи возникает дополнительный спектр поперечнопродольных колебаний, который оказывает существенное влияние на процесс колебаний и на процесс динамического нагружения в последующий период после окончания воздействия. Результаты работы применялись к определению нагружения и колебаний элементов музыкальных инструментов. Для строительных конструкций установленные результаты позволяют определить новые расчетные случаи нагружения (например, опор подвесных мостов и линий электропередач, башен, крыш стадионов и других конструкций, соединенных гибкими связями, испытывающими какие-либо динамические воздействия).

Целью работы является исследование обнаруженных вынужденных продольных колебаний в деформируемом твердом теле, которые возникают из-за наличия поперечных, сдвиговых, крутильных колебаний (в зависимости от геометрии твердого тела и характера нагружения) с учетом их взаимовлияния. Изучение резонансных явлений, возникающих при совпадении частот отдельных мод колебаний различных типов. Исследование новых типов волновых слабонелинейных взаимодействий, ранее не учитываемых при динамических расчетах гибких связей, инженерных конструкций и их элементов.

Идея, положенная в основу работы, состоит в том, чтобы на основе корректно проведенного асимптотического анализа нелинейных нестационарных дифференциальных уравнений распространения волн и колебаний в элементах и системах (струнах, канатах, тонких стержнях, мембранах, тонкостенных трубах) исследовать основные закономерности распространения продольно-поперечных и сдвиговых волн и колебаний в предварительно напряженных деформируемых твердых телах при учете нелинейных членов в разложении тензора деформации.

Научная новизна работы заключается в следующем:

- Получение асимптотических слабо нелинейных уравнений поперечных, продольных, изгибных и крутильных колебаний струн, мембран, стержней, труб. Решение задач распространения поперечно-продольных волн и колебаний с учетом их взаимодействия.
- Теоретические исследования и экспериментальные данные о том, что в предварительно напряженных телах различной геометрии существуют вынужденные продольные колебания на частотах поперечных, крутильных колебаний, являются новыми.
- Впервые определено экспериментально, что вклад продольных составляющих в динамическое нагружение растянутых струн оказывается одного порядка с вкладом поперечных колебаний.
- Теоретические и экспериментальные исследования резонансных явлений между поперечными и продольными колебаниями.
- Поставлены и решены задачи граничного управления поперечно-продольными колебаниями струн в рамках линеаризованной системы уравнений.
- Поставлены и решены задачи динамического воздействия на музыкальные струны.

Достоверность результатов работы определяется применением общих законов механики и физики, корректных постановок и строгих математических методов решения поставленных задач.

Составленные программы численного счета тестировались путем сравнения с имеющимися аналитическими решениями, и это сравнение показало очень хорошее согласование численных и аналитических результатов. Численный метод при решении задач динамического воздействия медиатора и молоточка фортепиано на струну можно назвать полуаналитическим, так как искомые величины определялись в виде сходящихся рядов точных аналитических решений.

Проверкой достоверности теоретических выводов являются результаты проведенных экспериментов по измерению спектров звучания гитары с помощью современной компьютерной программы цифровой обработки акустических спектров музыкальных инструментов. Сравнение амплитудно-частотных характеристик акустических спектров с результатами теоретических расчетов подтвердило правильность последних.

Теоретическая и практическая значимость работы состоит в том, что результаты работы являются точными аналитическими решениями и носят достаточно общий характер. Они могут быть использованы в изготовлении

музыкальных инструментов. Эти результаты были использованы для расчетов при производстве музыкальных струн с навивкой. Применительно к строительным конструкциям установленные результаты позволяют определить новые расчетные случаи нагружения конструкций, соединенных гибкими и негибкими связями, испытывающими какие-либо динамические воздействия.

Основные положения, выносимые на защиту.

- Решение задачи поперечно-продольных колебаний растянутых струн. Обнаружено, что хотя продольные смещения на порядок меньше поперечных, их вклад в динамическое нагружение струны одного порядка с поперечными составляющими. Поэтому решенная задача с учетом продольных динамических составляющих натяжения в струне более полно описывает механизм передачи воздействий на присоединенные к ней элементы. Обнаружено, что наряду с собственными продольными колебаниями существуют вынужденные продольные колебания на поперечных частотах. При совпадении частот отдельных мод поперечных и продольных колебаний возможны резонансные явления.
- Получены дифференциальные уравнения и решены задачи распространения продольных, поперечных и крутильных волн и колебаний с учетом их взаимного влияния в витых канатах, струнах с навивкой, тонкостенных трубах, мембранах, тонких стержнях, а также тяжелых канатах с использованием нелинейного тензора деформаций. Для всех предварительно растянутых элементов подтверждены выводы аналогичные случаю растянутых струн: 1) вклад продольных составляющих в динамическое нагружение элемента одного порядка с поперечными и крутильными, 2) наряду с собственными продольными колебаниями существуют вынужденные продольные колебания на поперечных и крутильных частотах, 3) возможны резонансные явления.
- Проведены экспериментальные исследования вынужденных продольных колебаний предварительно натянутых струн на частотах поперечных колебаний. Экспериментально подтверждено наличие вынужденных продольных колебаний на поперечных частотах и увеличение амплитуды при совпадении собственных и вынужденных частот продольных колебаний растянутых струн.
- Постановка и решение задач граничного управления продольнопоперечными колебаниями в струнах. Показано, что с помощью граничного режима можно управлять поперечно-продольным движением струн, переводя их из одного состояния с заданными профилями координат и скоростей в другое за определенное конечное время.
- Постановка и решение динамической задачи о возбуждении и свободных поперечно-продольных колебаниях струн щипковых и клавишных инструментов под влиянием произвольной формы медиатора, молоточка и сдвига частот из-за податливости заделки.
- Пространственные волновые и колебательные процессы в струнах. Установлена связь между волновыми и колебательными процессами в струнах и манерой игры исполнителя.

- Постановка и решение задачи удара твердым затупленным телом по гибкой деформируемой струне при наличии деформации сжатия. Найдены условия возникновения таких режимов.

Апробация диссертационной работы.

Основные материалы и результаты исследований докладывались и получили положительную оценку:

- на IX Всероссийском съезде по теоретической и прикладной механике. Нижний Новгород. 2006 г.
- на международной конференции «Современные проблемы газовой и волновой динамики», посвященной памяти академика Х.А. Рахматулина в связи со 100-летием со дня его рождения. Москва. 2009г.
- на Международной конференции, посвященной памяти академика X.A. Рахматулина в связи со 100-летием со дня его рождения. Бишкек. 2009г.
- на X XV школах-семинарах «Современные проблемы аэрогидродинамики», (2002 2007) (председатель акад. Г.Г. Черный, тезисы опубликованы в Изд. МГУ)
- на Ломоносовских чтениях в Московском Государственном Университете с 2005 по 2010 год
- на научных семинарах кафедры волновой и газовой динамики механикоматематического факультета МГУ (руководитель семинара акад. Е.И.Шемякин)
- на научных семинарах Акустического института им. Н.Н. Андреева
- на научном семинаре кафедры композитов механико-математического факультета МГУ под руководством проф. Победри Б.Е.
- на научном семинаре в Институте механики МГУ (руководители чл.- корр. РАН А.Г. Куликовский, проф. А.А. Бармин и В.П. Карликов)
- на научном семинаре Института проблем механики РАН (руководители акад. Д. М. Климов и А.Ю. Ишлинский)
- на научном семинаре в отделе математической физики МИАН им. В.А. Стеклова (руководитель акад. В.В. Владимиров)
- на научных конференциях МГУл

Публикации. Основное содержание диссертации опубликовано в 31 работе, список которых представлен в конце диссертации, из них 16 — в реферируемых изданиях, 13 — ведущих изданиях, входящих в перечень ВАК. Из совместных публикаций в диссертацию включены результаты, полученные автором. Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, 8 глав, заключения, списка используемых литературных источников к каждой главе, содержит 215 страниц, включая рисунки и таблицы.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении обсуждается актуальность темы исследования, сформулирована цель работы и основные положения, которые вынесены на защиту, приведены основные полученные результаты исследования.

В первой главе решаются задачи поперечно-продольных колебаний струны.

При исследовании распространения волн и обусловленных ими колебаний в струне щипкового музыкального инструмента, начиная с работ лорда Рэлея, использовалось решение задачи с начальными данными для уравнения только поперечных колебаний. Принималось, что начальная форма струны представляет собой две стороны треугольника с вершинами в точках крепления. Считалось также, что начальные скорости частиц в струне отсутствуют. Динамика процесса взаимодействия струны с медиатором в известных работах не учитывается, хотя динамическое воздействие в этот период наиболее интенсивное.

Такая постановка задачи означает необходимость мгновенного окончания воздействия исполнителя, что в действительности не имеет места. Эксперимент показал, что время этого воздействия, как правило, колеблется от 0.01 сек до 0.05 сек. При более строгой постановке задачи процесс должен быть рассмотрен как взаимодействие со струной в течение времени $t=t_0$ движущегося со скоростью $V_0(t)$ медиатора. Продольные составляющие ранее также не учитывались.

Решения найдены для системы линеаризованных уравнений распространения поперечных и продольных волн, полученных в работах Ю. А. Демьянова для случая струн имеющих предварительное натяжение

$$\frac{\partial^2 Y_1}{\partial t^2} = b^2 \frac{\partial^2 Y_1}{\partial s^2}, \quad \frac{\partial^2 X_1}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial}{\partial s} \left[\frac{\partial X_1}{\partial s} + \frac{1}{2(1 + e_0)^2} (\frac{\partial Y_1}{\partial s})^2 \right]$$

 e_0 - начальная деформация, $\overline{e} = \frac{\partial \overline{x}}{\partial s} + \frac{1}{2(1+e_0)} \left(\frac{\partial y}{\partial s}\right)^2$ - динамическая часть деформации.

Вклад в динамическое нагружение струны поперечных и продольных составляющих деформации оказывается одного порядка. Из-за разности порядков величин поперечных и продольных составляющих смещений данные уравнения позволяют решать задачи взаимодействия с натянутой струной тел различной формы, движущихся по произвольному закону.

Найдены амплитудно-частотные спектры поперечных и продольных колебаний, возникающих в струне в период и после воздействия исполнителя.

Решения данной задачи в период воздействия медиатора, движущегося со скоростью V_0 :

$$y(s,t) = \begin{cases} (\frac{L_1 - s}{L_1})V_0 t - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2V_0 L_1}{b\pi^2 n^2} \sin \frac{b\pi n}{L_1} t \sin \frac{\pi n s}{L_1}; & 0 \le s \le L_1 \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2V_0 L_2}{b\pi^2 n^2} \sin(\frac{b\pi n}{L_2} t) \sin \frac{\pi n s}{L_2} + (\frac{L_2 + s}{L_2})V_0 t; & -L_2 \le s \le 0. \end{cases}$$

При этом в струне музыкального инструмента возникают поперечные колебания, частоты которых выше, чем частоты колебаний свободной струны.

Пусть в некоторый момент времени t=T медиатор прекращает свое воздействие на струну. Решение задачи колебаний свободной струны после окончания воздействия

$$y(s,t) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t) \sin \frac{\pi k(s+L_2)}{L} = \sum_{k=1}^{\infty} (\tilde{y}_k \cos \frac{b\pi kt}{L} + \tilde{y}_{tk} \frac{L}{b\pi k} \sin \frac{b\pi kt}{L}) \sin \frac{\pi k(s+L_2)}{L}$$

$$\tilde{y}_k = 2L \sin \frac{\pi k L_2}{L} \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\pi} \left((\frac{A_n^{(1)} L_1}{k^2 L_1^2 - n^2 L^2} + \frac{A_n^{(2)} L_2}{k^2 L_2^2 - n^2 L^2}) + \frac{V_0 T}{\pi^2 k^2} \left(\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} \right) \right]$$

$$\tilde{y}_{tk} = 2L \sin \frac{\pi k L_2}{L} \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\pi} \left((\frac{B_n^{(1)} L_1}{k^2 L_1^2 - n^2 L^2} + \frac{B_n^{(2)} L_2}{k^2 L_2^2 - n^2 L^2}) + \frac{V_0}{\pi^2 k^2} \left(\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} \right) \right]$$

$$A_n^i(T) = \frac{2V_0 L_i}{b\pi^2 n^2} \sin \frac{b\pi nT}{L_i} \qquad B_n^i(T) = \frac{2V_0}{\pi n} \cos \frac{b\pi nT}{L_i}$$

В данной главе найдены также спектры продольных колебаний в период и после воздействия. В частности, для периода воздействия медиатора

$$X(s,t) = \begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} T_n^{(1)}(t) \sin \frac{\pi n s}{L_1}, & 0 < s < L_1 \\ \sum_{n=1}^{\infty} T_n^{(2)}(t) \sin \frac{\pi n s}{L_2}, & -L_2 < s < 0. \end{cases}$$

где

$$T_{n}^{(i)}(t) = \frac{a^{2}V_{0}^{2}L_{i}}{\pi^{3}(1+e_{0})b^{2}} \left(\sum_{m+k=n} \frac{1}{m} \left(\frac{\cos\frac{\pi(m-k)bt}{L_{i}} - \cos\frac{\pi nat}{L_{i}}}{a^{2}n^{2} - b^{2}(m-k)^{2}} - \frac{\cos\frac{\pi nbt}{L_{i}} - \cos\frac{\pi nat}{L_{i}}}{a^{2}n^{2} - b^{2}n^{2}} \right) + \frac{1}{m} \left(\frac{\cos\frac{\pi nbt}{L_{i}} - \cos\frac{\pi nat}{L_{i}}}{a^{2}n^{2} - b^{2}n^{2}} - \frac{\cos\frac{\pi(m+k)bt}{L_{i}} - \cos\frac{\pi nat}{L_{i}}}{a^{2}n^{2} - b^{2}(m+k)^{2}} \right) + \frac{2a^{2}V_{0}^{2}t}{\pi^{2}(1+e_{0})b(a^{2}-b^{2})n^{2}} \sin\frac{\pi nbt}{L_{i}} + \frac{4V_{0}^{2}bL_{i}}{\pi^{2}(1+e_{0})b(a^{2}-b^{2})n^{2}} \left(\cos\frac{\pi nat}{L_{i}} - \cos\frac{\pi nbt}{L_{i}}\right)$$

Получены также спектры продольных колебаний свободной струны как в случае традиционного задания начальных условий для поперечных колебаний струны, так и для случая в новой постановке учета времени воздействия медиатора.

