Московский государственный университет
имени М.В. Ломоносова

Механико-математический факультет

На правах рукописи
УДК 511.36+511.37

Сухарев Иван Юрьевич

О некоторых разложениях в неархимедовских нормированных кольцах и полях

01.01.06 — математическая логика, алгебра и теория чисел

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва — 2011

Работа выполнена на кафедре математического анализа Механико-математического факультета Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова.

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук, профессор Чирский Владимир Григорьевич
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, профессор Архипов Геннадий Иванович
	кандидат физико-математических наук, Поповян Илья Ардашесович
Ведущая организация:	Тульский государственный педагогический университет имени Л.Н. Толстого

Защита диссертации состоится «14» октября 2011 г. в 16 ч. 45. м. на заседании диссертационного совета Д.501.001.84 при Московском государственном университете имени М.В. Ломоносова по адресу: Российская Федерация, 119991, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д.1, МГУ, Механико-математический факультет, аудитория 14-08.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Механико-математического факультета МГУ (Главное здание, 14 этаж)

Автореферат разослан «14» сентября 2011 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
Д.501.001.84 при МГУ
доктор физико-математических наук,
профессор

А.О. Иванов

Общая характеристика работы

Актуальность темы

Диссертационная работа является исследованием по вероятностной и аналитической теории чисел. В ней рассмотрены задачи об аналогах разложения Оппенхайма в кольце g-адических чисел $\mathbb{Q}_g$, где g – составное число, об обобщении понятия кольца полиадических чисел и получени теорем о метрических свойствах разложений в рассматриваемых кольцах.

Поле $\mathbb{Q}$ рациональных чисел можно пополнить по метрике, порожденной обычной абсолютной величиной, и получить поле $\mathbb{R}$ действительных чисел. Пополняя поле $\mathbb{Q}$ по метрике, порожденной p-адической нормой, получим поле $\mathbb{Q}_p$ p-адических чисел.

P-адические числа являются постоянным объектом современных исследований, так как они имеют многочисленные приложения не только в теории чисел, но и в других разделах теоретической и прикладной математики, а также естественных науках[1]: физике, химии, генетике.

Известны различные способы представления действительных чисел: позиционные системы счисления, непрерывные (или цепные) дроби различных классов (регулярные, по ближайшему целому, ветвящиеся)[2,3,4]. Также известны разложения Энгеля, Люрота, Сильвестра, Кантора[5]. Эти разложения были обобщены А.Оппенхаймом[6]. Свойства этих разложений, в основном, метрические, исследовал А. Оппенхайм[6], Я. Галамбош[7,8], Ю. Ву[9,10] и другие.

Для p-адических чисел также существуют различные представления: помимо канонического представления известны разложения в p-адические

---

[1] Владимиров В.С., Волович И.В., Зеленов Е.И., p-адический анализ и математическая физика. Москва. «Физматлит». 1994.

[2] Хинчин А.Я. Цепные дроби // Noordhoff, Groningen, M. «Наука», 1978.

[3] Gylden H. Quelques remarques rélativement à la représentation des nombres irrationels par des fraction continues // C. R. Acad. Sci. Paris. V.107. 1888. p. 1584–1587

[4] Wiman A., Über eine Wahrscheinlichkeits auflage bei Kettenbruchetwicklungen // Akad. Föhr. Stockholm. V.57. 1900. p. 589–841

[5] Perron O., Irrationalzahlen. Chelsea. New York. 1951.

[6] Oppenheim A., The representation of real numbers by infinite series of rationals // Acta Arith. 21. 1972, p. 391–398.

[7] Galambos J., The ergodic properties of the denominators in the Oppenheim expansion of real numbers into infinite series of rationals // Quart. J. Math. Oxford (2) 21, 1970, p. 177–191

[8] Galambos J., Reprentations of real numbers by infinite series // Lecture Notes in Math. 502, Springer, Berlin, 1976.

[9] Wu J., The Oppenheim series expansions and Hausdorf dimensions // Acta Arith. 107.4. 2003.

[10] Wu J., A problem of Galambos on Engel expansions // Acta Arith. XCII.4 (2000), p. 383-386

непрерывные дроби,[11,12,13,14] и исследованы их свойства.[12,14,15,16] Естественной задачей было получение аналогов разложений в полях p-адических чисел. А. и Дж. Кнопфмахерами[17,18,19,20] предложены такие аналоги: разложение «типа Люрота», «типа Энгеля», «типа Сильвестра». Они являются частными случаями полученного А. и Дж. Кнопфмахерами аналога[18] разложения Оппенхайма для поля $\mathbb{Q}_p$.

Одним из важных направлений теории чисел является вероятностная теория чисел. Эта теория получила значительное развитие в трудах российских и советских математиков. Работы по данному направлению представлены у Й.П. Кубилюса[21], А.Г. Постникова[22,23], М.П. Минеева[24], В.Н. Чубарикова[25,26], Архипова Г.И.[26], Карацубы А.А.[26]

В направлении исследования метрических и асимптотических свойств разложений чисел были получены некоторые результаты. В частности, Ягер и де Вроедт[27], а также Салат[28] получили результаты для разложений Люрота действительных чисел, П. Эрдеш, А. Реньи и П. Шуц[29]

[11] Ruban A., Some metric properies of p-adic numbers // Siberian Math. J. 11. 1970, p. 176–180

[12] Laohakosol Y., A characterization of rational numbers by p-adic Ruban continued fractions // J. Austral. Math. Soc. Ser. A 39. 1985., p. 300–305

[13]Schneider Th., Über p-adische Kettenbrüche // Symposia Math. 4 .1970. p. 181–189

[14] Mahler K., Zur Approximation p-adischer Irrationalzahlen // Nieuw Arch. Wisk. N 18. 1934. p. 22–34

[15] Laohakosol Y., Ubolsri P., p-adic continued fractions of Liouville type // Proc. Amer. Math. Soc. 101 (1987), p. 403–410

[16] Ruban A., Some metric properies of p-adic numbers // Siberian Math. J. 11. 1970, p. 176–180

[17]Knopfmacher A. and J., A product expansion in p-adic and other non-archimedean fields // Proc. Amer. Math. Soc. 104, 1988, p. 1031–1035.

