МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ имени М.В. ЛОМОНОСОВА

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

На правах рукописи

УДК 517.52

Дьяченко Александр Михайлович

# ПОТОЧЕЧНАЯ СКОРОСТЬ СХОДИМОСТИ СРЕДНИХ ЧЕЗАРО

Специальность 01.01.01. - вещественный, комплексный
и функциональный анализ

**АВТОРЕФЕРАТ**

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

**МОСКВА**

**2011**

Работа выполнена на кафедре теории функций и функционального анализа
Механико-математического факультета
Московского Государственного Университета имени М.В. Ломоносова.

| | |
|---|---|
| **Научный руководитель:** | доктор физико-математических наук<br>профессор Потапов Михаил Константинович |
| **Официальные оппоненты:** | доктор физико-математических наук<br>профессор Рубинштейн Александр Иосифович<br>кандидат физико-математических наук<br>доцент Симонов Борис Витальевич |
| **Ведущая организация:** | Национальный исследовательский<br>университет МИЭТ |

Защита диссертации состоится 14 октября 2011 года в 16 часов 40 минут на заседании диссертационного совета Д 501.001.85 при Московском государтсвенном университете имени М.В. Ломоносова по адресу: 119991, ГСП-1, Москва, Ленинские горы, МГУ, механико-математический факультет, ауд. 16-24.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Механико-математического факультета МГУ (Главное здание, 14 этаж).

Афтореферат разослан 13 сентября 2011 года.

Ученый секретарь диссертационного
совета Д 501.001.85 при МГУ,
доктор физико-математических наук,
профессор В.Н. Сорокин

# Общая характеристика работы

## Актуальность темы

Важное место в исследованиях по теории тригонометрических рядов занимают вопросы чезаровской суммируемости рядов Фурье. Особую актуальность они приобретают в многомерной ситуации. Известно, что в кратном случае сходимость ряда Фурье можно определять различными способами [1]. При этом результаты для разных сумм весьма сильно отличаются друг от друга. Наиболее употребительными, и, по-видимому, наиболее естественными, являются прямоугольные частичные суммы, т.е. суммы, определяемые формулой

$$S_{l_1,\dots,l_m}(\mathbf{x};f)=\sum_{|k_1|\le l_1}\dots\sum_{|k_m|\le l_m}c_{\mathbf{k}}(f)e^{i\mathbf{kx}},$$

при $l_1,\dots,l_m\in\mathbf{N}\cup\{0\}$, где $\mathbf{N}$ – множество натуральных чисел. С помощью прямоугольных частичных сумм можно определить несколько видов сходимости рядов Фурье. Основными из них являются сходимость по прямоугольникам (по Прингсхейму) - когда все индексы независимо стремятся к бесконечности, по кубам - когда $l_1=l_2=\dots=l_m\to\infty$, а также $\lambda$-сходимость ($\lambda>1$) по прямоугольникам - когда индексы стремятся к бесконечности независимо, но отношение любых двух индексов не превосходит заданного числа $\lambda$.

Следует отметить, что в многомерном случае даже прямоугольные частичные суммы ведут себя не так, как одномерные частичные суммы рядов Фурье. В частности, принцип локализации Римана несправедлив даже в случае размерности 2 и даже для квадратных частичных сумм непрерывной функции. Ряд Фурье непрерывной функции двух переменных почти всюду сходится по

[1] *Л.В.Жижиашвили. Некоторые вопросы многомерного гармонического анализа. Тбилиси: Изд-во Тбил. ун-та, 1983.*

кубам (Н.Р.Тевзадзе [2]), но при любом $\lambda > 1$ он может всюду $\lambda$-расходиться (Ч.Фефферман [3]), (М.Бахбух, Е.М.Никишин [4]), (А.Н.Бахвалов [5]).