Интерес представляет сравнение динамических воздействий поперечных и продольных составляющих в месте заделки. Для случая игры на щипковом музыкальном инструменте относительные динамические воздействия от поперечных и продольных составляющих в зависимости от времени

представлены на Рис. 1.1. Динамическое воздействие на точку крепления со стороны продольных составляющих больше, чем со стороны поперечных.

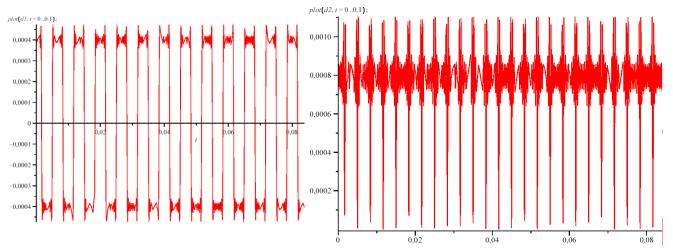


Рис. 1.1 Динамическое воздействие на заделку от поперечных (слева) и продольных (справа) составляющих.

Также из графиков видно, что продольные колебания происходят как на собственных частотах, так и на частотах поперечных колебаний. При совпадении частот продольных и поперечных колебаний, т.е. при $\frac{\pi na}{L} = \frac{\pi kb}{L}$, возможны резонансные явления.

Используя соотношения для разрывов продольных составляющих скоростей и деформаций на поперечных волнах

$$\left[\frac{\partial \overline{x}}{\partial t}\right] = \left[\frac{b^2}{2(1+e_0)} \left(\frac{\partial y}{\partial s}\right)^2\right], \qquad \left[\frac{\partial \overline{x}}{\partial s} + \frac{1}{2(1+e_0)} \left(\frac{\partial y}{\partial s}\right)^2\right] = 0$$

в диссертации дано объяснение механической причине возникновения продольных колебаний на поперечных частотах, показано, что

1) фронт поперечной волны является точкой разрыва параметров продольных волн, продольные волны распространяются от заделки до точки удара и обратно, не отражаясь от поперечной волны, при этом сохраняется величина разрыва; 2)поперечные волны являются источником распространения вынужденных продольных волн.

Методами возмущений учитывается влияние формы медиатора, упругости заделки. Найдены поправки в спектрах поперечных колебаний, а также сдвиг частот.

Во второй главе получены дифференциальные уравнения и решены задачи распространения продольных, поперечных и крутильных волн и колебаний с учетом их взаимного влияния в витых канатах, струнах с навивкой, тонкостенных трубах и мембранах, а также тяжелых и предварительно деформированных канатах с использованием нелинейного тензора деформаций. Полученные уравнения для продольных составляющих являются неоднородными, что обусловлено влиянием поперечных и крутильных воздействий. Показано, что

вклад продольных и поперечных и крутильных составляющих в динамическое нагружение этих элементов одного порядка, при этом возможны резонансные явления между модами продольных, крутильных и поперечных колебаний.

Относительное удлинение ε элемента навивки и угол свивки $\alpha+\omega$ при динамическом нагружении таковы

$$\varepsilon = \sqrt{\left(1 + \frac{\partial x}{\partial s}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial s}\right)^2 + \left(tg\alpha + r\frac{\partial v}{\partial s}\right)^2}\cos\alpha - 1, \qquad tg \quad \alpha + \omega = \frac{r\frac{\partial v}{\partial s}tg\alpha}{1 + e}$$
 где $e = \sqrt{\left(1 + \frac{\partial x}{\partial s}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial s}\right)^2} - 1$ относительная деформация корда, $x(s,t)$, $y(s,t)$ -

продольные и поперечные смещения оси струны, v(s,t) - крутильное смещение относительно оси струны, ω - приращение угла свивки.

Когда углы свивки не являются малой величиной, а радиусы цилиндров, на которых находится навивка, малы, уравнения движений при вышесказанных предположениях совпадают с уравнениями, полученными Х.А. Рахматулиным для движения витого каната:

$$\rho \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial s} \left[\left(A_1 e + A_3 \frac{\partial v}{\partial s} \right) \frac{\frac{\partial y}{\partial s}}{1 + e} \right], \quad \rho \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial s} \left[\left(A_1 e + A_3 \frac{\partial v}{\partial s} \right) \frac{1 + \frac{\partial x}{\partial s}}{1 + e} \right], \quad m \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial s} \left(A_2 \frac{\partial v}{\partial s} + A_3 e \right) \quad (2.1)$$

Для элементов музыкальных струн коэффициенты A_1, A_2, A_3 имеют следующий вид:

Для корда:
$$A_1^c = E_c F_c$$
, $A_2^c = G_c I_c$, $A_3^c = 0$

Для навивки:
$$A_i^o = \sum_{i=1}^k E_i F_i r_i^2 + E_i I_i \sin^4 \alpha_i + G_i I_{p_i} t g^2 \alpha_i \sin^4 \alpha_i \frac{\cos^3 \alpha_i}{r_i^2}$$
,

$$A_{2}^{o} = \sum_{i=1}^{k} E_{i} F_{i} r_{i}^{2} + E_{i} I_{i} + \cos^{2} \alpha_{i}^{2} + G_{i} I_{p_{i}} ctg^{2} \alpha_{i} \cos^{4} \alpha_{i} \sin^{2} \alpha_{i} \cos \alpha_{i},$$

$$A_{3}^{o} = \sum_{i=1}^{k} \left(E_{i} F_{i} r_{i}^{2} - E_{i} I_{i} + \cos^{2} \alpha_{i} \sin^{2} \alpha_{i} + G_{i} I_{p_{i}} \frac{\sin^{2} 2\alpha_{i}}{4} \right) \frac{\sin \alpha_{i} \cos^{2} \alpha_{i}}{r_{i}},$$

где k — число проволок в обмотке, ρ , m - плотность и кинетический момент инерции элемента струны, E_i - модули Юнга, G_i - модули сдвига, F_i , I_i , I_{pi} - площадь поперечного сечения, момент инерции и полярный момент инерции элемента i-ой проволоки струны соответственно, r_i - радиус цилиндра, на котором находится i-я проволока навивки. Для всей струны: $A_i = A_i^c + A_i^o$, $A_2 = A_2^c + A_2^o$, $A_3 = A_3^o$.

Можно показать, что асимптотика решений такова:

$$y = \overline{e}^{\frac{1}{2}} Y_1 + \overline{e}Y_2 + \dots$$
, $x = \overline{e}X_1 + \overline{e}^2X_2 + \dots$, $rv = \overline{e}rV_1 + \overline{e}^2rV_2 + \dots$

где $\overline{e} = e - e_0$ - характерная динамическая составляющая деформации.

Учитывая $\frac{\partial \overline{x}}{\partial s}$ << e_0 и $\frac{\partial y}{\partial s}$, $\frac{\partial v}{\partial s}$ << e_0 , получим выражение для полной деформации элемента навивки $\varepsilon = \left(e_0 + \frac{\partial \overline{x}}{\partial s} + \frac{1}{2 \ 1 + e_0} \left(\frac{\partial y}{\partial s}\right)^2 + r \cdot tg \, \alpha \, \frac{\partial v}{\partial s}\right) \cos^2 \alpha$.

Система уравнений (2.1) движения для музыкальной струны с навивкой выглядит следующим образом:

$$\begin{cases}
\frac{\partial^{2} y}{\partial t^{2}} = b^{2} \frac{\partial^{2} y}{\partial s^{2}} \\
\rho \frac{\partial^{2} \overline{x}}{\partial t^{2}} = A_{1} \frac{\partial^{2} \overline{x}}{\partial s^{2}} + \frac{A_{1}}{2 + e_{0}} \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial y}{\partial s}\right)^{2} + A_{3} \frac{\partial^{2} v}{\partial s^{2}} \\
m \frac{\partial^{2} v}{\partial t^{2}} = A_{3} \frac{\partial^{2} \overline{x}}{\partial s^{2}} + \frac{A_{3}}{2 + e_{0}} \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial y}{\partial s}\right)^{2} + A_{2} \frac{\partial^{2} v}{\partial s^{2}}
\end{cases} (2.2)$$

где $b^2 = \frac{A_1 e_0}{(1 + e_0)\rho}$ - скорость распространения поперечной волны.

Первое уравнение системы (2.2) представляет собой традиционное уравнение поперечных движений, в то время как уравнения для продольных и крутильных составляющих представляют собой неоднородные уравнения. Роль неоднородности (или вынуждающей силы) для продольных движений играют поперечные и крутильные составляющие, для крутильных движений - поперечные и продольные.

Распространение продольно-крутильных волн происходит с двумя

скоростями:
$$a_{1,2}^2 = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{A_1}{\rho} + \frac{A_2}{m} \right) \pm \sqrt{\left(\frac{A_1}{\rho} - \frac{A_2}{m} \right)^2 + \frac{4A_3^2}{\rho m}} \right]$$

Продольные составляющие скоростей и деформаций терпят разрыв на фронтах поперечных и крутильных волн. Для фронта поперечных волн соотношения для разрывов:

$$\left[\frac{\partial \overline{x}}{\partial s} + \frac{1}{2(1+e_0)} \left(\frac{\partial y}{\partial s} \right)^2 \right] = 0, \qquad \left[\frac{\partial \overline{x}}{\partial t} \right] = \left[\frac{b}{2(1+e_0)} \left(\frac{\partial y}{\partial s} \right)^2 \right]$$

Соотношения для разрывов на продольно-крутильных волнах:

$$\left[\frac{\partial U_{12}}{\partial t}\right] \pm a_{1,2} \left[\frac{\partial U_{12}}{\partial s}\right] = 0 \text{ где } U_1 = \overline{x} + \lambda_1 v \text{ , } U_2 = \overline{x} + \lambda_2 v \text{ , } \lambda_{1,2} = \frac{m}{2A_3} \left[\left(\frac{A_2}{m} - \frac{A_1}{\rho}\right) \pm \sqrt{\left(\frac{A_2}{m} - \frac{A_1}{\rho}\right)^2 + \frac{4A_3^2}{\rho m}}\right]$$

Для ограниченной витой музыкальной струны длины l решения приведенных уравнений (2.2) таковы

$$y \quad s,t \quad = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \sin \frac{\pi ns}{l} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \sin \frac{\pi nbt}{l} + B_n \cos \frac{\pi nbt}{l} \right) \sin \frac{\pi ns}{l}$$

$$\overline{x} \quad s,t \quad = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\pi ns}{l} \left(\lambda_1 C_{2n} \sin \frac{\pi na_2 t}{l} - \lambda_2 C_{1n} \sin \frac{\pi na_1 t}{l} + \lambda_1 D_{2n} \cos \frac{\pi na_2 t}{l} - \lambda_2 D_{1n} \cos \frac{\pi na_1 t}{l} \right) + \overline{x}_y \quad s,t$$

$$v \quad s,t \quad = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\pi ns}{l} \left(C_{1n} \sin \frac{\pi na_1 t}{l} - C_{2n} \sin \frac{\pi na_2 t}{l} + D_{1n} \cos \frac{\pi na_1 t}{l} - D_{2n} \cos \frac{\pi na_2 t}{l} \right) + v_y \quad s,t$$

где \overline{x}_{v} s,t и v_{v} s,t частные решения, которые записываются так

$$\frac{a_{1,2}^2 l^2}{2(1+e_0)\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{A_n^{(k)}}{k^2 a_{1,2}^2 - n^2 b^2} \sin \frac{\pi n b t}{l} + \frac{B_n^{(k)}}{k^2 a_{1,2}^2 - n^2 b^2} \cos \frac{\pi n b t}{l} \right) \sin \frac{k \pi s}{l}$$

Решения второго и третьего уравнений (2.2) представляют собой суперпозицию собственных продольно-крутильных волн и колебаний, а также вынужденных продольных и крутильных волн и колебаний с частотами поперечных.

Условия резонанса между отдельными модами для продольно-крутильных (k) и поперечных (n, m) колебаний запишутся в виде:

$$ka_{1,2} = b \ n-m \ , n > m \ , \qquad ka_{1,2} = b \ m-n \ , n < m \ , \qquad ka_{1,2} = b \ n+m$$

где k, m, n - натуральные числа, соответствующие номеру отдельных мод колебаний. Вынужденные частоты продольно-крутильных колебаний для условий струнных музыкальных инструментов находятся в области слышимости, а значит, влияют на качество звука.

Дифференциальные уравнения движений струн с навивкой в случае малых углов свивки $\alpha << 1$ таковы

$$\rho \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = A_1 \frac{\partial}{\partial s} \left[\frac{\partial \overline{x}}{\partial s} + \frac{1}{2 + e_0} \left(\frac{\partial y}{\partial s} \right)^2 \right] + \frac{A_3}{2 + e_0} \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial v}{\partial s} \right)^2; \quad \rho \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{A_1 e_0}{1 + e_0} \frac{\partial^2 y}{\partial s^2}; \quad m \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = A_2 \frac{\partial^2 v}{\partial s^2};$$
ГДе $A_1 = \sum_{i=1}^k EF_i$,
$$A_2 = \sum_{i=1}^k \left(\frac{EF_i r_i^2 e_0}{1 + e_0} + GI_{pi} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{2}{3} + \frac{2}{3} +$$

Уравнения для поперечной и крутильной составляющих в данном случае являются однородными. В то время как в уравнение для продольных движений каната входят компоненты поперечных и крутильных составляющих в качестве вынуждающей силы.