[18] Knopfmacher A. and J., Series expansions in p-adic and other non-archimedian fields // Journal of number theory. 32, 1989, p. 297-306

[19] Knopfmacher A. and J., Metric properties of some special p-adic series expansions // Acta Arith. LXXVI.1. 1996., p. 11–19

[20] Knopfmacher A. and J., Infinite series expansions for p-adic numbers // ibid. 41, 1992, p. 131–145

[21]Кубилюс Й.П., Вероятностные методы в теории чисел. Вильнюс. 1962.

[22] Постников А.Г., Эргодические вопросы теории сравнений и теории диофантовых приближений // Тр. МИАН СССР, 82 (1966),стр. 3–112.

[23] Постников А.Г., Усиленный закон больших чисел для выборки из равномерно распределенной случайной величины // Изв. АН СССР, сер. матем., 1958, 22, № 3, стр. 433–438.

[24] Минеев М.П., Диофантово уравнение с показательной функцией и его приложение к изучению эргодической суммы // Изв. АН СССР. Сер. матем., т. 22, № 5 (1958), стр. 585Ц-598.

[25]Жимбо Э.К., Чубариков В.Н., О распределении арифметических функций по простому модулю // Дискрет. матем., т. 13, № 3 (2001), стр. 32–41.

[26] Архипов Г.И.,Карацуба А.А., Чубариков В.Н., Распределение дробных долей многочленов от нескольких переменных // Матем. заметки, т. 25, № 1 (1979), стр. 3–14.

[27] Jager H. and de Vroedt C., Luroth series and their ergodic properties // Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A 72. 1969, p. 31–42

[28] Salat T., Zur metrischen Theone der Lürothschen Entwicklungen der reellen Zahlen // Czechoslovak Math, J. 18. 1968, p. 489–522

[29] Erdös P., Rényi A. and Szüsz P., On Engel's and Sylvester's series. // Ann. Univ. Sci. Budapest. Eötvös Sect. Math. 1. 1958, p. 7–32

— для разложений Энгеля и Сильвестра, Реньи[30] — для бесконечного произведения Кантора, и Галамбош[8] — для более общих случаев, названных p-адическим разложением Оппенхайма. Рубан[16] исследовал p-адические метрические теоремы, аналогичные предложенным Хинчиным[2] для действительных цепных дробей. Соответствующие результаты для p-адического разложения «типа Энгеля» и «типа Люрота» были получены А. и Дж. Кнопфмахерами[19], а также Грабнером совместно с А. Кнопфмахером[31] соответственно, свойства p-адического разложения Оппенхайма исследовали Ю. Ву[32].

Объектами исследования этой работы являются прямые суммы и произведения некоторых совокупностей p-адических полей. В первой части работы рассматриваются аналоги разложений Оппенхайма в кольце Q_g g-адических чисел. В лемме 7 показано, что если применить алгоритм p-адического разложения Оппенхайма для позиционной системы счисления по степеням составных чисел (в кольце $\mathbb{Q}_g$, где число g — составное), то p-адический алгоритм[18] Оппенхайма, откажется работать на некотором шаге с вероятностью, стремящейся к единице с ростом числа его шагов. В работе предлагается многомерный аналог разложения Оппенхайма, опирающейся на то, кольцо g-адических чисел представляет собой прямую сумму полей p-адических чисел $\mathbb{Q}_g = \prod\limits_{i=\overline{1,k}} \mathbb{Q}_{p_i}$, $g = p_1 \cdots p_k$ (теорема Малера[33]).

Вторая часть работы посвящена исследованию прямых произведений бесконечной совокупности колец целых p-адических чисел.

Опишем вначале конструкцию, которая провела к понятиям p-адических и полиадических чисел.

Рассмотрим некоторую последовательность натуральных чисел $\{p_j\}$ и некоторую комплексную переменную z. Для каждого числа $k \in \mathbb{N}$ верно следующее полиномиальное тождество

$$(1 + z + \ldots + z^{p_1-1})(1 + z^{p_1} + \ldots + z^{p_1(p_2-1)})(1 + z^{p_1p_2} + \ldots + z^{p_1p_2(p_3-1)}) \cdots =$$
$$= 1 + z + z^2 + z^3 + \ldots + z^{p_1p_2\cdots p_k-1}.$$

В частности, если последовательность p_j постоянная, то есть $p_j = p$ для

[30] Renyi A., On Cantor's product // Colloq. Math. 6. 1958, p 135–139
[31] Grabner P. and Knopfmacher A, Arithmetical and metric properties of p-adic Engel series expansions // Publ. Math. Debrecen, to appear.
[32] Wu J., Metric properties for p-adic Oppenheim series expansions // Acta Arith. 112.3. 2004., p. 247–261
[33] Mahler K., Introduction to p-adic numbers and their functions // Cambridge University press. 1973.