Из сказанного выше вытекает, что проблема восстановления ограниченной измеримой функции многих переменных по ее ряду Фурье, если она обладает определенной гладкостью в окрестности заданной точки, а также изучение скорости этого восстановления являются актуальными задачами. В диссертации предлагается использовать для этих целей средние Чезаро. При этом подчеркнем, что речь идет не об аналоге принципа локализации Римана, поскольку, как вытекает из результатов работ И.Херриота [6], В.А.Ильина [7] и Н.Ч.Крутицкой [8], [9], для $(C, \alpha)$-средних Чезаро аналог принципа локализации верен для всех интегрируемых функций двух переменных лишь для $\alpha > 1$, либо надо требовать определенной гладкости от функции во всех точках. Для случая, когда известна глобальная гладкость функции, вопросы скорости ее приближения очень хорошо изучены. Здесь, в первую очередь, следует упомянуть классические работы

[2]Н.Р.Тевзадзе. О сходимости двойного ряда Фурье функции, суммируемой с квадратом. Сообщения АН ГССР, 1970, т. 57, є 3, с. 525 – 528.

[3]Ch.Fefferman. On the divergence of multiple Fourier series. Bull. Amer. Math. Soc., 1971, v. 77, N 2, p. 191 – 195.

[4]М.Бахбух, Е.М.Никишин. О сходимости двойных рядов Фурье от непрерывных функций. Сиб. математ. журнал, 1973, т. 14, є 6, с. 1189 – 1199.

[5]А.Н.Бахвалов. О расходимости всюду рядов Фурье непрерывных функций многих переменных. Математ. сборник, 1997, т. 188, N 8, с. 45Ц62.

[6]I.G. Herriot. Norlung summmability of double Fourier series. Trans. AMS, 1942, V.52, N1,p. 72 – 94.

[7]В.А. Ильин. Условия локализации прямоугольных частичных сумм кратного тригонометрического ряда Фурье в классах С.М. Никольского. Матем. заметки, 1970, т. 8, N 5, с. 595 – 606.

[8]Н.Ч. Крутицкая. Локализация при ограниченном суммировании методами Чезаро, Рисса и Абеля кратных рядов Фурье. Матем. заметки, 1972, т. 12, N 4 , с. 355 – 364.

[9]Н.Ч. Крутицкая. Окончательные условия локализации прямоугольных чезаровских средних и средних Абеля при ограниченном суммировании кратного тригонометрического ряда Фурье в классах Лиувилля. Изв. АН СССР. Сер. матем, 1973, т. 37, N 3, с. 593 – 602.

С.Н.Бернштейна [10] и П.Л.Ульянова [11] в которых были получены равномерные оценки скорости приближений функций из классов Lip$\alpha$, $\alpha \in (0,1)$ средними Чезаро положительного порядка.

Мы рассматриваем иную ситуацию: от функции требуются измеримость, ограниченность и гладкость по отношению к фиксированной точке.

В одномерной ситуации является актуальным вопрос о скорости сходимости средних Чезаро в точке, если известно поведение $2\pi$-периодической измеримой ограниченной функции при приближении к этой точке.

### Цель работы

Основной задачей, решаемой в диссертации, является установление окончательных в своих терминах оценок скорости поточечной сходимости средних Чезаро в одномерной и многомерной ситуациях, когда известно, что $2\pi$-периодическая по каждой переменной функция измерима, ограничена на $T^m$ и обладает определенной гладкостью в фиксированной точке. При этом будут выявлены различия между одномерной и многомерной ситуациями.

### Методы исследования

В диссертации используется аппарат теории тригонометрических рядов, метрической теории функций и действительного анализа.

[10] S.Bernstein. Sur l'ordre de la meilleure approximation des fonctions continues par des polinomes de degre donne. Mem. de l'Acad. Royale Belgique, 1912, v. 4, p. 1 – 104.

[11] П.Л.Ульянов. О приближении функций. Сибирский математ. журнал, 1964, т. 5, N 2, с. 418 – 437.