Также в главе II получены нелинейные дифференциальные уравнения крутильных и продольных движений тонкостенных труб с учетом их взаимовлияния. Найдены общие решения уравнений для случая кручения бесконечной трубы при воздействии с постоянной угловой скоростью. Получены линеаризованные уравнения крутильных и продольных колебаний. Показано, что вклады крутильных и продольных составляющих в динамическое нагружение одного порядка. Продольные составляющие деформаций испытывают разрыв на крутильных волнах. Уравнение продольных колебаний является неоднородным, крутильные составляющие играют роль вынуждающей силы для продольных. Возникновение крутильных движений приводит к появлению продольных. Колебания в продольном направлении происходят как на собственных частотах, так и на частотах крутильных колебаний.

Уравнения для крутильно-продольного движения тонкостенной трубы:

$$\rho \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial s} \left(G \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial s}}{1 + e} \right), \qquad \rho \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial s} \left(E e \frac{1 + \frac{\partial x}{\partial s}}{1 + e} \right)$$
 (2.3)

где
$$e = \sqrt{\left(1 + \frac{\partial x}{\partial s}\right)^2 + R^2 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial s}\right)^2} - 1$$
, а E, G - модули упругости и сдвига соответственно,

 ρ – плотность материала; D – площадь поперечного сечения.

Общие интегралы этой системы уравнений могут для случая постоянной скорости закручивания трубы быть получены

$$R\varphi = C_3 s + C_4 t$$
, $x + s = C_1 R\varphi + C_2 t$, $x + s = C_5 s + C_6 t$, $\left(\frac{s}{t}\right)^2 = a^2 = \frac{E}{\rho}$, $\left(\frac{s}{t}\right)^2 = \frac{G}{\rho}$

Полученные решения означают, что в трубе возникают лишь области постоянных деформаций. По трубе распространяются две упругие волны со скоростями b < a. Форма трубы в любой момент времени имеет следующий вид (рис.2.1): I, IV — области крутильно-продольных деформаций (при этом угол наклона линейных элементов к цилиндрической образующей трубы остается постоянным); II, V — области распространения продольных деформаций (за упругой волной); III, VI — области покоя.

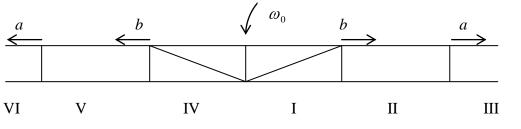


Рис. 2.1

Закон сохранения массы $\rho_2 D_2(b+u) = \rho_1 D_1(b+V_l)$ с учетом соотношения $\rho_0 == \rho_1 (1+e_1) \cos \gamma = \rho_2 (1+e_2)$ приводит к уравнению

$$\frac{b+u}{1+e_1} = \frac{b+V_l}{(1+e_2)\cos\gamma}$$
 (2.4)

здесь b - скорость фронта крутильной волны, ρ_i , e_i - плотности и деформации элементов в соответствующих областях рис.1, $V_i = V \cos \beta$ - продольная составляющая линейной скорости частиц трубы в области I, β - угол наклона вектора скорости частиц трубы к её цилиндрической образующей, при этом $V \sin \beta = R\omega$

Применение законов сохранения количества движения, момента импульса и приводит к следующим соотношениям на крутильной волне:

$$\rho_0(b+u)(V\cos\beta - u) = E(e_1\cos\gamma - e_2)(1+e_2)$$
 (2.5)

$$\rho_0(b+u)V\sin\beta = G\sin\gamma(1+e_1)(1+e_2)$$
 (2.6)

Имеет место кинематическое соотношение

$$V\sin(\beta - \gamma) = b\sin\gamma \tag{2.7}$$

Совместно с соотношением на продольной волне $u = a(e_2 - e_0)$ уравнения (2.4 -2.7) образуют замкнутую систему уравнений для определения β , γ , u, e_1 , e_2 .

Для случая воздействия с постоянной скоростью углового вращения ω_0 в направлении поперек образующих трубы (при условии $\omega_0 R << b\,$ и, следовательно, малых углов γ) данная система уравнений приводит к решениям

$$tg\gamma = \frac{\omega_0 R}{b}, \quad e_1 \approx \left(\frac{\omega_0 R}{b}\right)^2, \quad e_2 \approx \left(\frac{\omega_0 R}{a}\right)^2$$

Линеаризацию системы (2.3) можно провести асимптотическими методами. Выберем в качестве малого параметра динамическую составляющую полной деформации $\varepsilon = \tilde{e} = e - e_0$. Крутильные и продольные составляющие можно записать в виде асимптотического ряда по выбранному параметру

$$\varphi(s,t) = \varepsilon^{\frac{1}{2}} \Phi_1(s,t) + \varepsilon^{\frac{3}{2}} \Phi_2(s,t) + \dots \qquad \qquad \overline{\widehat{x}}(s,t) = \varepsilon X_1(s,t) + \varepsilon^2 X_2(s,t) + \dots$$

С учетом данных разложений уравнения для первого порядка приближения будут

$$\rho \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial t^2} = \frac{G}{1 + e_0} \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial s^2} (2.8) \qquad \qquad \rho \frac{\partial^2 X_1}{\partial t^2} = E \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial X_1}{\partial s} + \frac{R^2}{2(1 + e_0)} \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial s} \right)^2 \right) (2.9)$$

а уравнения для второго порядка приближения примут вид

$$\rho \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial t^2} = \frac{G}{(1 + e_0)} \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial \Phi_2}{\partial s} - \frac{1}{(1 + e_0)} \frac{\partial \Phi_1}{\partial s} \left(\frac{\partial X_1}{\partial s} + \frac{R^2}{2(1 + e_0)} \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial s} \right)^2 \right) \right)$$

$$\rho \frac{\partial^2 X_2}{\partial t^2} =$$

$$=E\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial X_{2}}{\partial s}+\frac{R^{2}}{(1+e_{0})}\frac{\partial \Phi_{1}}{\partial s}\frac{\partial \Phi_{2}}{\partial s}+\frac{1}{2(1+e_{0})}\left(\frac{\partial X_{1}}{\partial s}\right)^{2}-\frac{R^{2}}{2(1+e_{0})^{2}}\left(\frac{\partial \Phi_{1}}{\partial s}\right)^{2}\frac{\partial X_{1}}{\partial s}-\frac{R^{4}}{2(1+e_{0})^{3}}\left(\frac{\partial \Phi_{1}}{\partial s}\right)^{4}\right)$$

Очевидно, что уравнение (2.8) представляет собой традиционное уравнение крутильных колебаний, в то время как уравнение (2.9) для продольных составляющих представляет собой неоднородное уравнение. Причем роль неоднородности (или вынуждающей силы) играют крутильные составляющие. Решения уравнения (2.9) представляют собой суперпозицию собственных продольных волн и колебаний, а также вынужденных продольных волн и колебаний, действующих с частотами крутильных, при этом возможны резонансные явления. Продольная и крутильная составляющие в динамическое нагружение при кручении оказываются одного порядка.

Здесь же получены решения для динамических задач кручения тонкостенной трубы.

Полученная в диссертации система уравнений для задачи распространения поперечно-продольных волн и колебаний в предварительно напряженных мембранах имеет следующий вид

$$\rho \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = E' \frac{e_{0x} + \nu e_{0y}}{1 + e_{0x}} \frac{\partial^2 z}{\partial s^2} + E' \frac{e_{0y} + \nu e_{0x}}{1 + e_{0y}} \frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2}$$

$$E' = \frac{E}{1 - \nu^2}$$

$$\begin{split} \rho \frac{\partial^2 \overline{y}}{\partial t^2} &= E' \frac{\partial^2 \overline{y}}{\partial \eta^2} + E' \frac{e_{0x} + v e_{0y}}{1 + e_{0x}} \frac{\partial^2 \overline{y}}{\partial s^2} + E' \frac{e_{0y} + v e_{0x}}{1 + e_{0y}} \frac{\partial^2 \overline{y}}{\partial \eta^2} + v E' \frac{\partial^2 \overline{x}}{\partial s \partial \eta} + \frac{E'}{2(1 + e_{0y})} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial z}{\partial \eta} \right)^2 + \frac{v E'}{2 + e_{0x}} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial z}{\partial s} \right)^2 \\ \rho \frac{\partial^2 \overline{x}}{\partial t^2} &= E' \frac{\partial^2 \overline{x}}{\partial s^2} + E' \frac{e_{0y} + v e_{0x}}{1 + e_{0y}} \frac{\partial^2 \overline{x}}{\partial \eta^2} + E' \frac{e_{0x} + v e_{0y}}{1 + e_{0x}} \frac{\partial^2 \overline{x}}{\partial s^2} + v E' \frac{\partial^2 \overline{y}}{\partial s \partial \eta} + \frac{E'}{2 + e_{0x}} \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial z}{\partial s} \right)^2 + \frac{v E'}{2 + e_{0y}} \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial z}{\partial \eta} \right)^2 \end{split}$$

Первое уравнение системы - уравнение для поперечных составляющих, является однородным, в то время как второе и третье уравнения продольных колебаний составляющих по двум направлениям содержат неоднородности, которые отражают влияние поперечных составляющих.

Выражения для деформаций по главным направлениям таковы

$$e_{1} \approx e_{0x} + \frac{\partial \overline{x}}{\partial s} + \frac{1}{2 + e_{0x}} \left(\frac{\partial z}{\partial s} \right)^{2}$$

$$e_{2} \approx e_{0y} + \frac{\partial \overline{y}}{\partial \eta} + \frac{1}{2 + e_{0x}} \left(\frac{\partial z}{\partial \eta} \right)^{2}$$

Тогда главные напряжения могут быть выражены так

$$\sigma_{1} = E' \quad e_{1} + \nu e_{2} \quad = E' \left(e_{0x} + \nu e_{0y} + \frac{\partial \overline{x}}{\partial s} + \nu \frac{\partial \overline{y}}{\partial \eta} + \frac{1}{2 + e_{0x}} \left(\frac{\partial z}{\partial s} \right)^{2} + \frac{\nu}{2 + e_{0x}} \left(\frac{\partial z}{\partial \eta} \right)^{2} \right)$$

$$\sigma_{2} = E' \quad e_{2} + \nu e_{1} \quad = E' \left(e_{0y} + \nu e_{0x} + \frac{\partial \overline{y}}{\partial \eta} + \nu \frac{\partial \overline{x}}{\partial s} + \frac{1}{2 + e_{0x}} \left(\frac{\partial z}{\partial \eta} \right)^{2} + \frac{\nu}{2 + e_{0x}} \left(\frac{\partial z}{\partial s} \right)^{2} \right)$$

При этом продольные колебания происходят как на собственных частотах, так и на частотах поперечных колебаний. Этот вывод аналогичен выводу о наличии вынужденных продольных колебаний на поперечных частотах для натянутых струн.

Уравнения распространения волн сдвига и продольных волн в предварительно напряженных тонких пластинах получаются аналогично

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = b^2 \frac{\partial^2 y}{\partial s^2}, \qquad \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial}{\partial s} \left[\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{(1-v)}{2(1+e_{0x})(1+v)^2} (\frac{\partial y}{\partial s})^2 \right]$$

где
$$a^2 = \frac{E'}{\rho_0}$$
, $b^2 = \frac{E'}{2\rho(1+\nu)}$ - квадраты скоростей распространения продольных и

сдвиговых волн.

Второе уравнение распространения продольных волн является неоднородным. Из него видно, что сдвиговые составляющие являются вынуждающей силой для продольных. Можно показать, что для ограниченных тонких пластин продольные колебания происходят как на собственных частотах, так и на частотах сдвиговых колебаний.

Наличие вынужденных продольных колебаний на частотах поперечных колебаний характерно для многих задач для тел различной геометрии при наличии в них предварительной деформации, которая может быть обусловлена различными причинами: растягивающими усилиями, приложенными к границам твердого тела, или распределенной нагрузкой, например, собственным весом.

Нелинейные уравнения продольных и поперечных движений тяжелого растяжимого каната

$$\rho \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial s} T \cos \theta , \qquad \rho \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial s} T \sin \theta - g \rho$$

Статическое положение равновесия определяется выражениями

$$x_{c} = \frac{T_{1}}{E}s + \frac{T_{1}}{g\rho}\ln\left(\left(\frac{g\rho s + T_{0}\sin\theta_{0}}{T_{0}\cos\theta_{0}}\right) + \sqrt{1 + \left(\frac{g\rho s + T_{0}\sin\theta_{0}}{T_{0}\cos\theta_{0}}\right)^{2}}\right) + X_{0}$$

$$y_{c} = \frac{T_{1}}{E}s\left(\frac{g\rho s + T_{0}\sin\theta_{0}}{T_{0}\cos\theta_{0}}\right) + \frac{T_{1}}{g\rho}\sqrt{\left(\frac{g\rho s + T_{0}\sin\theta_{0}}{T_{0}\cos\theta_{0}}\right)^{2} + 1 + Y_{0}}$$

где T_0 , T_1 - натяжения в точке подвеса и в нижней точке каната, θ_0 - угол наклона каната в точке подвеса. Здесь X_0 и Y_0 определяются из граничных условий.