всех j, то тождество примет вид

$$\prod_{r=0}^{k-1}\left(\sum_{\nu=0}^{p-1} z^{\nu p^r}\right) = \sum_{n=0}^{p^k-1} z^n,$$

означающее, что каждое неотрицательное число $n < p^k$ может быть представлено единственным образом в виде ряда

$$n = \nu_0(n)\cdot p^0 + \nu_1(n)\cdot p^1 + \ldots + \nu_{k-1}(n)\cdot p^{k-1}, \tag{1}$$

где цифры $\nu_r(n)$ удовлетворяют следующим условиям: $0 \leqslant \nu_r(n) < p$. Если мы возьмем $p_j = j$, то $p_1 \ldots p_r = r!$ и искомое тождество примет вид

$$\prod_{r=0}^{k-1}\frac{1-z^{(r+1)!}}{1-z^{r!}} = \prod_{r=0}^{k-1}\left(\sum_{\nu=0}^{r} z^{\nu r!}\right) = \sum_{n=0}^{k!-1} z^n,$$

означающее, что каждое неотрицательное число $n < k!$ может быть представлено единственным образом в виде суммы

$$n = \nu_1(n)\cdot 1! + \nu_2(n)\cdot 2! + \ldots + \nu_{k-1}(n)\cdot (k-1)! \tag{2}$$

где цифры $\nu(n)$ удовлетворяют неравенству: $0 \leqslant \nu_r(n) \leqslant r$.

Рассмотрение бесконечных рядов, частичными суммами которых является сумма (1), приводит к p-адическому анализу (К. Гензель [34]).

Рассмотрение бесконечных рядов, частичными суммами которых является сумма (2) приводит к полиадическому анализу. М. Д. Ван Дантзиг[35] и позже Е. Новоселов[36,37] привели подробные исследования в этой области. Описание конструкции полиадических чисел также дано в книге А.Г. Постникова[38].

Кольцо полиадических чисел находит приложения в теории чисел, а именно, с помощью теории интеграла и меры на полиадических числах были вычислены некоторые асимптотические плотности, а также получен новый вывод ряда известных формул для функций теории чисел[39]. Поэтому, естественным является дальнейшее изучение его свойств и его обобщение.

[34] Hensel K. Theorie der algebraischen Zahlen. Teubner, Leipzig, 1908.

[35] Van Dantzig M.D., Nombres universels ν!-adiques avec une introduction sur l'algèbre topologique // Ann. Sci. de l'École Norm. Sup., N 53, 1936, p. 275–307.

[36] Новоселов Е.В., Новый метод в вероятностной теории чисел. Изв. акад. наук СССР. Серия математика. № 28. 1964. стр. 307-364.

[37] Новоселов Е.В., Введение в полиадический анализ: Учебное пособие по спецкурсу. Петрозаводск. 1982.

[38] Постников А.Г., Введение в аналитическую теорию чисел. Москва. «Наука». 1971.

[39] Новоселов Е.В., Об интегрировании на одном бикомпактном кольце и его приложениях к теории чисел. Изв. высших учеб. заведений. Математика. 1961. № 3 (22), стр. 66–79

Прямое произведение колец $\mathbb{Z}_{p_i}$ по всем простым числам p_i, как отмечалось выше, изоморфно кольцу полиадических чисел $\mathbb{Z}_{\Pi}$. Для полиадических чисел существует каноническое представление в виде бесконечного ряда вида $\sum\limits_{m=1}^{\infty} a_m m!$. Элементы этого кольца также можно представить рядами специального вида. На их множестве вводится теория меры и интегрирования. Исследуются некоторые метрические свойства этих рядов.

Естественно рассмотреть некое обобщение понятия полиадических чисел, а именно, рассмотреть бесконечные прямые произведения колец целых p_i-адических чисел по некоторой бесконечной совокупности простых чисел $P' = \{p_i\} \subset P$.

Этому подмножеству соответствует некоторая топология, как и в случае кольца полиадических чисел. Поэтому, обобщение понятия полиадических чисел (названное нами кольцом полуполиадических чисел) можно строить аналогичным образом, как топологическое кольцо, через пополнение метрического пространства. Кольцо полуполиадических чисел также можно построить как обратный предел по системе конечных коммутативных колец, порядок которых делится только на простые числа из заранее фиксированного подмножества простых чисел P'. В работе предложены две указанные конструкции и показано, что такие построения эквивалентны и приводят к одному и тому же понятию. На данном кольце также строятся классические конструкции: теория меры и интегрирования, определяется измеримый изоморфизм в отрезок $[0, 1]$, сохраняющий интегралы, вычисляются меры различных множеств. Для кольца полуполиадических чисел доказывается теорема о равномерности распределения множества натуральных чисел в данном кольце.

Цель работы

- Построить аналог разложения Оппенхайма в кольце g-адических чисел. Исследовать арифметические и метрические свойства указанного аналога.

- Изучить методы построения кольца полиадических чисел и обобщить данное понятие, предложив различные конструкции этого обобщения. Исследовать структуры, возникающие на указанном обобщении кольца полиадических чисел: построить теорию меры, интегрирования. Для данного обобщения вычислить меры некоторых множеств.

- Получить для рассматриваемого обобщения аналог канонического разложения (аналогично кольцу полиадических чисел) и исследовать его арифметические и метрические свойства. Решить вопрос о равномерной распределенности множества натуральных чисел в полученном кольце.