**Научная новизна**

Результаты диссертации являются новыми. Установлены следующие основные результаты:

1. В одномерном и многомерном случаях получены оценки поточечной скорости сходимости средних Чезаро рядов Фурье ограниченных измеримых функций, обладающих определенной локальной гладкостью и доказана окончательность этих оценок.

2. Выявлены различия в указанной проблематике между одномерным и многомерным случаями.

**Теоретическая и практическая ценность**

Работа носит теоретический характер. Полученные результаты могут найти применение в теории тригонометрических рядов, метрической теории функций и действительном анализе.

**Апробация работы**

Результаты автора неоднократно докладывались на научно-исследовательском семинаре "Тригонометрические и ортогональные ряды"под руководством профессоров М.К.Потапова, Т.П.Лукашенко, В.А.Скворцова и М.И.Дьяченко в МГУ в 2009 и 2011 годах, а также на Саратовской зимней математической школе в 2008 году и на конференции молодых ученых в Туле в 2009 году.

**Публикации**

По теме диссертации опубликовано 4 научные работы, две из которых в журналах из перечня ВАК. Список публикаций приведен в конце автореферата.

**Структура и объем работы**

Диссертация состоит из введения, трех глав и списка литературы. Общий объем текста — 66 страниц. Список литературы содержит 21 наименование.

**Содержание работы**

Во введении излагается краткая история вопроса, формулируются основные понятия, необходимые для изложения результатов диссертации и дается краткое изложение результатов диссертации.

Для формулировки результатов введем некоторые определения и обозначения. Пусть $m$ – натуральное число, $T = [-\pi, \pi]$, $f(\mathbf{x})$ – это измеримая функция $m$ переменных $2\pi$-периодическая по каждой переменной, которая ограничена на $T^m$, а

$$\sum_{\mathbf{k}\in\mathbf{Z}^m} c_{\mathbf{k}}(f)e^{i\mathbf{kx}} \tag{0.1}$$

- ее ряд Фурье, где $\mathbf{x} = (x_1, ..., x_m)$, $k = (k_1, ..., k_m)$ и $\mathbf{kx} = \sum\limits_{j=1}^{m} k_j x_j$, а

$$c_{\mathbf{k}}(f) = \int\limits_{T^m} f(\mathbf{x})e^{i\mathbf{kx}}d\,\mathbf{x}$$

при $\mathbf{k} \in \mathbf{Z}^m$.

Если число $\beta > 0$, натуральное число $m \geq 1$, $T = [-\pi, \pi]$, функция $f(\mathbf{x}) \in L(T^m)$, а числа $n_i \in \mathbf{N} \cup \{0\}, i = 1, ..., m$, то определим чезаровские $(C, \beta)$-средние ряда Фурье функции $f(\mathbf{x})$ формулой

$$\sigma^{\beta}_{\mathbf{n}}(\mathbf{x}; f) = \sigma^{\beta}_{(n_1,...,n_m)}(\mathbf{x}; f) =$$

$$= \left(\prod_{j=1}^{m} A^{\beta}_{n_j}\right)^{-1} \sum_{l_1=0}^{n_1} ... \sum_{l_m=0}^{n_m} \prod_{j=1}^{m} A^{\beta-1}_{n_j-l_j} S_{l_1,...,l_m}(\mathbf{x}; f),$$

где $S_{l_1,...,l_m}(\mathbf{x}; f)$ – соответствующая прямоугольная частичная сумма ряда Фурье функции $f$, а $A_n^\beta$ – числа Чезаро

$$A_n^\beta = \frac{\prod\limits_{i=1}^{n}(\beta+i)}{n!}.$$

Ниже через $C(.)$ будут обозначаться положительные постоянные, зависящие лишь от параметров, перечисленных в скобках. Эти постоянные не обязаны быть одинаковыми в различных утверждениях, кроме случаев, когда это будет специально оговорено.

В первой главе изучаются ряды Фурье ограниченных измеримых $2\pi$-периодических функций одной переменной, имеющих заданную гладкость в некоторой точке.