В случае малых колебаний вблизи положения равновесия уравнения для динамических составляющих продольных и поперечных смещений x_{ε} , y_{ε} таковы

$$\rho\frac{\partial^2 x_\varepsilon}{\partial t^2} = E\frac{\partial}{\partial s} \left(L_1\frac{\partial x_\varepsilon}{\partial s} + L_2\frac{\partial y_\varepsilon}{\partial s}\right) \qquad \rho\frac{\partial^2 y_\varepsilon}{\partial t^2} = E\frac{\partial}{\partial s} \left(L_2\frac{\partial x_\varepsilon}{\partial s} + L_3\frac{\partial y_\varepsilon}{\partial s}\right)$$
 где $L_1 = \frac{e_c}{1+e_c} + \frac{\left(1+\frac{dx_c}{ds}\right)^2}{1+e_c}, \qquad L_2 = \frac{\left(1+\frac{dx_c}{ds}\right)\frac{dy_c}{ds}}{1+e_c}, \qquad L_3 = \frac{e_c}{1+e_c} + \frac{\left(\frac{dy_c}{ds}\right)^2}{1+e_c}$ е $_c = \sqrt{\left(1+\frac{dx_c}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy_c}{ds}\right)^2}$ - статическая часть деформации.

Очевидно, что частицы тяжелого каната находятся в совместном поперечно-продольном движении.

В третьей главе рассмотрено влияние жесткости на процесс распространения продольно-поперечных волн и колебаний в предварительно растянутых тонких стержнях и струнах. Наличие малой жесткости, характерной для музыкальных струн, приводит к незначительному изменению частот всего спектра поперечно-продольных колебаний и к существенному изменению формы струны в местах соударения, креплений и на фронте поперечной волны. При этом продольные колебания также происходят как на собственных частотах, так и на частотах поперечных колебаний. Возможны резонансные явления.

Уравнения движения растянутого стержня имеют вид

$$\rho \frac{\partial^{2} y}{\partial t^{2}} = \frac{Ee_{0}}{1 + e_{0}} \frac{\partial^{2} y}{\partial s^{2}} - \frac{EJ}{1 + e_{0}} \frac{\partial^{4} y}{\partial s^{4}} + \frac{\rho J}{F(1 + e_{0})^{2}} \frac{\partial^{4} y}{\partial t^{2} \partial s^{2}} + \frac{q_{\tau}}{1 + e_{0}} \frac{\partial y}{\partial s} + q_{n} + \frac{\partial \mu}{\partial s}$$

$$\rho \frac{\partial^{2} \tilde{x}}{\partial t^{2}} = E \frac{\partial^{2} \tilde{x}}{\partial s^{2}} + Z_{1};$$

$$E = \frac{\partial^{2} (\partial y)^{2}}{\partial t^{2}} + \frac{\partial^{2} (\partial y)^{2}}{\partial s^{2}} + \frac{\partial^{2} (\partial y)^{2}}{\partial$$

$$Z_{1} = \frac{E}{2(1+e_{0})^{2}} \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial y}{\partial s}\right)^{2} - \frac{1}{(1+e_{0})^{2}} \frac{\partial}{\partial s} \left(N \frac{\partial y}{\partial s}\right) + q_{\tau} - \frac{q_{n}}{(1+e_{0})} \frac{\partial y}{\partial s}, \quad N = \frac{EJ}{F(1+e_{0})} \frac{\partial^{3} y}{\partial s^{3}} - \rho \frac{J}{F(1+e_{0})} \frac{\partial^{3} y}{\partial t^{2} \partial s} - \mu$$

s - лагранжева координата, совпадающая с декартовой продольной координатой, отсчитываемой по направлению первоначально прямолинейного нерастянутого стержня, x, y — соответственно продольное и поперечное смещения срединной линии, T, N и q_{τ} , q_n - соответственно тангенциальное и нормальное усилия и погонные нагрузки (линейная плотность внешних сил), ρ - плотность, θ - угол наклона срединной линии к первоначальному направлению стержня, F - площадь его

поперечного сечения, J - его момент инерции, E - модуль Юнга, μ - линейная плотность внешних моментов. Предполагается, что поперечное сечение симметрично относительно срединной линии.

Для задачи распространения поперечных волн и колебаний для тонкого стержня или струны с малой изгибной жесткостью в случае поперечного удара с постоянной скоростью V_0 было найдено решение в виде бегущих волн. В частности, до первого отражения от границы

$$\begin{split} y(s,t) &= V_0 \Bigg(t - \frac{s}{a_0 \sqrt{e_1}} \Bigg) H \Bigg(t - \frac{s}{a_0 \sqrt{e_1}} \Bigg) + \frac{\alpha V_0 l}{e_1 a_0} H \Bigg(t - \frac{s}{a_0 \sqrt{e_1}} \Bigg) - \frac{\alpha V_0 l}{e_1 a_0} \exp \Bigg(- \frac{\sqrt{e_1}}{\alpha l} s \Bigg) + \\ &+ \frac{\alpha V_0 l}{e_1 a_0} \exp \Bigg[- \frac{e_1 a_0}{\alpha l} \Bigg(\frac{s}{a_0 \sqrt{e_1}} - t \Bigg) \Bigg] \Bigg(1 - H \Bigg(t - \frac{s}{a_0 \sqrt{e_1}} \Bigg) \Bigg) \\ \text{ГДе } \alpha^2 &= \frac{J}{(1 + e_0) l^2 F} \,, \ e_1 = \frac{e_0}{1 + e_0} \,, \ a_0 = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \end{split}$$

Волновая картина представляет собой бегущую со скоростью $b=a_0\sqrt{e_1}$ поперечную волну. Влияние жесткости сказывается в окрестности точки удара, где возникает стационарный изгиб, и в малой области за бегущей поперечной волной. В окрестностях этих точек существенное влияние оказывает даже малая жесткость, приводя к отсутствию излома. При этом размер этих областей $\Delta = \alpha l/\sqrt{e_1}$ составляет 2-3 диаметра струны. Решение задачи об ударе без учета жесткости можно рассматривать как решение для внешнего асимптотического разложения уравнений динамики струны при наличии малой жесткости. Построение внутреннего асимптотического разложения соответствующих уравнений изменяет картину геометрии струны в окрестностях точки удара и бегущей поперечной волны.

В общем виде решение задачи поперечных колебаний для ограниченной струны с учетом жесткости таково

$$y(s,t) = \sum_{n} \left(A_n \sin \frac{\omega_n bt}{l} + B_n \cos \frac{\omega_n bt}{l} \right) \left(\sin \frac{\omega_n s}{\sqrt{e_1}} - \frac{\omega_n \alpha}{e_1} P_n(s) \right) = \sum_{n} \left(A_n \sin \frac{\omega_n bt}{l} + B_n \cos \frac{\omega_n bt}{l} \right) \left(\sin \frac{\omega_n s}{l\sqrt{e_1}} - \frac{\omega_n \alpha}{e_1} \sum_{k} F_k \sin \frac{\omega_k s}{l\sqrt{e_1}} \right) \left(\sin \frac{\omega_n s}{l} - \frac{\omega_n \alpha}{e_1} \sum_{k} F_k \sin \frac{\omega_k s}{l\sqrt{e_1}} \right) \left(\sin \frac{\omega_n s}{l} - \frac{\omega_n \alpha}{e_1} \sum_{k} F_k \sin \frac{\omega_k s}{l\sqrt{e_1}} \right) \left(\sin \frac{\omega_n s}{l} - \frac{\omega_n \alpha}{e_1} \sum_{k} F_k \sin \frac{\omega_k s}{l\sqrt{e_1}} \right) \left(\sin \frac{\omega_n s}{l} - \frac{\omega_n \alpha}{e_1} \sum_{k} F_k \sin \frac{\omega_k s}{l\sqrt{e_1}} \right) \left(\sin \frac{\omega_n s}{l} - \frac{\omega_n \alpha}{e_1} \sum_{k} F_k \sin \frac{\omega_k s}{l\sqrt{e_1}} \right) \left(\sin \frac{\omega_n s}{l} - \frac{\omega_n \alpha}{e_1} \sum_{k} F_k \sin \frac{\omega_k s}{l\sqrt{e_1}} \right) \left(\sin \frac{\omega_n s}{l} - \frac{\omega_n \alpha}{e_1} \sum_{k} F_k \sin \frac{\omega_k s}{l\sqrt{e_1}} \right) \left(\sin \frac{\omega_n s}{l} - \frac{\omega_n \alpha}{e_1} \sum_{k} F_k \sin \frac{\omega_k s}{l\sqrt{e_1}} \right) \left(\sin \frac{\omega_n s}{l} - \frac{\omega_n \alpha}{e_1} \sum_{k} F_k \sin \frac{\omega_k s}{l\sqrt{e_1}} \right) \left(\sin \frac{\omega_n s}{l} - \frac{\omega_n \alpha}{e_1} \sum_{k} F_k \sin \frac{\omega_k s}{l\sqrt{e_1}} \right) \left(\sin \frac{\omega_n s}{l} - \frac{\omega_n \alpha}{e_1} \sum_{k} F_k \sin \frac{\omega_k s}{l\sqrt{e_1}} \right) \left(\sin \frac{\omega_n s}{l} - \frac{\omega_n \alpha}{e_1} \sum_{k} F_k \sin \frac{\omega_n s}{l} \right) \left(\sin \frac{\omega_n s}{l} - \frac{\omega_n \alpha}{e_1} \sum_{k} F_k \sin \frac{\omega_n s}{l} \right) \left(\sin \frac{\omega_n s}{l} - \frac{\omega_n \alpha}{e_1} \sum_{k} F_k \sin \frac{\omega_n s}{l} \right) \left(\sin \frac{\omega_n s}{l} - \frac{\omega_n \alpha}{e_1} \sum_{k} F_k \sin \frac{\omega_n s}{l} \right) \left(\sin \frac{\omega_n s}{l} - \frac{\omega_n \alpha}{e_1} \sum_{k} F_k \sin \frac{\omega_n s}{l} \right) \left(\sin \frac{\omega_n s}{l} - \frac{\omega_n \alpha}{e_1} \sum_{k} F_k \sin \frac{\omega_n s}{l} \right) \left(\sin \frac{\omega_n s}{l} - \frac{\omega_n \alpha}{e_1} \sum_{k} F_k \sin \frac{\omega_n s}{l} \right) \left(\sin \frac{\omega_n s}{l} - \frac{\omega_n \alpha}{e_1} \sum_{k} F_k \sin \frac{\omega_n s}{l} \right) \left(\sin \frac{\omega_n s}{l} - \frac{\omega_n \alpha}{e_1} \sum_{k} F_k \sin \frac{\omega_n s}{l} \right) \left(\sin \frac{\omega_n s}{l} - \frac{\omega_n \alpha}{e_1} \sum_{k} F_k \sin \frac{\omega_n s}{l} \right) \left(\sin \frac{\omega_n s}{l} - \frac{\omega_n s}{l} \right) \left(\sin \frac{$$

где F_k - коэффициенты разложения в ряд по функциям $S_{0k}(s) = s \operatorname{in} \frac{\omega_k s}{\sqrt{e_1}}$ функций

$$P_n(s) = \cos\frac{\omega_n s}{l\sqrt{e_1}} + \exp\left(-\frac{\sqrt{e_1}}{l\alpha}s\right) - (-1)^n \exp\left(-\frac{\sqrt{e_1}}{l\alpha}(l-s)\right), \ \omega_n \approx \pi n\sqrt{e_1} + 2\alpha\pi n \ , \ \omega_n b/l - (-1)^n \exp\left(-\frac{\sqrt{e_1}}{l\alpha}(l-s)\right) + (-1)^n \exp\left(-\frac$$

частоты поперечных колебаний.

Из решения (второго и третьего члена в выражении для $P_n(s)$) видно, что влияние жесткости на поперечные колебания свободной струны сказывается в местах заделки, зона влияния $\Delta = \frac{\alpha l}{\sqrt{e_1}}$ также порядка 2-3 диаметров.

В работе получено уравнение продольных колебаний закрепленной струны

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 x}{\partial s^2} + \frac{1}{2(1+e_0)} \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial y}{\partial s}\right)^2 + \frac{\alpha^2}{(1+e_0)^2} \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial^3 y}{\partial s^3} \frac{\partial y}{\partial s} - \frac{\partial^3 y}{\partial t^2 \partial s} \frac{\partial y}{\partial s}\right)$$

Общее решение
$$x s,t = \sum_{n=1}^{\infty} \left(C_{12n} \sin \frac{\omega_n bt}{l} + D_{12n} \cos \frac{\omega_n bt}{l} \right) \sin \frac{\omega_n s}{l} + x_y s,t$$

При этом частные решения таковы

$$x_{y} s,t = \frac{1}{2(1+e_{0})} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{A_{k}^{(n)}}{\pi^{2}n^{2} - \omega_{k}^{2}} \sin \omega_{k} t + \frac{B_{k}^{(n)}}{\pi^{2}n^{2} - \omega_{k}^{2}} \cos \omega_{k} t \right) \sin \pi ns$$

Таким образом, вынужденные продольные колебания, определяемые частными решениями, будут происходить на частотах, равных исходным частотам поперечных колебаний. В том случае, когда частота отдельных мод собственных продольных колебаний совпадает с частотой вынужденных, то есть при условии $\omega_k = \frac{\pi k a_0 \sqrt{e_1}}{l} + \frac{2\alpha \pi k a_0}{l^2} = \frac{\pi n a_0}{l},$ возникает явление резонанса между этими формами колебаний.

В главе 4 экспериментально показано существование вынужденных продольных колебаний на частотах поперечных колебаний для гибких деформируемых струн. Вклад продольных составляющих в динамическое нагружение струны и элементов крепления присоединенных к ней деталей оказывается одного порядка с поперечными составляющими. Экспериментально показано явление резонанса между модами собственных продольных колебаний и модами поперечных колебаний.

Установка и схема эксперимента представлена на Рис.4.1 и 4.2.