Научная новизна

1. Построен аналог разложения Оппенхайма в кольце g-адических чисел, учитывающий наличие ненулевых необратимых элементов. Получены метрические свойства указанного разложения, аналогичные свойствам p-адического разложения Оппенхайма. В частности, вычислено математическое ожидание некоторой характеристики коэффициентов указанного разложения. Доказана теорема о нормальности распределения значений этой характеристики.

2. Предложено естественное обобщение кольца полиадических чисел (названного кольцом полуполиадических чисел) и даны две его конструкции. Вычислены меры различных множеств в кольце полуполиадических чисел. В частности, вычислена мера обратимых элементов кольца полуполиадических чисел и доказано, что мера делителей нуля равна нулю. Вычислена мера подмножества полуполиадических чисел, у которых соответствующие коэффициенты ряда в каноническом виде фиксированы. Как следствие, доказано, что коэффициенты разложения полуполиадического числа в каноническом виде — независимые случайные величины.

3. Построено отображение h полуполиадических чисел в отрезок $[0, 1]$, сохраняющее меру. Доказано, что при отображении h интегрируемая вещественнозначная функция на кольце полуполиадических чисел переходит в интегрируемую функцию на отрезке $[0, 1]$ и интегралы от этих функций равны. Доказано, что множество натуральных чисел равномерно распределено в кольце полуполиадических чисел.

4. На множестве натуральных чисел построена инвариантная мера. Даны два ее описания: как индуцированная с кольца полуполиадических чисел и с помощью асимптотического распределения простых чисел. Благодаря этой связи вычислены меры некоторых подмножеств натуральных чисел.

Основные методы исследования

В работе используются методы вероятностной и аналитической теории чисел, классические результаты из теории чисел про распределение простых чисел. Также используются методы коммутативной алгебры, методы теории меры и интегрирования на компактных абелевых группах, методы теории множеств, методы теории вероятности.

Теоретическая и практическая ценность работы

Работа имеет теоретический характер. Полученные в диссертации результаты представляют интерес для теории чисел, алгебры, теоретической и математической физики.

Апробация работы

Результаты диссертации докладывались:

- на Международной научной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов - 2011». Москва, апрель 2011 года;
- на Всероссийской конференции, посвященной 110-летию математического факультета МПГУ. Москва, март 2011 года;
- на VII Международной конференции «Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения», посвященной памяти профессора Анатолия Алексеевича Карацубы. Тула, май 2010 года;
- на научном семинаре по аналитической теории чисел. МГУ, февраль 2011 года;
- на научно-исследовательском семинаре кафедры теории чисел. МГУ, ноябрь 2010 года.

Публикации

Результаты автора по теме диссертации опубликованы в 3 работах. Список работ приводится в конце автореферата [1, 2, 3].

Структура и объем диссертации

Диссертационная работа состоит из введения и трех глав. Список литературы включает 54 наименований. Общий объем диссертации составляет 68 страниц.

Краткое содержание работы

Введение содержит краткое описание истории вопроса и обзор посвященной этому вопросу литературы.

В первой главе сведены основные факты о разложениях Оппенхайма в поле действительных чисел и в поле $\mathbb{Q}_p$. Приведены важные для дальнейшего использования свойства p-адических чисел.

Во второй главе строится обобщенное разложение Оппенхайма в кольце $\mathbb{Q}_g$, где $g = p_{i_1} \cdots p_{i_n}$, и исследуются его свойства; установлена соответствующая теорема о нормальности распределения некоторой характеристики коэффициентов разложения. Использование обычного разложения Опенхайма для кольца g-адических чисел не всегда возможно, как показывает следующая лемма.

Лемма **7.** *Вероятность того, что p-адический алгоритм Оппенхайма в кольце $\mathbb{Q}_g$, где число g составное, перестанет работать, равна*

$$1 - (\varphi(g)/g)^n$$

и стремится к 1 при $n \to \infty$.

Следовательно, для того чтобы получить обобщенный алгоритм, нам нужно заменить операцию взятия обратного $a \mapsto a^{-1}$ и операцию взятия «дробной части p-адического числа» $a \mapsto \langle a \rangle$.

Для обобщения операции взятия обратного, мы пользуемся теоремой Малера[33], из которой следует, что $\mathbb{Q}_g$ является регулярным по фон-Нойману[40]. В таком кольце для любого элемента a существует единственный элемент a^*, такой что $a = a^2 a^*$ и $a^* = (a^*)^2 a$. Более того, если элемент a обратим, то $a^* = a^{-1}$.

В работе устанавливается, что некоторым аналогом взятия дробной части в описанном выше разложении Оппенхайма является операция $a \mapsto \langle a \rangle$, для которой справедлива

[40] Lambek J., Lectures on rings and modules // Blaisdell publishing company, Massachusetts, Toronto, London. 1966.

Теорема **10.** *Пусть задано некоторое $x \in \mathbb{Q}_g$ и r_n и s_n — некоторые последовательности ненулевых рациональных чисел. Тогда ряд*

$$a_0 + a_1^* + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r_1 \dots r_n}{s_1 \dots s_n} \cdot a_{n+1}^*, \tag{3}$$

где $a_0 = \langle x \rangle$, $A_1 = x - a_0$, $a_n = \langle A_n^* \rangle$, $A_{n+1} = (A_n - a_n^*)\dfrac{s_n}{r_n}$ сходится при выполнении следующего условия:

$$\nu(A_{n+1}) \geqslant 2\nu(A_n) + 1 + \nu(s_n) + \nu(r_n^{-1}).$$

При этом сумма ряда равна x.