**Определение 1**. Пусть $\psi(t)$ – неубывающая на $[0,\infty)$ неотрицательная функция, такая что $\psi(t)\to 0$ при $t\to +0$ и $\psi(t_1+t_2)\le\psi(t_1)+\psi(t_2)$ при любых $t_1\ge 0$ и $t_2\ge 0$. Тогда будем говорить, что $\psi(t)\in\Psi$.

Иными словами, как было показано С.М.Никольским [12], $\Psi$ – это модули непрерывности в пространстве непрерывных функций.

Первый параграф посвящен доказательству оценок сверху. Основными результатами здесь являются следующие утверждения.

**Теорема 1**. Пусть функция $\psi(t)\in\Psi$ такова, что

$$\int\limits_0^\pi \frac{\psi(t)}{t^{\beta+1}}d\,t=\infty.$$

Пусть, также, определенная на $\mathbf{R}$, $2\pi$-периодическая измеримая функция $f(x)$ в заданной точке $x_0$ удовлетворяет при всех $t\in T$ условию

$$|f(x_0+t)-f(x_0)|\le\psi(|t|).$$

Тогда, если $\beta\in(0,1]$, $n\ge 1$, $\sigma_n^\beta(x;f)$ - чезаровское $(C,\beta)$-среднее ряда Фурье

[12] С.М.Никольский. О наилучшем приближении многочленами функций, удовлетворяющих условию Липшица. ДАН СССР, 1946, т. 52, N 1, с. 191 – 194.

функции $f(x)$, то

$$|f(x_0)-\sigma_n^\beta(x_0;f)|\le C(\beta)n^{-\beta}\int\limits_{\frac{\pi}{n}}^{\pi}\frac{\psi(t)}{t^{\beta+1}}dt,$$

где постоянная $C(\beta)$ зависит только от $\beta$.

**Теорема 2**. Пусть функция $\psi(t)\in\Psi$ такова, что

$$\int\limits_0^{\pi}\frac{\psi(t)}{t^{\beta+1}}dt<\infty.$$

Пусть, также, определенная на $\mathbf{R}$, $2\pi$-периодическая, измеримая функция одной переменной $f(x)$ в заданной точке $x_0$ удовлетворяет при всех $t\in T$ условию

$$|f(x_0+t)-f(x_0)|\le\psi(|t|).$$

Тогда, если $\beta\in(0,1)$ и $\sigma_n^\beta(x;f)$ - чезаровские $(C,\beta)$-средние ряда Фурье функции $f(x)$ при $n\ge 1$, то

$$|f(x_0)-\sigma_n^\beta(x_0;f)|=o(n^{-\beta})$$

при $n\to\infty$.

Во втором параграфе первой главы установлена окончательность оценок первого параграфа.

**Теорема 3**. Пусть $\beta\in(0,1]$, а функция $\psi(t)\in\Psi$ такова, что

$$\int\limits_0^{\pi}\frac{\psi(t)}{t^{\beta+1}}dt=\infty.$$

Тогда существуют определенная на $\mathbf{R}$, $2\pi$-периодическая измеримая функция $g(x)$, удовлетворяющая в заданной точке $x_0$ при всех $t\in T$ условию $|g(x_0+t)-g(x_0)|\le\psi(|t|)$, возрастающая последовательность натуральных чисел $\{n_r\}_{r=1}^\infty$ и постоянная $C=C(\psi,\beta)$ такие, что при всех $r$ имеем

$$|g(x_0)-\sigma_{n_r}^\beta(x_0;g)|\ge C{n_r}^{-\beta}\int\limits_{\frac{\pi}{n_r}}^{\pi}\frac{\psi(t)}{t^{\beta+1}}dt.$$

Необходимо отметить, что если

$$u^\beta \int\limits_u^\pi \frac{\psi(t)}{t^{\beta+1}} d\,t = O(\psi(u))$$

при $u \to {}_+0$ (в частности, для $\psi(t) = t^\alpha$, $0 < \alpha < \beta$), то оценка теоремы 3 вытекает из результатов А.И.Рубинштейна [13] Это замечание относится и к формулируемым ниже теоремам 11 и 13.