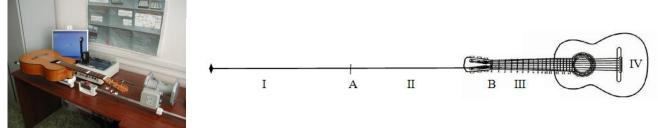


Рис. 4.2. Схема установки. (Части струны: I – в которой возможны поперечные колебания, II- между креплениями A, B, III – закрепленная на деке, IV – дека гитары.)

В силу особой малости амплитуды продольных колебаний и сложности в определении динамических составляющих напряжений, возникающих в струне в период колебаний, в качестве присоединенного элемента использовалась резонаторная дека гитары. Длинная струна закрепляется таким образом, что один её конец присоединен к деке, а другой – жестко на колке для возможности регулировки начального натяжения. Струна разделена на три части двумя жесткими неподвижными креплениями, которые позволяют ей двигаться на них в продольном направлении, не испытывая при этом поперечных движений.

Эксперимент заключается в том, чтобы сравнить натяжения, возникающие в струне, динамическое нагружение, оказываемое на присоединенный к ней элемент и возникающие спектры колебаний в двух случаях: 1) при поперечных колебаниях струны, то есть при возбуждении части III струны, находящейся на

гитаре 2) при вынужденном продольном движении струны, источником которого являются поперечные колебания в части струны I, которая не прикреплена к деке.

В первом случае часть струны III длины $l_3 = 65\,c_M$, закрепленная на деке, возбуждается поперечным ударом, и поперечные воздействия передаются на деку. Во втором - две части струны II, III (часть $l_3 = 65\,c_M$, которая прикреплена к деке, и часть, которая находится между разделительными креплениями, расстояние между которыми l_2) демпфируются для того, чтобы исключить развитие в них поперечных колебаний. Продольные колебания при этом не ограничиваются. Часть струны I длины $l_1 = 65\,c_M = l_3$ может свободно колебаться в поперечном направлении. Она и является источником вынужденных продольных колебаний на частотах поперечных колебаний.

Исследовалась зависимость амплитуды звука, издаваемого декой, а также его частотных характеристик от прикладываемого динамического воздействия.

На Рис.4.3-4.6 представлены некоторые результаты эксперимента. Было установлено, что в случае поперечного и случае поперечно-продольного воздействий амплитуды колебаний различаются незначительно. Спектры колебаний для различных случаев практически одинаковы для струны с большим модулем упругости. Было проанализировано влияние модуля упругости на передачу продольных колебаний в деку.

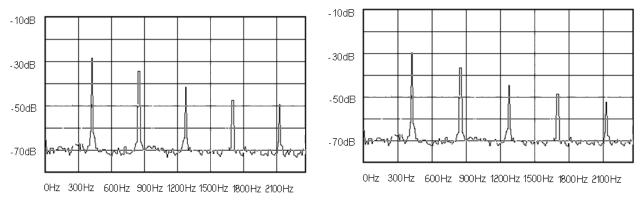


Рис.4.3 Поперечного воздействия в части III. Рис.4.4 Поперечно-продольного воздействия в части I. Основная частота 440 Гц (нота Ля первой октавы).

Обобщенный результат отношения амплитуд для стальных струн $\frac{A_{\rm l}}{A_{\rm 3}} = 0,96\,$ и

для нейлоновых струн $\frac{A_{\rm l}}{A_{\rm 3}}$ = 0,79 для различных натяжений говорит о том, что продольные колебания струны являются источником механический колебаний прикрепленного к ней элемента.

Условием **резонанса** для частот поперечных и продольных колебаний в настоящем эксперименте является выполнение следующих соотношений

$$\frac{n}{l_1 + l_2 + l_3} = \frac{\sqrt{e_0 k}}{l_1 \sqrt{1 + e_0}}$$

где $l_1+l_2+l_3=L$ - длина струны, $n\in {1,2,...},\ k\in {1,2,...}$ - целые числа.

Обнаружено резонансное усиление между этими гармониками продольных колебаний и первой, второй и третьей k=1,2,3 гармониками поперечных. Например, для нейлоновой струны при $L=380\,\mathrm{cm}$ первые моды продольных колебаний имеют частоты $\omega_1=1174\,\Gamma u,\omega_2=2348\,\Gamma u$. На Рис.4.5 видно усиление амплитуды колебаний на частоте первой гармоники.

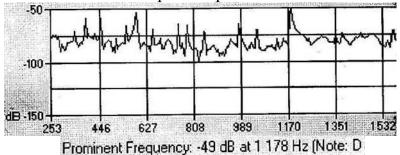


Рис.4.5. Резонансное усиление амплитуды колебаний на частоте первой моды продольных колебаний.

Такой же результат был получен и для стальной струны. На Рис.4.6 представлен результат усиления амплитуды в области третьей гармоники, частота которой соответствует первой моде продольных колебаний.

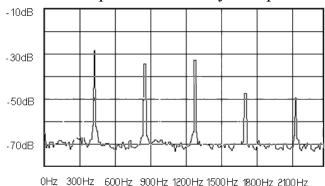


Рис.4.6. Резонансное усиление амплитуды третьей гармоники на частоте первой моды продольных колебаний 1320 Гп.

Стоит отметить, что наличие сильных обертонов благоприятно сказывается на звучании музыкального инструмента.

В главе 5 рассмотрены задачи управления колебаниями растянутой струны при помощи управления граничными режимами первого и второго рода.

В общем случае начально-краевая задача продольных колебаний струны длины l для граничных условий первого рода такова

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 x}{\partial s^2} + f_y(s,t), & f_y(s,t) = \frac{a^2}{2 + e_0^2} \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial y}{\partial s} \right)^2 \\ x(0,t) = v_1(t), & x(l,t) = v_2(t), & x(s,0) = \varphi(s), & x_t(s,0) = \psi(s) \end{cases}$$

$$(5.1)$$

Условия согласования $v_1(0) = \varphi(0), \ v_2(0) = \varphi(l), \ v_{1t}(0) = \psi(0), \ v_{2t}(0) = \psi(l)$.

Здесь неоднородные члены $f_y(s,t)$ в уравнении определяются из решения задачи для поперечных составляющих.

Задача управления продольными колебаниями струны - за некоторый отрезок времени T перевести струну из состояния с распределением продольных

составляющих координат и скоростей частиц струны $x(s,0) = \varphi(s), x_t(s,0) = \psi(s)$, в состояние с координатами и скоростями $x(s,T) = \overline{\varphi}(s), x_t(s,T) = \overline{\psi}(s)$.

1. Задача управления продольными колебаниями струн продольным граничным режимом на одном конце s = 0 при закрепленном другом s = l.

Представим решение для (5.1) в виде суммы решений следующих двух начально-краевых задач $x(s,t) = x_1(s,t) + x_2(s,t)$

$$\begin{cases}
\frac{\partial^{2} x_{1}}{\partial t^{2}} = a^{2} \frac{\partial^{2} x_{1}}{\partial s^{2}} + f_{y}(s,t), & f_{y}(s,t) = \frac{a^{2}}{2 + e_{0}} \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial y}{\partial s} \right)^{2} \\
x_{1}(0,t) = 0, & x_{1}(l,t) = 0, & x_{1}(s,0) = \varphi(s), & x_{1t}(s,0) = \psi(s)
\end{cases}$$

$$(5.2)$$

$$\begin{cases}
\frac{\partial^{2} x_{2}}{\partial t^{2}} = a^{2} \frac{\partial^{2} x_{2}}{\partial s^{2}} \\
x_{2}(0,t) = v_{1}(t), & x_{2}(l,t) = 0 \\
x_{2}(s,0) = 0, & x_{2t}(s,0) = 0
\end{cases}$$

$$(5.3)$$

При условиях согласования для задачи (5.3) $v_1(0) = 0$, при этом полагаем $v_2(t) \equiv 0$. Решение для первой задачи может быть найдено методами математической физики. Чтобы решить задачу управления для системы (5.1), достаточно за время T перевести решение системы (5.3) из состояния покоя $x_2(s,0) = 0$, $x_{2t}(s,0) = 0$ в состояние $x_2(s,T) = \bar{\varphi}(s) - x_1(s,T) = \mathscr{Y}(s)$, $x_{2t}(s,T) = \bar{\psi}(s) - x_{1t}(s,T) = \mathscr{Y}(s)$.

Например, для случая $0 < T < \frac{l}{a}$

$$v_{1}(t) = \frac{1}{2} \left[\int_{T}^{t} \psi(z)dz + \varphi(t) - \varphi(T) + \int_{\frac{l}{a}-T}^{t} \psi(z)dz + \varphi(l-aT) + \int_{T-t}^{1/a} \psi(z)dz + \psi(aT-at) - \int_{0}^{1/a-T} \psi(z)dz - \psi(l-aT) + \psi(0) \right]$$

при определенных условиях согласования между начальными и финальными условиями.

2. Задача управления продольными колебаниями струн поперечным граничным режимом на одном конце s = 0 при закрепленном другом s = l.

В силу линейности задачи для y(s,t) здесь рассмотрим только влияние поперечного граничного режима $y(0,t)=\mu(t)$ при нулевых начальных отклонениях и скоростях поперечных составляющих. Выберем интервал времени $T=\frac{l}{a}$. Для реальных материалов b < a, для выполнения финальных условий при $0 < T = \frac{l}{a} < \frac{l}{b}$ решение уравнения поперечных колебаний представим в виде бегущей волны $y(s,t)=\mu\bigg(t-\frac{s}{b}\bigg)H\bigg(t-\frac{s}{b}\bigg)=\underline{\mu}\bigg(t-\frac{s}{b}\bigg)$, (далее черточки опущены). Выражение для $\frac{f_y(s,t)}{a}$ представляется так $\frac{f_y(s,t)}{a}=-\frac{a}{(1+e_0)^2b^3}\mu'\bigg(t-\frac{s}{b}\bigg)\mu''\bigg(t-\frac{s}{b}\bigg)$.

Для определения граничного режима $y(0,t) = \mu(t)$ достаточно найти решение для производной $\mu'(t)$. Воспользуемся методом характеристик.

Уравнения характеристик и условия на характеристиках для уравнения продольных колебаний таковы: $ds = \pm adt \qquad dx_t = \pm adx_s \pm \frac{f_y(s,t)}{a}ds$

где $x_t = \frac{\partial x}{\partial t}$ - скорости и $x_s = \frac{\partial x}{\partial s}$ продольные составляющие деформации частиц струны.

Начальные и финальные условия для смещений и скоростей уравнения продольных колебаний могут быть заменены на начальные и финальные условия для продольных компонент скоростей и деформаций

$$\frac{\partial x}{\partial t}(s,0) = \psi(s) , \ \frac{\partial x}{\partial s}(s,0) = \varphi_s(s) , \ \frac{\partial x}{\partial t}(s,T) = \overline{\psi}(s) , \ \frac{\partial x}{\partial s}(s,T) = \overline{\varphi}_s(s)$$

Положим также $\frac{\partial x}{\partial t}(0,t) = \frac{\partial x}{\partial t}(l,t) = 0$.

Для случая bT < s < l из условий на характеристиках получаем следующую систему уравнений

$$\begin{cases} x_{t} s, T + x_{t} l - s, 0 = a x_{s} s, T - x_{s} l - s, 0 - \frac{a^{2}}{(1 + e_{0})^{2} b(a^{2} - b^{2})} \left[\mu'^{2} \left(\frac{l - s}{a} \right) - \mu'^{2} 0 \right] \\ x_{t} s, T + x_{t} l - s, 0 = -a x_{s} s, T - x_{s} l - s, 0 \end{cases}$$
(5.4)

Для случая s < bT из условий на характеристиках получаем после вычисления интегралов и преобразований

$$\begin{cases} x_{t} \ s, T + x_{t} \ l - s, 0 + a \ x_{s} \ s, T - x_{s} \ l - s, 0 = -\frac{a^{2}}{2(1 + e_{0})^{2}b^{2}(a + b)} \left[\mu'^{2} \left(\frac{l}{a} - \frac{s}{b} \right) - \mu'^{2} \ 0 \right] \\ x_{t} \ s, T + x_{t} \ l - s, 0 - a \ x_{s} \ s, T - x_{s} \ l - s, 0 = \\ = \frac{1}{2(1 + e_{0})^{2}b^{2}(a - b)} \left[\mu'^{2} \left(\frac{l}{a} - \frac{s}{b} \right) - \mu'^{2} \left(\frac{l - s}{a} \right) \right] + \frac{a^{2}}{2(1 + e_{0})^{2}b^{2}(a + b)} \left[\mu'^{2} \left(\frac{l - s}{a} \right) - \mu'^{2} \ 0 \right] \end{cases}$$

$$(5.5)$$

Необходимыми условиями существования единственного решения μ' t для задачи граничного управления являются следующие условия согласования для функций $\bar{\psi}(s)$, $\psi(s)$, $\bar{\varphi}_s(s)$, $\varphi_s(s)$ полученные из систем (5.4) и (5.5) и условий закрепления

$$\bar{\psi}(l) = \psi(l) = 0$$

$$\overline{\psi}(s) + \psi(l-s) + a\overline{\varphi}_s(s) - a\varphi_s(l-s) = 0$$
 при $bT < s < l$

$$b\bigg[\overline{\psi}\bigg(\frac{b}{a}s\bigg) + \psi\bigg(l - \frac{b}{a}s\bigg) + a\overline{\varphi}_s\bigg(\frac{b}{a}s\bigg) - a\varphi_s\bigg(l - \frac{b}{a}s\bigg)\bigg] =$$
 при $bT < s < b$

Из первого уравнения системы (5.5) получаем решение

$$\mu'^{2}\left(T - \frac{l - at}{b}\right) = -\frac{2(1 + e_{0})^{2}b^{2}(a + b)}{a^{2}} \overline{\psi}(l - at) + \psi(at) + a\overline{\varphi}_{s}(l - at) - a\varphi_{s}(at) + \psi^{2}(0)$$

при l - at < bT

Подставляя данное решение во второе уравнение системы (5.5), а также из первого уравнения системы (5.4) получим выражение для функции, определяющей граничный режим

$$\mu'^2 \ t \ = -\frac{(1+e_0)^2b(a^2-b^2)}{a^2} \ \overline{\psi}(l-at) - \psi(at) - a\overline{\phi}_s(l-at) + a\phi_s(at) \ + \psi^2(0) \ \text{при} \ t < T\bigg(1-\frac{b}{a}\bigg)$$

$${\mu'}^2 \ t \ = -\frac{2(1+e_0)^2b(a+b)}{a} \ \overline{\psi}(l-at) + \psi(at) + b\overline{\phi}_s(l-at) - b\phi_s(at) \ + \psi^2(0) \ \ \text{при} \ T\bigg(1-\frac{b}{a}\bigg) < t < T$$

Для получения решения необходимо потребовать положительной определенности для μ'^2 t . Это условие можно получить из построения решения.