Следует отметить, что если число g, рассматриваемое в теореме, простое, то числа a_n и A_n строятся в точности как в алгоритме Опенхайма, а ряд 3 совпадает с разложением Опенхайма. Таким образом, разложение, описанное в теореме выше является непосредственным обобщением разложения Опенхайма для p-адических чисел. Более того, условия сходимости ряда таковы, что в p-адическом случае дают обычные условия сходимости.

Для каждого простого числа p введем обозначение $X_p = p\mathbb{Z}_p$. Это есть подмножество p-адических чисел x порядка $ord_p x \geqslant 0$.

В книге В.Г. Спринджука[41] дается определение меры в поле $\mathbb{Q}_p$. Если $C = C(x, p^{-m-1}) = \{y \in \mathbb{Q}_p : \|y - x\|_p = p^{-m-1}\}$ — диск радиуса p^{-m-1}, то мера P этого множества равна $P(C) = p^{-m}$.

В дальнейшем мы предполагаем, что произвольный элемент $x \in \mathbb{Q}_g$ имеет при изоморфизме $\mathbb{Q}_g = \mathbb{Q}_{p_1} \times \ldots \times \mathbb{Q}_{p_N}$ координаты, обозначенные через x_i. Координаты элементов a_n, A_n будут обозначаться через a_n^i, A_n^i соответственно. Тогда для коэффициентов разложения $\{a_n^i : n \geqslant 0\}$ верны следующие леммы

Лемма **9.** *Последовательность случайных величин $\{a_n^i : n \geqslant 1\}$ образует цепь Маркова с переходной вероятностью*

$$P_i\{a_{n+1}^i = k_{n+1}^i | a_n^i = k_n^i\} = \left|\frac{r_n}{s_n}\right|_p \frac{|k_n^i|_p^2}{|k_{n+1}^i|_p^2},$$

где числа $k_1^i, \dots, k_{n+1}^i \in S_{p_i}$, $i = \overline{1, N}$, удовлетворяют

$$\begin{aligned} &\nu_i(k_1^i) \leqslant -1, \\ &\nu_i(k_{j+1}^i) = 2\nu_i(k_j^i) - 1 + \nu_i(r_j) - \nu_i(s_j), j = \overline{1, n}. \end{aligned}$$

[41] Спринджук В.Г., Проблема Малера в метрической Теории Чисел. Минск. 1967.

Для $x_i \in X_{p_i}$ введем обозначение $\{\Delta_n^i(x_i): \ n \geqslant 0\}$ — последовательность случайных величин, таких что

$$\Delta_0^i(x_i) = \nu_i(a_1^i)$$

и

$$\Delta_n^i(x_i) = \nu_i(a_{n+1}^i) - 2\nu_i(a_n) - \nu_i(r_n) + \nu_i(s_n)$$

для $n \geqslant 1$. При этом, для вектора $x \in \prod\limits_{p_i|g} Q_{p_i}$ обозначим $\overrightarrow{\Delta_n(x)} = (\Delta_n^1(x_1), \ldots, \Delta_n^n(x_n))$.

Для рассматриваемой величины верна

Лемма **11.**

$$E(\overrightarrow{\Delta_n(x)}) = \overrightarrow{\left(-\frac{p_i}{p_i - 1}\right)}, \quad i = \overline{1, N}$$

Теорема **11.** *Пусть $x \in \Pi_{i=1}^N \mathbb{Q}_{p_i}$ и $x_i \in X_{p_i}$. Для алгоритма разложения числа x, описанного выше, верно:*

$$\sqrt{n}\left(\sum_{j=0}^{n-1} \overrightarrow{\Delta_j(x)} - \overrightarrow{\mu}\right) \Rightarrow \eta, \text{ где } \eta \in \mathcal{N}(0, C),$$

$$\text{где } \mu = E(\overrightarrow{\Delta_n(x)}) = \overrightarrow{(-\frac{p_i}{p_i - 1})}, \quad i = \overline{1, N},$$

а C — диагональная матрица ковариации

$$\begin{pmatrix} Var(\Delta_j^1(x_1)) & & 0 \\ & \ldots & \\ 0 & & Var(\Delta_j^N(x_N)) \end{pmatrix}.$$

В третьей главе изучается обобщение кольца полиадических чисел, которое получается, как пополнение кольца целых чисел по топологии, заданной идеалами кольца целых чисел. В диссертации рассмотрено пополнение по несколько другой топологии. При этом возникает кольцо, называемое кольцом полуполиадических чисел. Для него мы строим теорию меры и интегрирования, аналогичные тем, что построены для кольца полиадических чисел. Мы доказываем основные свойства полуполиадических чисел и теорему о равномерности распределения последовательности натуральных чисел в кольце полуполиадических чисел.

Пусть X — некоторое подмножество произвольного кольца R. Введем следующее обозначение:

$$M(X) = \{x_1 \dots x_n |\ x_i \in X,\, n \in \mathbb{N}\}.$$

Пусть $P \subset \mathbb{N}$ — множество простых чисел и пусть $P' \subset P$ — некоторое фиксированное подмножество P.

Введем на $\mathbb{Z}$ топологию с помощью окрестностей вида $m\mathbb{Z}$, где $m \in M(P')$. Получим топологическое кольцо.

В этом случае кольцо целых чисел также может быть снабжено метрикой, метризующей нашу топологию:

$$\rho(x,y) = \sum_{m \in M(P')} \frac{1}{2^m} \left(\frac{x-y}{m} \right), \tag{4}$$

где (t) — расстояние от t до ближайшего к нему целого числа.