**Теорема 4**. Пусть $\beta \in (0,1)$, не равная тождественно нулю функция $\psi(t) \in \Psi$ такова, что

$$\int\limits_0^\pi \frac{\psi(t)}{t^{\beta+1}} d\,t < \infty,$$

и неотрицательная последовательность чисел $b_r \to 0$ при $r \to \infty$. Тогда существуют определенная на $\mathbf{R}$, измеримая функция $g(x)$, удовлетворяющая при всех $t \in T$ условию $|g(t) - g(0)| \leq \psi(|t|)$, и возрастающая последовательность натуральных чисел $\{n_r\}_{r=1}^\infty$, для которых при всех $r$ справедлива оценка

$$|g(0) - \sigma_{n_r}^\beta(0; g)| \geq b_{n_r} n_r^{-\beta}.$$

В третьем параграфе первой главы обсуждается возможность так модифицировать приведенные в теоремах 3 и 4 примеры, чтобы оценки снизу выполнялись не по некоторой подпоследовательности, а при всех $n$.

В четвертом параграфе первой главы диссертации будет рассмотрен в одномерной ситуации вопрос об оценках сверху скорости сходимости средних Вороного $2\pi$-периодической измеримой ограниченной функции, обладающей некоторой заданной гладкостью.

Во второй главе диссертации рассматривается двумерная ситуация для частного случая, когда разлагаемая в ряд функция обладает степенной гладкостью в некоторой точке.

[13] А.И.Рубинштейн. Об $\omega$-лакунарных рядах и о функциях классов $H^\omega$. Математ. сборник, 1964, т. 65, N 2, с. 239 -Џ 271.

Справедливо такое утверждение.

**Теорема 8**. Пусть даны $\rho > 0$, $\beta \in (0,1]$, $k \geq 1$ и $\alpha \in (0,1)$. Пусть $2\pi$-периодическая по каждому переменному функция $f(x,y)$ измерима, ограничена и определена на квадрате $T^2$, и в заданной точке $(x_0, y_0)$ для всех $s, t \in T$ удовлетворяет условию

$$|f(x_0+s, y_0+t) - f(x_0,y_0)| \leq \rho(\sqrt{s^2+t^2})^\alpha.$$

Пусть $\sigma^\beta_{n;m}(x,y;f)$ - чезаровские $(C,\beta)$-средние ряда Фурье функции $f(x,y)$ такие, что $\frac{1}{k} \leq \frac{n}{m} \leq k; n \in \mathbf{N}, m \in \mathbf{N}$. Тогда существуют такие постоянные $\mathbf{C}_1(\alpha,\beta,k,\rho)$, $\mathbf{C}_2(\alpha,\beta,k,\rho)$ и $\mathbf{C}_3(\alpha,\beta,k,\rho)$, что

1) если $\beta > \alpha$, то

$$|f(x_0,y_0) - \sigma^\beta_{n;m}(x_0,y_0;f)| \leq \mathbf{C}_1(\alpha,\beta,k,\rho)n^{-\alpha};$$

2) если $0 < \beta < \alpha$, то

$$|f(x_0,y_0) - \sigma^\beta_{n;m}(x_0,y_0;f)| \leq \mathbf{C}_2(\alpha,\beta,k,\rho)n^{-\beta};$$

3) если $0 < \beta = \alpha$, то

$$|f(x_0,y_0) - \sigma^\beta_{n;m}(x_0,y_0;f)| \leq \mathbf{C}_3(\alpha,\beta,k,\rho)n^{-\beta}\ln(n+1).$$

Во втором параграфе второй главы доказывается, что оценки теоремы 8 нельзя усилить по порядку. Здесь доказаны следующие утверждения.