Выражение для $\mu \ t$ получается из интеграла $\mu \ t = \int_{0}^{t} \mu' \ z \ dz$.

Аналогичным способом получены решения задач граничного управления для других значений T, а также для граничных условий второго рода, когда управление осуществляется силами, приложенными к концам струны. B частности, для $T = \frac{2l}{a}$

$$\mu'^2 \quad t = \psi^2(0) + \frac{(1+e_0)(a^2-b^2)}{a} \quad \overline{\psi}(at) - \psi(at) + a\overline{\phi}_s(at) - a\phi_s(at) \qquad \text{при } 0 < t < \frac{b}{a}T$$

$$\mu'^2 \quad t = \psi^2(0) + \frac{(1+e_0)b(a^2-b^2)}{a^2} \quad \overline{\psi}(at) - \psi(at) + a\overline{\phi}_s(at) - a\phi_s(at) \qquad \text{при } T \frac{b}{a} < t < \frac{T}{2}$$

$$\mu'^2 \quad t = \psi^2(0) + \frac{(1+e_0)b(a^2-b^2)}{a^2} - \overline{\psi}(2l-at) + \psi(2l-at) + a\overline{\phi}_s(2l-at) - a\phi_s(2l-at) \quad \text{при } \frac{T}{2} < t < T \left(1 - \frac{b}{a}\right)$$

$$\mu'^2 \quad t = \psi^2(0) + \frac{(1+e_0)(a^2-b^2)}{a} \quad \overline{\psi}(2l-at) - \psi(2l-at) + a\overline{\phi}_s(2l-at) - a\phi_s(2l-at) \quad \text{при } T \left(1 - \frac{b}{a}\right) < t < T$$

Условия согласования между начальными и финальными условиями

$$\begin{aligned} 2\overline{\psi}(bT-bt) - 2\psi(bT-bt) &= \overline{\psi}(at) - \psi(at) + a\overline{\phi}_s(at) - a\phi_s(at) \quad \text{при } T \frac{b}{a} < t < \frac{T}{2} \\ 2\overline{\psi}(bT-bt) - 2\psi(bT-bt) &= -\overline{\psi}(2l-at) + \psi(2l-at) + a\overline{\phi}_s(2l-at) - a\phi_s(2l-at) \quad \text{при } \frac{b}{a}T < t < T \left(1 - \frac{b}{a}\right) \\ \mu'^2 \quad 0 \quad &= \mu'^2(T) \end{aligned}$$

В главе 5 также рассмотрены задачи управления поперечными колебаниями с помощью продольного смещения на одном из концов струны.

В общем случае малых колебаний решения для продольных и поперечных составляющих могут быть представлены в виде асимптотического ряда по малому параметру

$$x(s,t) = e_0 s + \delta(t) s + \varepsilon^{\alpha} (X_1 + \varepsilon X_2 + \dots) = e_0 s + \delta(t) s + \overline{x}$$
$$y(s,t) = \varepsilon^{\beta} (Y_1 + \varepsilon Y_2 + \dots)$$

где ε - характерная динамическая составляющая деформации струны, которую выбираем в качестве малого параметра разложения. $\delta(t)$ - продольное смещение границ. Значения параметров разложения определяются из анализа асимптотик решения как $\alpha=1$ и $\beta=\frac{1}{2}$.

Уравнения первого порядка разложения

$$\rho \frac{\partial^2 Y_1}{\partial t^2} = E(e_0 + \delta(t)) \frac{\partial^2 Y_1}{\partial s^2}$$

$$\rho \frac{\partial^2 X_1}{\partial t^2} = E \frac{\partial}{\partial s} \left[\frac{\partial X_1}{\partial s} + \frac{1}{2(1 + e_0 + \delta(t))^2} \left(\frac{\partial Y_1}{\partial s} \right)^2 \right]$$

Уравнения второго порядка разложения

$$\rho \frac{\partial^{2} Y_{2}}{\partial t^{2}} = E(e_{0} + \delta(t)) \frac{\partial^{2} Y_{2}}{\partial s^{2}} + E \frac{\partial}{\partial s} \left[\frac{1}{(1 + e_{0} + \delta(t))^{2}} \frac{\partial X_{1}}{\partial s} \frac{\partial Y_{1}}{\partial s} + \frac{1}{2(1 + e_{0} + \delta(t))^{3}} (\frac{\partial Y_{1}}{\partial s})^{3} \right]$$

$$\frac{\partial^{2} X_{2}}{\partial t^{2}} = a^{2} \frac{\partial}{\partial s} \left[\frac{\partial X_{2}}{\partial s} + \frac{1}{(1 + e_{0} + \delta(t))^{2}} \frac{\partial Y_{1}}{\partial s} \frac{\partial Y_{2}}{\partial s} - \frac{1}{(1 + e_{0} + \delta(t))^{3}} \frac{\partial X_{1}}{\partial s} (\frac{\partial Y_{1}}{\partial s})^{2} - \frac{3}{8(1 + e_{0} + \delta(t))^{4}} (\frac{\partial Y_{1}}{\partial s})^{4} \right]$$

В случае решения задач управления поперечными колебаниями можно решение свести к управлению отдельными модами. Если продольное смещение представляет собой некоторую периодическую функцию $\bar{\delta}(t) = \gamma \cos \Omega t$, то уравнение определения амплитуд для $Y_1(s,t)$ является уравнением типа Матье.

Например, для n = 1 $T_1'' + \omega_1^2 (1 + \sigma + \gamma_1 \cos \Omega t) T_1 = 0$

Заменой переменных это уравнение можно представить как

$$T'' = -uT$$
 $1 \le u \le 4$, u - корректирующая функция

Задачу управления поставим так: перевести систему из состояния T(0) = 1, T'(0) = 0 в состояние $T(\tau) = \alpha$, $T'(\tau) = 0$ за время τ , которое является полупериодом колебаний. Решение в данной постановке известно как решение задачи о параметрическом резонансе.

При этом корректирующая функция определяется так $u = \begin{cases} 1, & sign(\psi_2 T) = 1 \\ 4, & sign(\psi_2 T) = -1 \end{cases}$ где $\psi_1, \; \psi_2$ - сопряженные переменные, удовлетворяющие уравнениям $\begin{cases} \psi_1' = u\psi_2 \\ \psi_2' = -\psi_1 \end{cases}$

В главе 6 решены динамические задачи возбуждения и свободных поперечно-продольных колебаний струн щипковых и клавишных инструментов. Задача воздействия медиатора на струну решена как совместная задача взаимовлияния движения медиатора и возникающего в струне волнового процесса.

Возможность различных законов движения медиатора в руке исполнителя вытекает из следующих способов извлечения звука при игре на щипковых инструментах и возможных вариантов их схематизации:

- 1. Медиатор представляется жесткой пластинкой, сохраняющей неизменность ориентации вплоть до времени окончания воздействия; при этом можно полагать, что медиатор не вращается в руке исполнителя, и волновые и колебательные процессы происходят только в одной плоскости.
- 2. При другой манере исполнения момент M(t) силы воздействия струны на жесткий медиатор в момент $t = \tau_0$ отражения одной из поперечных волн может превысить предельно допустимое значение M_{nped} для его удержания без разворота, и начнется его вращение. Колебательные процессы происходят в двух плоскостях.

Выясним, в какой момент времени $t = \tau_0 < t_0$ величина M(t) может превысить значение M_{nped} . Очевидно, им является момент отражения от точки x=c одной из поперечных волн, двигающихся от точек крепления. Вместе с началом поворота струна начинает скользить по поверхности медиатора. Это приводит к возникновению движения двух плоскостях.

Динамика движения медиатора задается уравнением:

$$Jrac{d^2\gamma}{dt^2} = M(t) - M_{npeo}$$
 $\gamma = rac{d\gamma}{dt} = 0$ при $t = au_0$

где J- момент инерции медиатора, $\gamma(t)$ - угол наклона медиатора в плоскости ZOY Анализ моментов и волновой картины при этом позволяет записать уравнение движения так

$$\frac{d\gamma^2}{d\bar{t}^2} = A \left[2n + 1 + 2\bar{\dot{y}}_c + 2k \right) (\bar{V}_r \bar{t} + \bar{\dot{z}}_c) + (2\bar{\dot{y}}_c + 1)\bar{l}_{00} + 2\bar{\dot{z}}_c (\bar{t} - \bar{y}_0) \right]$$

где
$$A=F_0rac{V_0^2}{b\, au_0 J}\,, \quad ar{\dot{y}}=rac{\dot{y}}{V_0}\,, \quad ar{\dot{z}}=rac{\dot{z}}{V_0}\,, \quad ar{l}_{00}=rac{l_{00}}{V_0 au_0}\,, \quad ar{t}=rac{t}{ au_0}\,.$$

 $z_c(t)$, $y_c(t)$ - координаты струны на медиаторе, $y_0(t) = V_0 t$ и $z_0(t) = -l_{00} - V_\tau t$ - координаты места удержания медиатора, V_0 и V_τ - скорости движения медиатора соответственно перпендикулярно и вдоль его плоскости, l_{00} –место струны от оси вращения медиатора при $t = \tau_0$, F_0 - сила натяжения струны.

Численное решение, представленное на рис.6.3, соответствует случаю взаимодействия пластикового медиатора длины 0.02 м со струной ми первой октавы ($F_0 = 85H, b_0 = 387 \text{м/c}$, длина струны 0.65м). Моделировался удар медиатором на расстоянии 0.2м от ближней заделки.

Если учесть, что $V_0 >> V_\tau$ и смещение по оси OZ мало, то уравнение движения до прихода первой отраженной от заделки поперечной волны принимает следующий вид:

$$\frac{d^2 \gamma}{d\bar{t}^2} = A(2\bar{\dot{y}}_c + 1)\bar{l}_{00}$$

и на отрезке времени $0 < t < t_1$, учитывая соотношение (6.1.1) возможно получить аналитическое асимптотическое решение $\gamma = \frac{A\bar{l}_{00}\bar{t}^2}{2}$.

До прихода второй отраженной волны имеем уравнение $\frac{d^2\gamma}{d\overline{t}^2} = A(2\overline{\dot{y}}_c + 2)\overline{l}_{00}$

Решение в этом интервале времени таково $\gamma = \frac{\bar{t}_1}{2} \left(\exp(2A\bar{l}_{00}\bar{t}) - 1 + \frac{A\bar{l}_{00}}{2} (2\bar{t}^2 - \bar{t}_1^2) \right)$

Приведенные выше решения согласуются с полученным численным решением (рис.6.1).

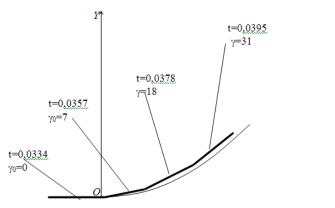
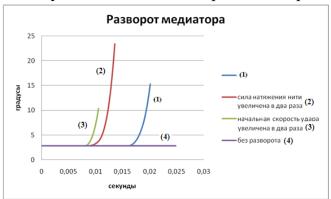


Рис. 6.1 Результаты численного расчета угла поворота медиатора (ломаная линия) и аналитическое асимптотическое решение.

Значительное упрощение решения задачи достигается для случая, когда массой медиатора, а, следовательно, и величиной момента инерции можно пренебречь. Задача оказывается автомодельной. В частности, скорость V_1 перемещения струны по медиатору после первого изменения угла

$$V_1 = b \gamma_0 \; , \qquad \qquad$$
 где $\gamma_0 = \left(rac{
ho_0 a b^2 - Ta \; (1 + e_0)}{rac{3}{2} Tb -
ho_0 a b^2}
ight)^{rac{1}{2}}$

Результаты численных расчетов представлены на рис. 6. 2 - 6.5.



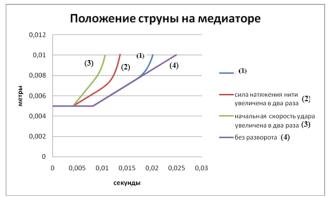


Рис. 6.2. Изменение угла наклона медиатора. Рис. 6.3 Расстояния от места удержания до струны.

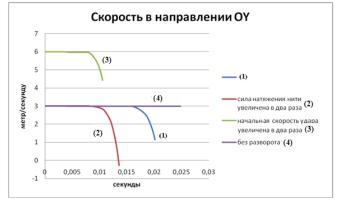




Рис. 6.4. Скорость струны по медиатору в направлении ОУ. Рис. 6.5. Скорость струны в направлении ОХ.

Используя полученные значения для координат и скоростей струны в точках касания с медиатором, в работе определены смещения точек струны в направлениях по осям ОУ и ОZ в периоды до разворота медиатора, при развороте и в период начала свободных колебаний струны.