Данное метрическое пространство не полно. Определим *полуполиадические числа* $\widehat{\mathbb{Z}}_{\Pi}$ как пополнение этого метрического пространства. Данное пополнение также является кольцом, содержащем $\mathbb{Z}$.

Кольцо полуполиадических чисел можно определить чисто алгебраически через обратный предел системы конечных колец. В случае полиадических чисел мы использовали специальную базу окрестностей нуля, заданную последовательностью $m!$. Для полуполиадических чисел надо ввести специальную функцию, которую мы будем обозначать через $\Pi(n)$.

Пусть функция $\Pi(n) : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$ удовлетворяет следующим свойствам:

1. $\Pi(1) = 1$;
2. $\mathbb{Z} \ni \frac{\Pi(n+1)}{\Pi(n)} = \gamma_n \neq 1$;
3. (a) $\forall\, k \in M(P')\, \exists\, n : k \mid \Pi(n)$;
   (b) $\forall\, l \notin M(P')\, \forall\, n : l \nmid \Pi(n)$.

Определим $\widehat{\mathbb{Z}}_{\Pi}$, как обратный предел

$$\varprojlim_{m} \mathbb{Z}/\Pi(n)\mathbb{Z}.$$

Произвольное полуполиадические число x можно представить в виде ряда

$$x = \sum_{m=1}^{\infty} a_m \Pi(m), \quad 0 \leqslant a_m \leqslant \frac{\Pi(m+1)}{\Pi(m)} - 1, \tag{5}$$

который мы будем называть *каноническим видом* полуполиадического числа x.

Обозначим с помощью $\widehat{\mathbb{Z}}_{\Pi}^{*}$ *обратимые элементы* в $\widehat{\mathbb{Z}}_{\Pi}$. Справедлива

Теорема **16.** *Мера обратимых элементов кольца полуполиадических чисел равна* $\eta(\widehat{\mathbb{Z}}_{\Pi}^{*}) = \prod\limits_{p \in P'} (1 - \dfrac{1}{p})$.

Обозначим с помощью D множество делителей нуля в кольце полуполиадических чисел $\widehat{\mathbb{Z}}_{\Pi}$.

Теорема **17.** *Мера делителей нуля в кольце полуполиадических чисел равна* $\eta(D) = 0$.

С помощью конструкции полуполиадических чисел через функцию $\Pi(n)$ можно посчитать меру подмножества полуполиадических чисел с некоторыми фиксированными коэффициентами.

Теорема **18.** *Обозначим через* $X_{i_1,i_2,\dots,i_k}$ *подмножество чисел из* $\widehat{\mathbb{Z}}_{\Pi}$, *у которых соответствующие коэффициенты ряда (5) с номерами* $i_1, i_2, \dots, i_k$ *фиксированы. Тогда*

$$\eta(X_{i_1,i_2,\dots,i_k}) = \frac{\Pi(i_1)}{\Pi(i_1+1)} \cdot \ldots \cdot \frac{\Pi(i_k)}{\Pi(i_k+1)}. \tag{6}$$

Следствие **5.** *Таким образом, если*

$$x = \sum_{m=1}^{\infty} a_m \Pi(m),\ 0 \leqslant a_m \leqslant \frac{\Pi(m+1)}{\Pi(m)} - 1,$$

то коэффициенты $a_n(x)$ *данного разложения — независимые случайные величины, равномерно распределенные на множестве своих значений. При этом, их математическое ожидание равно*

$$E(a_m) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\Pi(m+1)}{\Pi(m)} - 1 \right).$$

На $\widehat{\mathbb{Z}}_{\Pi}$ существует инвариантная относительно сложения мера Хаара, которую мы будем обозначать через η.

Определим отображение $h : \widehat{\mathbb{Z}}_{\Pi} \mapsto [0,1]$ по следующему правилу. Пусть $x \in \widehat{\mathbb{Z}}_{\Pi}$ представлен в виде ряда $x = \sum\limits_{m=1}^{\infty} a_m \Pi(m)$, тогда $h(x) = \sum\limits_{m=1}^{\infty} \dfrac{a_m}{\Pi(m+1)}$.

Теорема **15.** *Введенное отображение обладает следующими свойствами:*

1. *h сюръективно;*
2. *Точки из множества $[0,1] \setminus \mathbb{Q}$ имеют единственный прообраз;*
3. *У точек из $[0,1] \cap \mathbb{Q}$ существует ровно два прообраза;*
4. *Ограничение отображения h на множество $\widehat{\mathbb{Z}}_\Pi \setminus \mathbb{Q}$ является гомеоморфизмом.*

Как следствие, отображение h индуцирует изоморфизм σ-алгебр измеримых множеств. Более того, отображение h сохраняет меру, то есть мера Хаара на $\widehat{\mathbb{Z}}_\Pi$ переходит в меру Лебега μ на отрезке $[0,1]$.

Так как на $\widehat{\mathbb{Z}}_\Pi$ введена мера, то для любой измеримой вещественнозначной функции определено понятие интеграла Лебега и можно рассматривать интегрируемые по Лебегу функции.