**Теорема 9.** Пусть $0 < \beta \leq 1$. Тогда существуют положительная постоянная $C(\beta)$ и измеримая и ограниченная на $T^2$ функция $g(s,t)$, равная нулю в некоторой окрестности точки (0,0), такие, что для некоторой последовательности натуральных чисел $\{n_k\}_{k=1}^\infty$, где $n_k \to \infty$ при $k \to \infty$, справедлива оценка

$$|\sigma^{\beta}_{n_k,n_k}((0,0);g)| \geq \frac{C(\beta)}{n_k^{\beta}}\ .$$

Из теоремы 9 вытекает невозможность усиления утверждения 2) в теореме 8.

**Теорема 10.** Пусть $0 < \beta < 1$. Тогда существуют положительные постоянные $C_1(\beta), C_2(\beta)$ и измеримая на $T^2$ функция $g(s,t)$ такие, что для всех $s \in T$ и $t \in T$ функция $g(s,t)$ удовлетворяет условию $|g(s,t)| \leq C_1(\beta)\left(\sqrt{s^2+t^2}\right)^{\beta}$ и для некоторой последовательности натуральных чисел $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$, где $n_k \to \infty$ при $k \to \infty$, справедлива оценка $|\sigma^{\beta}_{n_k,n_k}((0,0);g)| \geq \frac{C_2(\beta)}{n_k^{\beta}} \ln n_k$.

Теорема 10 показывает окончательность утверждения 3) в теореме 8.

**Теорема 11.** Пусть $0 < \alpha < 1$ и $\beta \in (0,1]$. Тогда существуют положительные постоянные $C_1(\alpha), C_2(\alpha)$ и измеримая на $T^2$ функция $g(s,t)$ такие, что для всех $s \in T$ и $t \in T$ функция $g(s,t)$ удовлетворяет условию $|g(s,t) - g(0,0)| \leq C_1(\alpha)\left(\sqrt{s^2+t^2}\right)^{\alpha}$ и при всех $n \in \mathbf{N}$ справедлива оценка

$$|\sigma^{\beta}_{n,n}((0,0);g) - g(0,0)| \geq C_2(\alpha) n^{-\alpha}.$$

Таким образом, и утверждение 1) теоремы 8 нельзя усилить.

В третьей главе скорость поточечной сходимости средних Чезаро изучается для всех размерностей $m > 1$ и произвольной гладкости функции в заданной точке. В первом параграфе этой главы доказаны основные оценки сверху скорости сходимости средних Чезаро с ограниченным отношением индексов.

**Теорема 12**. Пусть $R$ – положительное число, $m$ – натуральное число, функция $\psi(t) \in \Psi$. Пусть определенная на $\mathbf{R}^m$, $2\pi$-периодическая по каждому переменному измеримая функция $f(\mathbf{x})$ в заданной точке $\mathbf{x}_0$ удовлетворяет при всех

$\mathbf{t} \in T^m$ условию

$$|f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{t}) - f(\mathbf{x}_0)| \leq \psi(|\mathbf{t}|), \qquad \text{где} \quad |\mathbf{t}| = \left(\sum_{j=1}^{m} t_j^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Тогда, если $\beta \in (0,1]$, $\sigma_{\mathbf{n}}^{\beta}(\mathbf{x}; f)$ - чезаровские $(C, \beta)$-средние ряда Фурье функции $f(\mathbf{x})$ с ограниченным отношением индексов, т.е. такие, что $\frac{n_i}{n_j} \leq R$ при $1 \leq i, j \leq m$, то

$$|f(\mathbf{x}_0) - \sigma_{\mathbf{n}}^{\beta}(\mathbf{x}_0; f)| \leq C(R, m, \beta) n_1^{-\beta} \int_{\frac{\pi}{n_1}}^{2\pi} \frac{\psi(t)}{t^{\beta+1}} dt,$$

где постоянная $C(R, m, \beta)$ зависит только от $R$, $m$ и $\beta$.