Задача для продольных составляющих с учетом поперечных колебаний в двух направлениях под воздействием медиатора записывается так:

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 x}{\partial s^2} + \frac{1}{2 + e_0} \left[\frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial y}{\partial s} \right)^2 + \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial z}{\partial s} \right)^2 \right] \right)$$

$$x(0,t) = x(L,t) = 0$$

$$x(s,0) = x_t(s,0) = 0$$

Для периода начала свободных колебаний

$$\frac{\partial^2 X}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 X}{\partial s^2} + \frac{1}{2 + e_0} \left[\frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial y}{\partial s} \right)^2 + \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial z}{\partial s} \right)^2 \right] \right)$$

$$X(0,t) = X(L,t) = 0$$

$$X(s,0) = x(s,t_0)$$

$$X_t(s,0) = x_t(s,t_0)$$

 t_{0} - время схода медиатора со струны.

Результаты численных вычислений продольных смещений представлены на Рис. 6.6.

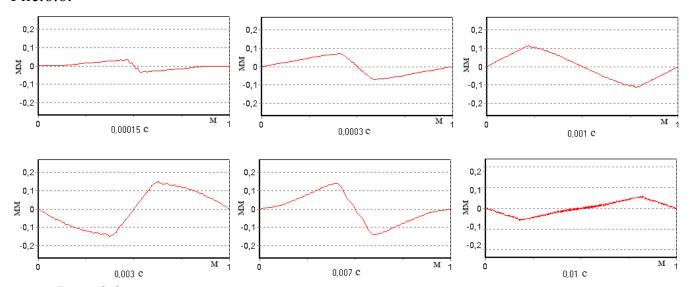


Рис. 6.6. Графики продольных смещений в различные моменты времени.

Стоит отметить особо влияние фронта поперечной волны, на котором продольные составляющие деформаций и скоростей терпят разрыв. Эта особенность распространения продольных волн обсуждалась в Главе I. Фронт поперечной волны является источником продольных волн на поперечных частотах.

В пункте 2 главы 6 решена динамическая задача взаимодействия молоточка фортепиано со струной. Определена динамика движения молоточка в период воздействия на струну. В рамках линеаризованной системы уравнений найдены спектры поперечных и продольных колебаний струны, как в период воздействия молоточка, так и в период свободных колебаний.

Уравнение движения для молоточка записывается следующим образом

$$m\frac{dV}{dt} = T \sin \gamma_1 + \sin \gamma_2$$

T - сила натяжения струны, γ_1 , γ_2 - углы наклона струны в местах примыкания к молоточку.

Для реальных условий начальной скорости удара $V_0 \approx 5 \, m/c$, массы $m \,\square\, 7 - 8 \, \varepsilon$, начальном натяжении $T \,\square\, 1000 \, H$ остановка, а затем сход молоточка со струны осуществляется за два — три прохода поперечной волны (Puc.6.7).

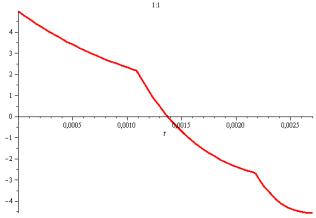


Рис. 6.7. График зависимости скорости молоточка от времени. (От начала удара до момента схода молоточка со струны).

Сравнение результатов расчетов с экспериментами по времени касания молоточка со струной для реальных музыкальных инструментов ($t \Box 1 \div 2 \times 10^{-3} c$) привело к удовлетворительному соответствию выбранной модели и эксперимента.

№ струны	Время касания молотка (10 ⁻³ сек.) эксп.	Время до остановки и время касания молотка $(10^3 {\rm cek.})$ расчет
10	3,12	2,77/3.07
40	1,82	1,54/1,87
60	1,12	0,74/1,28
80	0,50	0,29/0,56

Так же получены выражения для поперечных и продольных составляющих в период воздействия на струну. Используя эти решения в качестве начальных, можно найти спектр поперечных и продольных колебаний после окончания воздействия молоточка.

Решения для продольных смещений аналогичны решениям задачи для медиатора. Продольные колебания распространяются с собственной частотой и с частотой поперечных колебаний. На самом деле здесь больший интерес представляют колебания не самой струны, а те усилия, которые она передает в деку инструмента Рис. 6.8

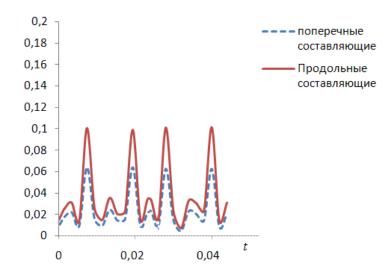


Рис. 6.8. Сравнение амплитуд поперечных и продольных составляющих сил, с которыми струна действует на присоединенный элемент

Представленная задача дает возможность для решения многопараметрической задачи оптимизации процесса удара по струне фортепиано для достижения наиболее благоприятного тембра звучания музыкального инструмента для слуха человека.

В главе 7 исследованы особенности взаимодействия струн с клином. Проанализированы волновые процессы, возникающие при воздействии струны на клин с различными углами раствора (или на полуплоскость), в случаях, когда скорость точки схода струны с клина больше (сверхзвуковой случай) или меньше (дозвуковой) скорости распространения продольной волны в ней. Обнаружено, что и для дозвукового случая существуют режимы (даже при абсолютно неупругих взаимодействиях), когда в струне возникают области отрицательных деформаций. Они являются динамически неустойчивыми. В качестве примера рассмотрены две задачи: 1) движение струны, предварительно сжатой между двумя точками, 2) удар клином по ненатянутой струне с дозвуковой и сверхзвуковой скоростями движения точки излома в диапазоне углов клина, когда возникает деформация сжатия. В обеих задачах в рамках исходного линейного уравнения имеет место неограниченное возрастание амплитуды возмущений.

Режимы с постоянной деформацией сжатия впервые отмечены X.A. Рахматулиным (рис.7.1) при $\gamma < arctg \frac{V_0}{a(1+e_0)}$ (a - скорость продольной волны).

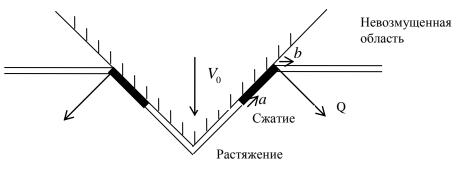


Рис.7.1
$$(b = \frac{V_0}{tg\gamma} < a)$$

Появление в ходе потери устойчивости составляющих поперечных деформаций приводит к росту полной деформации, которая на некоторой кривой, связывающей лагранжеву координату со временем, обращается в нуль и далее становится положительной. При этом тип уравнения поперечных движений изменяется с эллиптического на гиперболический.

Установлено, что также для случая $\gamma > arctg \frac{V_0}{a(1+e_0)}$, когда скорость продольной волны больше скорости излома, при выполнении условия $\frac{V_0^2}{a^2} > \frac{1-\cos\gamma}{\cos^2\gamma}$ на углы раствора клина для задачи удара по недеформированной струне между точкой излома и продольной волной возникает область сжатия (Рис.7.2).

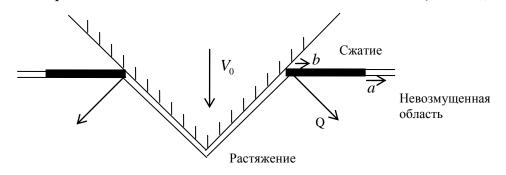


Рис.7.2
$$(b = \frac{V_0}{tg\gamma} > a)$$

Анализ для случая возникновения сжатия позволяет предположить, что в силу неустойчивости решения задачи об ударе клином по гибкой деформируемой струне, приводящие к возникновению областей сжатия, волновые схемы, которые реализуются при этом, являются схемы с отскоком струны от щеки клина (Рис.7.3-7.4) (даже при абсолютно неупругом взаимодействии).

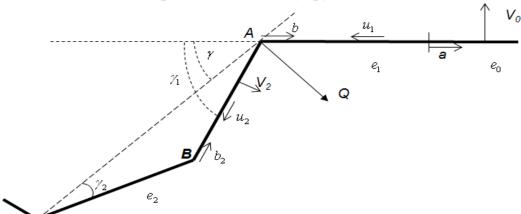


Рис . 7.3. Взаимодействие гибкой нити с клином. Случай $b = \frac{V_0}{tg\gamma} > a$.

Дозвуковой случай
$$b = \frac{V_0}{tg\gamma} > a$$

Соотношение на продольной волне $u_1 = a(e_1 - e_0)$

Кинематические соотношения на фронте сильного разрыва (точка А)

$$b = \frac{V_0}{tg\gamma}$$
, $\frac{V_2}{\sin(\gamma_1 - \gamma)} = \frac{b}{\cos \gamma} = \frac{V_0}{\sin \gamma}$

Закон сохранения массы (точка A): $\frac{b+u_1}{1+e} = \frac{1}{1+e} \left(\frac{b\cos(\gamma_1-\gamma)}{\cos\gamma} + u_2 \right)$

Закон изменения количества движения

$$\frac{\rho_0(b+u_1)}{1+e_1} u_2 \sin(\gamma_1 - \gamma) + V_2 \cos(\gamma_1 - \gamma) + V_0 \cos\gamma + u_1 \sin\gamma = Q + T_2 \sin(\gamma_1 - \gamma) + T_1 \sin\gamma$$

$$\frac{\rho_0(b+u_1)}{1+e_1} u_2 \cos(\gamma_1-\gamma) - V_2 \sin(\gamma_1-\gamma) + V_0 \sin\gamma - u_1 \cos\gamma = T_2 \cos(\gamma_1-\gamma) - T_1 \cos\gamma$$

Кинематические соотношения на фронте сильного разрыва (точка В)

$$b_2 + u_2 = \frac{V_2}{\sin(\gamma_1 - \gamma_2')}, \quad b_2 = \frac{V_2}{tg(\gamma_1 - \gamma_2')}$$
 Закон сохранения массы (точка В):

$$\frac{\rho_0(b_2+u_2)}{1+e_2}u_2 = T_2 - T_2\cos(\gamma_1 - \gamma_2'); \qquad \frac{\rho_0(b_2+u_2)}{1+e_2}V_2 = T_2\sin(\gamma_1 - \gamma_2')$$

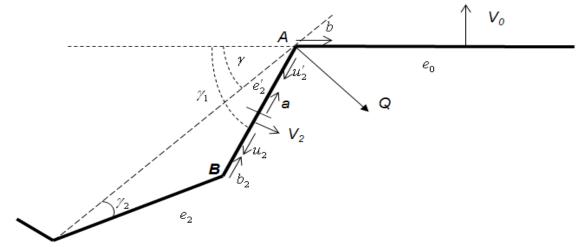


Рис . 7.4. Взаимодействие гибкой нити с клином. Случай $b = \frac{V_0}{t_0 \nu} < a$.

Сверхзвуковой случай: $b = \frac{V_0}{t_{out}} < a$

Кинематические соотношения на фронте сильного разрыва (точка А)

$$b = \frac{V_0}{tg\gamma}, \frac{V_2}{\sin(\gamma_1 - \gamma)} = \frac{b}{\cos\gamma} = \frac{V_0}{\sin\gamma}$$

Закон сохранения массы (точка A): $\frac{b}{1+e_2} = \frac{1}{1+e_2'} \left(\frac{b\cos(\gamma_1-\gamma)}{\cos\gamma} + u_2' \right)$

Закон изменения количества движения

$$\frac{\rho_0 b}{1 + e_0} u_2' \cos(\gamma_1 - \gamma) - V_2 \sin(\gamma_1 - \gamma) + V_0 \sin \gamma = T_2' \cos(\gamma_1 - \gamma) - T_0 \cos \gamma$$

$$\frac{\rho_0 b}{1 + e_0} u_2' \sin(\gamma_1 - \gamma) + V_2 \cos(\gamma_1 - \gamma) + V_0 \cos \gamma = Q + T_2' \sin(\gamma_1 - \gamma) + T_0 \sin \gamma$$

Соотношение на продольной волне

$$u_2 - u_2' = a(e_2 - e_2')(1 + e')$$

Кинематические соотношения на фронте сильного разрыва (точка В)

$$b_2 = \frac{V_2}{tg(\gamma_1 - \gamma_2')}, \quad b_2 + u_2 = \frac{V_2}{\sin(\gamma_1 - \gamma_2')}$$

Закон изменения количества движения

$$\frac{\rho_0(b_2+u_2)}{1+e_2}V_2 = T_2\sin(\gamma_1-\gamma_2')\;,\quad \frac{\rho_0(b_2+u_2)}{1+e_2}u_2 = T_2-T_2\cos(\gamma_1-\gamma_2')$$

В главе 8 рассмотрено динамическое развертывание тросовой системы на низкой околоземной орбите и проведении анализа данных полета с учетом таких эффектов, как растяжимость троса, распространение поперечных и продольных волн в нем, управление граничным условием на одном из концов разматываемой системы. Система представляет собой большой спутник (Foton-M3), движущийся на околоземной орбите и малый спутник (Fotino), который на упругом тросе (нити) соединен с большим. Малый спутник при развертывании троса должен двигаться с заданными скоростями по заданной траектории к Земле. Управляющие параметры — начальная скорость малого спутника и натяжение троса, которое контролируется на большом спутнике. Представленные теоретический материал и численные расчеты проводились в рамках космического эксперимента YES2 в миссии Foton-M3.

Спутник Foton-M3 находится на круговой орбите.

В системе координат, связанной со спутником, внешними силами являются сила гравитационного взаимодействия с Землей, центробежная сила и сила Кориолиса. Ось OX направим от спутника по направлению к Земле, ось OY - против направления движения спутника.