Теорема **19.** *При отображении $h : \widehat{\mathbb{Z}}_\Pi \to [0,1]$ интегрируемая вещественнозначная функция переходит в интегрируемую*

$$f \in L_1[0,1] \Leftrightarrow f \circ h \in L_1(\widehat{\mathbb{Z}}_\Pi)$$

и интегралы от этих функций равны

$$\int\limits_{[0,1]} f d\mu = \int\limits_{\widehat{\mathbb{Z}}_\Pi} f \circ h \, d\eta.$$

Теорема **20.** *Пусть $f(x)$ — ограниченная, почти всюду непрерывная на $\widehat{\mathbb{Z}}_\Pi$ вещественнозначная функция. Тогда*

$$\int\limits_{\widehat{\mathbb{Z}}_\Pi} f d\eta = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} f(i).$$

То есть в кольце полуполиадических чисел последовательность натуральных чисел также является равномерно распределенной.

Мера, построенная на кольце полуполиадических чисел, задает некоторую внешнюю меру на множестве натуральных чисел. Применяя общую теорию построения кольца измеримых множеств, мы получаем σ-алгебру измеримых относительно внешней меры подмножеств в $\mathbb{N}$. Пусть M — некоторое подмножество $\mathbb{N}$. Определим $M' = \mathbb{N} \setminus M$, $\overline{M}$ — замыкание M в кольце

$\widehat{\mathbb{Z}}_\Pi$ полуполиадических чисел, $\widetilde{M}$ — замыкание M в $\mathbb{N}$ в индуцированной топологии (то есть $\widetilde{M} = \mathbb{N} \cap \overline{M}$).

Назовем функцию $\pi^*(M) = \eta(\overline{M})$ *внешней мерой* множества M, где, как и раньше η — мера Хаара на $\widehat{\mathbb{Z}}_\Pi$. Функцию $\pi_*(M) = 1 - \eta(\overline{M}')$ — *внутренней мерой* M. Как нетрудно видеть, заданная функция действительно удовлетворяет всем аксиомам внешней меры.

Для произвольной внешней меры на множестве можно определить измеримые множества. Напомним определение: назовем множество M натуральных чисел *измеримым*, если $\pi^*(M) = \pi_*(M) = \pi(M)$. Функцию $\pi(M)$ назовем *мерой* M.

Таким образом, мы можем говорить об измеримых множествах и их мере, которые обладают обычными для меры свойствами. Помимо них данная мера обладает следующим свойством согласованности с кольцевыми операциями: если M измеримо, то множества $a + M$ и mM также измеримы, причем $\pi(a + M) = \pi(M),\ \pi(mM) = \dfrac{1}{d(m)}$.

Теперь мы построим на множестве натуральных чисел асимптотическую меру, основанную на комбинаторных свойствах распределения простых чисел.

Введем дополнительный объект – функцию

$$d(m) : \mathbb{N} \mapsto M(P')$$

по следующему правилу: если

$$m = p_{i_1}^{\alpha_1} p_{i_2}^{\alpha_2} \dots p_{i_s}^{\alpha_s} \cdot p_{j_1}^{\beta_1} \dots p_{j_l}^{\beta_l},$$

где $p_{i_1}, p_{i_2}, \dots \in P'$, и $p_{j_1}, p_{j_2}, \dots \in P \setminus P'$, то $d(m) = p_{i_1}^{\alpha_1} p_{i_2}^{\alpha_2} \dots p_{i_s}^{\alpha_s}$, то есть множитель, состоящий только из выбранных в P' простых чисел.

Введем следующие обозначения: $\mathbf{M}(n)$ — число членов подмножества $M \cap M(P')$, меньших или равных n. $\mathbf{M}_1(n)$ — число классов вычетов $\mod d(n)$, в каждом из которых лежит хотя бы один элемент . $\mathbf{M}_0(n)$ — число классов вычетов $\mod d(n)$, каждый из которых целиком состоит из элементов M.

Следующие формулы показывают связь введенных асимптотических характеристик с определенной выше внешней мерой на множестве натуральных чисел. Для произвольной последовательности $n_k \to 0$ существуют пределы:

$$\lim_{k\to\infty} \frac{M_0(n_k)}{d(n_k)} = \pi_*(M);\ \lim_{k\to\infty} \frac{M_1(n_k)}{n_k} = \pi^*(M).$$

Определим следующие величины:

$$\overline{\pi}(M) = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{M(n)}{n};\ \underline{\pi}(M) = \underline{\lim_{n\to\infty}} \frac{M(n)}{n}$$

— асимптотические меры множества.

Теорема **21.** *В указанных выше обозначениях верно следующее условие:*

$$\pi_*(M) \leqslant \underline{\pi}(M) \leqslant \overline{\pi}(m) \leqslant \pi^*(M).$$

Таким образом, в случае измеримого множества $\pi(M) = \pi_*(M) = \pi^*(M)$ есть не что иное, как асимптотическая мера M. В дальнейшем обозначение $\pi(M)$ используется для асимптотической меры.

Введем некоторые классы последовательностей. Для данной последовательности натуральных чисел $\{m_k\}$ будем говорить, что простое число p *стабилизируется в последовательности* $\{m_k\}$, если все члены $\{m_k\}$, начиная с некоторого, делятся на p. Будем говорить, что простое число p *стабилизируется в степени* s, если все члены $\{m_k\}$, начиная с некоторого, делятся на p^s, но не делятся на p^{s+1}. Будем говорить, что p стабилизируется в $\{m_k\}$, в степени $\geqslant s$, если все члены $\{m_k\}$, начиная с некоторого, делятся на p в степени $\geqslant s$.