Во втором параграфе третьей главы изучен вопрос об окончательности теоремы 12. Для случая, когда

$$\int_0^{\pi} \frac{\psi(t)}{t^{\beta+1}} dt = \infty,$$

окончательность этой оценки сразу следует из результатов первой главы. Точнее, справедлив такой результат.

**Теорема 13**. Пусть $\beta \in (0,1]$, $m$ – натуральное число, а функция $\psi(t) \in \Psi$ такова, что

$$\int_0^{\pi} \frac{\psi(t)}{t^{\beta+1}} dt = \infty.$$

Тогда существуют определенная на $\mathbf{R}^m$, $2\pi$-периодическая по каждому переменному, измеримая функция $g(\mathbf{x})$, удовлетворяющая в заданной точке $\mathbf{x}_0$ при всех $\mathbf{t} \in [-\pi, \pi]^m$ условию $|g(\mathbf{x}_0 + \mathbf{t}) - g(\mathbf{x}_0)| \leq \psi(|\mathbf{t}|)$, возрастающая последовательность натуральных чисел $\{n_r\}_{r=1}^{\infty}$ и постоянная $C = C(\psi, \beta, m)$ такие, что при всех $r$ имеем

$$|g(\mathbf{x}_0) - \sigma_{(n_r, \ldots, n_r)}^{\beta}(\mathbf{x}_0; g)| \geq C n_r^{-\beta} \int_{\frac{\pi}{n_r}}^{\pi} \frac{\psi(t)}{t^{\beta+1}} dt.$$

Кроме того, верно и нижеследующее утверждение.

**Теорема 14**. Пусть $\beta \in (0,1]$, натуральное число $m \geq 2$ и не равная тождественно нулю функция $\psi(t) \in \Psi$ такова, что

$$\int\limits_0^\pi \frac{\psi(t)}{t^{\beta+1}} d\,t < \infty.$$

Тогда существуют определенная на $\mathbf{R}^m$, $2\pi$-периодическая по каждому переменному, измеримая функция $g(\mathbf{x})$, удовлетворяющая в заданной точке $\mathbf{x}_0$ при всех $\mathbf{t} \in [-\pi,\pi]^m$ условию $|g(\mathbf{x}_0+\mathbf{t}) - g(\mathbf{x}_0)| \leq \psi(|\mathbf{t}|)$, возрастающая последовательность натуральных чисел $\{n_r\}_{r=1}^\infty$ и постоянная $C = C(\psi,\beta,m)$ такие, что при всех $r$ имеем

$$|g(\mathbf{x}_0) - \sigma^\beta_{(n_r,\ldots,n_r)}(\mathbf{x}_0; g)| \geq C{n_r}^{-\beta}.$$

Таким образом, для ситуации, когда

$$\int\limits_0^\pi \frac{\psi(t)}{t^{\beta+1}} d\,t < \infty,$$

многомерная ситуация существенно отличается от одномерной.

Автор выражает глубокую признательность своему научному руководителю профессору Михаилу Константиновичу Потапову за постановку задач, ценные советы и постоянное внимание к работе.

## СПИСОК РАБОТ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ


1. *А.М.Дьяченко* О свойствах средних Чезаро двойных рядов Фурье. Вестник МГУ. Сер. 1, Математика, Механика, 2010, N 2, с. 3 – 11.

2. *А.М.Дьяченко* Скорость поточечного приближения функций Чезаровскими $(C, \beta)$-средними их рядов Фурье. Матем. заметки, 2010, т. 88, N 2, с. 217 – 228.

3. *А.М.Дьяченко* Об одном свойстве средних Чезаро двойных рядов Фурье. Современные проблемы теории функций и их приложения, 2008, Изд-во Саратовского ун-та, Саратов, с. 69.

4. *А.М.Дьяченко* Скорость поточечного приближения функций Чезаровскими $(C, \beta)$-средними их рядов Фурье. Материалы Международной научной конференции "Современные проблемы математики, механики, информатики", Тула, 2009, с. 35-37.