В проекциях на оси координат уравнение движения имеет вид:

$$\rho \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial s} T \sin \gamma + 2\rho \omega \frac{\partial x}{\partial t} \qquad \rho \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial s} T \cos \gamma - 2\rho \omega \frac{\partial y}{\partial t} + 3\rho \omega^2 s + x$$

где γ - угол отклонения элемента нити от оси OX . **Граничные условия** x(0,t)=y(0,t)=0 . Так как в эксперименте контролируется натяжение, то $T(0,t)=T_0(t)$ Длина нити переменная, то есть s=l=l(t) . $x(l(t),t)=X_l(t), \ y(l(t),t)=Y_l(t)$,

где $X_l(t)$, $Y_l(t)$ подчиняются следующим динамическим условиям:

$$m\frac{\partial^{2}Y_{l}}{\partial t^{2}} = T(l,t)\sin\gamma(l,t) + 2m\omega\frac{\partial X_{l}}{\partial t}; m\frac{\partial^{2}X_{l}}{\partial t^{2}} = T(l,t)\cos\gamma(l,t) - 2m\omega\frac{\partial Y_{l}}{\partial t} + 3m\omega^{2}l + X_{l}$$

Начальные условия.

$$s = l(t = 0) = 0$$
 $X_l(t = 0) = 0$, $Y_l(t = 0) = 0$, $\frac{\partial}{\partial t}X_l(t = 0) = V_0$, $\frac{\partial}{\partial t}Y_l(t = 0) = 0$

 $V_{\scriptscriptstyle 0}$ - начальная скорость движения малого спутника.

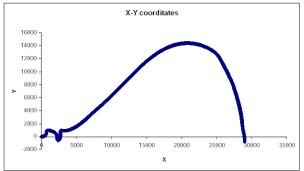
В те периоды времени, когда значения натяжения становятся нулевыми, представленная модель работает как модель свободного полета. Также предлагалось контролировать натяжение в соответствии со следующим алгоритмом обратной связи

$$T = T(v, \gamma) = T_{ref}(1 + k(v - v_{ref}))H(v)$$
, где $H(v) = \begin{cases} 1, & v \ge 0 \\ 0, & v < 0 \end{cases}$

$$k = \left(T_{ref} - m\left(\frac{2g}{R}y\cos\gamma - \dot{v}\right)\right)\frac{1}{v_{ref}}H\left(T_{ref} - m\left(\frac{2g}{R}y\cos\gamma - \dot{v}\right)\right)$$

где *v* - скорость развертывания.

Результатами вычислений стали графики натяжения, угла отклонения и координат малого спутника. Они были получены для углов, координат и скоростей, приводящих к требованиям эксперимента.



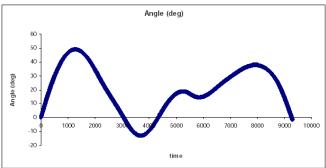
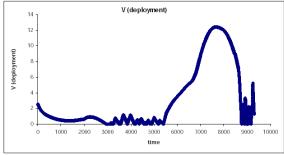


Рис. 8.1. Траектория малого спутника.

Рис. 8.2. Угол отклонения малого спутника от оси X.



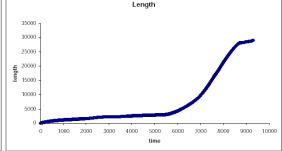
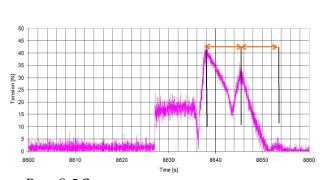


Рис. 8.3. Скорость развертывания от времени. Рис. 8.4 Зависимость длины троса от времени.

Полученные данные продемонстрировали хорошее совпадение с результатами, представленными в Техническом описании миссии.

Расчеты показали, что условия размотки оказались очень чувствительны к отклонениям в массе и начальной скорости спускаемого малого спутника.

Миссия YES2 была успешна, но не полностью выполнена. Малый спутник при торможении имел скорость большую, чем запланированная. Был выполнен анализ полученных данных полета, основанный на результатах измерений натяжения троса в конце фазы размотки (Рис. 8.5).



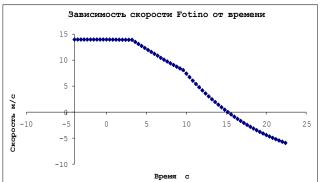
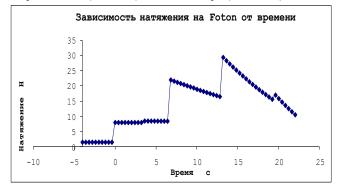


Рис. 8.5 Зависимость натяжения от времени на FOTON.

Рис. 8.6. Зависимость скорости малого спутника (торможение).

Острые скачки натяжения свидетельствуют, что к концу стадии развертывания у малого спутника была некоторая скорость, которая привела к

формированию продольных волн в тросе, которые распространялись от главного спутника (Foton) к малому (Fotino) и назад.



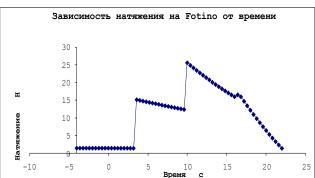


Рис. 8.7. Зависимость натяжения на Foton.

Рис. 8.8. Зависимость натяжения на Fotino.

Сравнение результатов динамического моделирования для заключительного этапа развертывания тросовой системы с фактическими данными по значению натяжения в тросе (Рис. 8.5) дает очень хорошее согласие. Это свидетельствует о том, что моделирование было очень близко к действительности. Выполненный анализ и система уравнений приводят к заключению, что принятие во внимание распространения поперечных и продольных волн необходимо учитывать в расчетном поведении тросовых систем особенно на стадии торможения.

В заключении перечислены основные результаты и выводы, полученные в диссертации.

- 1) Получено решение задачи поперечно-продольных колебаний растянутых струн. Определены спектры поперечных и продольных колебаний для периода возбуждения струны и для последующих свободных колебаний. Обнаружено, что при совпадении частот отдельных мод поперечных и продольных колебаний возможны резонансные явления.
- 2) Показано, что для малых деформаций продольные волны распространяются, не отражаясь от поперечной волны, оставляя на ней величину разрыва продольных составляющих скоростей и деформаций неизменной; поперечная волна является источником вынужденных продольных колебаний на частотах поперечных.
- 3) Получены нелинейные дифференциальные уравнения крутильных и продольных движений с учетом их взаимовлияния для тонкостенных труб. Найдены общие решения уравнений для случая кручения бесконечной трубы при воздействии с постоянной угловой скоростью. Получены линеаризованные уравнения крутильных и продольных колебаний. Показано, что вклады крутильных и продольных составляющих в динамическое нагружение оказываются одного порядка. Колебания в продольном направлении происходят как на собственных частотах, так и на частотах крутильных колебаний. Поставлены и решены задачи распространения продольных и крутильных волн и колебаний в тонкостенных трубах.
- 4) Получены дифференциальные уравнения и решены задачи распространения продольных, поперечных и крутильных волн и колебаний с учетом их

- взаимного влияния в витых канатах и струнах с навивкой, в мембранах, тонких пластинах и тяжелых струнах.
- 5) Проведен анализ влияния жесткости на распространение волн и колебаний в растянутых стержнях и струнах. Наличие малой жесткости, характерной для музыкальных струн, приводит к незначительному изменению частот всего спектра поперечно-продольных колебаний, образованию групп гармоник близких по частотам, а также к существенному изменению формы струны в местах соударения, креплений и на фронте поперечной волны.
- б) Проведены экспериментальные исследования вынужденных продольных колебаний гибких деформируемых предварительно натянутых струн на частотах поперечных колебаний. Подтверждено наличие вынужденных продольных колебаний на поперечных частотах и увеличение амплитуды при совпадении собственных и вынужденных частот продольных колебаний растянутых струн. Вынужденные продольные возмущения наряду с поперечными являются источником колебаний присоединенных к струне элементов и конструкций.
- 7) В рамках линеаризованной системы распространения поперечно-продольных волн и колебаний в растянутых струнах постановлены и решены задачи граничного управления продольно-поперечными колебаниями в струнах. Показано, что, управляя поперечным смещением на границе, можно управлять продольным движением струн. Также указана возможность управления поперечными колебаниями с помощью управления продольным смещением на границе.
- 8) В работе поставлена и решена динамическая задача о возбуждении и свободных поперечно-продольных колебаниях струн щипковых и клавишных инструментов под влиянием медиатора, молоточка. Определен сдвиг частот из-за податливости заделки. В диссертации определены спектры колебаний при учете а) решения задачи для периода воздействия, б) впервые выполненного теоретического определения собственных и вынужденных продольных колебаний.
- 9) Решение задачи удара клином по нити, когда скорость продольной волны меньше скорости точки схода струны с поверхности клина с образованием области сжатия. Впервые обнаружено, что и для дозвукового случая существуют режимы (даже при абсолютно неупругих взаимодействиях), когда в струне возникают области отрицательных деформаций. Установлено, что такие режимы являются динамически неустойчивыми и приводят к реализации волновых схем с отскоком от поверхности клина.
- 10) В качестве технического приложения поставлена и решена задача о влиянии процесса распространения поперечных и продольных колебаний на размотку тросовой системы на околоземной орбите. Показано, что учет динамического влияния распространения продольных волн при расчете фазы торможения аппарата на упругом тросе необходим. Это приводит к более корректному описанию траектории движения аппарата.

Основные публикации по теме диссертации:

- 1. Демьянов Ю.А., Кокорева Д.В., Малашин А.А. Взаимовлияние поперечных и продольных колебаний в музыкальных инструментах. Москва, ПММ, 2003, т. 67, №2, с. 273-283.
- 2. Ю.А. Демьянов, А.А. Малашин. Поперечно-продольные волны в струне щипкового инструмента при воздействии исполнителя. Москва, ПММ, 2003, т. 67, №3.
- 3. Ю.А. Демьянов, А.А. Малашин. О взаимосвязи волновых и колебательных процессов в струнах щипковых музыкальных инструментов с манерой игры исполнителя. ДАН, 2002, т. 387,№ 3, с. 333-337.
- 4. А.В. Звягин, А.А. Малашин. Постановка и решение задачи динамики спортивного лука. Докл. РАН, 2004, т.399, №1, с.45-51.
- 5. Ю.А. Демьянов, А.А. Малашин. Вынужденные продольные колебания музыкальных струн, обусловленные их поперечными колебаниями. Газовая и волновая динамика. 2005., МГУ, Сб. с. 178-187.
- 6. А.А. Малашин. Продольно-крутильные волны и колебания в напряженных тонкостенных трубах. Докл. РАН, 2005, т.401, №1, с.47-53.
- 7. Ю.А. Демьянов, А.А. Малашин. О влиянии волновых процессов в струнах щипковых музыкальных инструментов на характер движения медиатора. Проблемы механики. Сб. статей. К 90-летию со дня рождения А.Ю. Ишлинского. 2003, с. 350-356.
- 8. Ю.А. Демьянов, А.В. Звягин, А.А. Малашин. Проблемы динамики спортивного лука и аэродинамики его стрелы. Проблемы механики. Сб. статей. К 75-летию со дня рождения Е.И. Шемякина. 2005.
- 9. Ю.А. Демьянов, А.А. Малашин. К решению проблемы удара твердым телом по гибкой деформируемой струне при возникновении деформации сжатия. Докл. РАН, 2007. №413, 45-49.
- 10. Ю.А. Демьянов, А.А. Малашин. Вынужденные продольные колебания предварительно напряженных гибких и негибких связей, обусловленные их поперечными, изгибными и крутильными колебаниями. ІХ Всероссийский съезд по теоретической и прикладной механике. Нижний Новгород. Доклад. 2006 г.
- 11. А.А. Малашин. Вынужденные продольные колебания гибких деформируемых предварительно натянутых струн на частотах поперечных колебаний. Докл. РАН, 2006.
- 12. А.А. Малашин. Акустические спектры вынужденных продольных колебаний музыкальных струн на поперечных частотах. Тезисы докладов XV школы семинара под руководством академика РАН Г.Г. Черного. 2007.
- 13. А.А. Малашин. Влияние обмотки и малой жесткости на распространение волн и колебаний в музыкальных струнах. Современные проблемы газовой и волновой динамики. Москва. Тезисы докладов международной конференции, посвященной памяти академика Х.А. Рахматулина в связи со 100-летием со дня его рождения. 2009

- 14. Ю.А. Демьянов, А.А. Малашин. Взаимозависимость продольных, поперечных, изгибных и крутильных волн и колебаний в предварительно напряженных средах. Бишкек. Тезисы докладов международной конференции. 2009
- 15. А.А. Малашин. Продольно-поперечно-крутильные волны и колебания в музыкальных струнах. Докл. РАН, 2009. Т.424. с. 197-199.
- 16. Демьянов Ю.А., Звягин А.В., Куксенко Б.В., Лужин А.А., Малашин А.А., Никитин В.Ф., Смирнов Н.Н. О размотке тросовых систем на околоземной орбите. Газовая и волновая динамика. 2010.,МГУ, Сб.
- Малашин. Некоторые задачи граничного управления поперечно-M.: продольными колебаниями натянутых струн. Изд-во Московского университета 2010. Ломоносовские чтения. Тезисы докладов научной конференции.
- 18. А.А. Малашин. Волны и колебания в витых струнах. Москва, ПММ, 2011. №1.
- 19. Ю.А. Демьянов, А.А. Малашин. Влияние жесткости на поперечно-продольные движения музыкальных струн. Москва, ПММ, 2011. №1.
- 20. Smirnov N.N., Demyanov YU.A., Zvyagin A.V., Malashin A.A., Luzhin A.A. Dynamical simulation of tether in orbit deployment. Acta astronautica. 2010.
- 21. А.А. Малашин. Задачи граничного управления поперечно-продольными колебаниями струн. Докл. РАН, 2011.