Любая последовательность натуральных чисел попадает в один и только в один из следующих пяти классов:

- T_1. Никакое простое $p \in P'$ не стабилизируется в последовательности.
- T_2. В последовательности стабилизируется конечное число простых чисел из P'.
- T_3. В последовательности стабилизируется бесконечное число простых чисел из P', каждое из которых стабилизируется в степени 1.
- T_4. В последовательности стабилизируется бесконечное число простых чисел из P'; из них в степени $\geqslant 2$ стабилизируется конечное число простых чисел.
- T_5. В последовательности в степени $\geqslant 2$ стабилизируется бесконечное число простых чисел из P'.

Напомним, что обратимые элементы кольца полуполиадических чисел (то есть делители единицы) обозначаются с помощью $\widehat{\mathbb{Z}}^*_\Pi$, а с помощью D

обозначаются делители нуля. Пусть $L = \widehat{\mathbb{Z}}_\Pi^* \setminus \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} (p_k^2)$ — множество свободных от квадратов полуполиадических чисел.

Теорема **22.** *Пусть $\{m_k\}$—фундаментальная последовательность натуральных чисел, а число $\alpha = \lim\limits_{k\to\infty}\{m_k\}$. Тогда если $\{m_k\}$ имет тип:*

- *T_1, то $\alpha \in \widehat{\mathbb{Z}}_\Pi^*$;*
- *T_2, то $\alpha \in n_0\widehat{\mathbb{Z}}_\Pi^*$ или $\alpha \in D$;*
- *T_3, то $\alpha \in L$;*
- *T_4, то $\alpha \in n_0^2 L$ или $\alpha \in D$;*
- *T_5, то $\alpha \in \widehat{\mathbb{Z}}_\Pi \setminus \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} n^2 L$.*

Здесь $n_0 = n_0(\alpha)$ — некоторое фиксированное натуральное число.

Определим в кольце полуполиадических чисел аналог *дзета-функции* (от целых чисел) следующим образом:

$$\zeta_{P'}(s) = \sum_{n\in M(P')} \frac{1}{n^s}.$$

Также определим аналог функции Эйлера в полуполиадическом случае следующим образом: $\phi_\Pi(m) = |(\widehat{\mathbb{Z}}_\Pi/m\widehat{\mathbb{Z}}_\Pi)^*|$.

Теорема **23.** *Во введенных выше обозначениях верно следующее:*

$$\eta\{L\} = \zeta_{P'}^{-1}(2); \quad \eta\left\{\widehat{\mathbb{Z}}_\Pi \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} n^2 L\right\} = 0.$$

Приведем еще несколько примеров, иллюстрирующих общую теорию меры на кольце полуполиадических чисел.

Предложение**.** *Пусть $U(m) = \left\{\alpha \in \widehat{\mathbb{Z}}_\Pi | (\alpha, m) = (1)\right\}$ есть все взаимно-простые с m полуполиадические числа. Тогда*

$$\eta\{U(m)\} = \frac{\phi_\Pi(m)}{d(m)} = \prod_{\substack{p|d(m)\\ p\in P'}} (1 - \frac{1}{p}).$$

Замечание. Так как

$$|(\widehat{\mathbb{Z}}_\Pi/m\mathbb{Z}_\Pi)^*| = |(\mathbb{Z}/d(m)\mathbb{Z})^*|,$$

то

$$\phi_\Pi(m) = \phi(d(m)),$$

где $\phi(m)$— функция Эйлера.

В случае полиадических чисел (при $P' = P$) получаем

$$\phi(m) = m\prod_{i=1}^{n}\left(1-\frac{1}{p_i}\right),$$

где $p_i, i=\overline{1,n}$ — простые делители числа m.

Предложение. *Во введенных выше обозначениях выполнено следующее равенство:*

$$\eta\{\widehat{\mathbb{Z}}_\Pi^*\} = \prod_{p\in P'}\left(1-\frac{1}{p}\right) = \frac{1}{\zeta_{P'}(1)}.$$

То есть мера обратимых элементов в кольце полуполиадических чисел равна нулю тогда и только тогда, когда $\zeta_{P'}(1)$ расходится, и не равна нулю в противном случае. При этом всегда мера обратимых элементов меньше единицы: $0 \leqslant \eta < 1$.

Благодарности

Автор благодарит своего научного руководителя, доктора физико-математических наук, профессора Чирского Владимира Григорьевича за постановку задач и внимательное руководство в процессе исследовательской деятельности. Автор глубоко признателен доктору физико-математических наук, профессору Чубарикову Владимиру Николаевичу и члену-корреспонденту РАН, доктору физико-математических наук, профессору Нестеренко Юрию Валентиновичу за интерес, проявленный к работе и полезные обсуждения. Особую благодарность автор выражает к.ф.-м.н. Трушину Дмитрию Витальевичу за знакомство с методами коммутативной алгебры. Автор благодарит всех сотрудников кафедры математического анализа и кафедры теории чисел за творческую атмосферу, которая способствовала научной работе.

Работы автора по теме диссертации

[1] Сухарев И.Ю., О некотором обобщении понятия полиадических чисел// Чебышевский сборник, том 10, выпуск 2, Тула, 2009, стр. 109–122.

[2] Сухарев И.Ю., Разложение Оппенхайма в кольце g-адических чисел Q_g // Чебышевский сборник, том 11, выпуск 1, Тула, 2010, стр. 248–254.

[3] Сухарев И.Ю., Обобщение разложения Оппенхайма для прямого произведения полей с неархимедовским нормированием // Вестник Московского Университета, серия 1, «Математика. Механика», № 3, 2011, стр.50–52.