

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
имени М. В. ЛОМОНОСОВА

---

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

*На правах рукописи*  
УДК 532.517.532.546

Логвинов Олег Анатольевич

**Особенности неустойчивого вытеснения вязкой жидкости  
из ячейки Хеле-Шоу при больших числах Пекле**

01.02.05 – механика жидкости, газа и плазмы

**А В Т О Р Е Ф Е Р А Т**

диссертации на соискание ученой степени кандидата  
физико-математических наук

Москва – 2011

Работа выполнена на кафедре газовой и волновой динамики механико-математического факультета Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова

**Научные руководители:** доктор физико-математических наук,  
профессор Н. Н. Смирнов  
доктор физико-математических наук,  
О. Е. Ивашнев

**Официальные оппоненты:** доктор физико-математических наук,  
профессор А. Г. Петров  
кандидат физико-математических наук,  
А. А. Осипцов

**Ведущая организация:** РГУ нефти и газа им. И. М. Губкина

Защита состоится 21 октября 2011 года в 15 часов 00 мин. на заседании Диссертационного совета Д 501.001.89 при Московском государственном университете имени М. В. Ломоносова по адресу: 119992 ГСП-2, Москва, Ленинские горы, Главное здание МГУ, механико-математический факультет, аудитория 16-10

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке механико-математического факультета МГУ.

Автореферат разослан « » сентября 2011 года.

Ученый секретарь диссертационного совета  
доктор физико-математических наук

А. Н. Осипцов

## Общая характеристика работы

**Актуальность темы.** Ячейка Хеле-Шоу представляет собой две параллельные пластины, разделенные малым зазором, существенно меньшим, чем ширина пластин. Подобные ячейки используются для аналогового моделирования фильтрационных течений в пористых средах. Предметом настоящего исследования является вытеснение вязкой жидкости, находящейся в ячейке, другой – менее вязкой, подающейся в ячейку. Вытесняющая жидкость стремится прорваться через слой вытесняемой, образуя в ней каналы, называемые вязкими пальцами (*viscous fingers*, Saffman P. G., Taylor G., 1958). В результате развивается так называемая неустойчивость Саффмана – Тейлора. Процессы вытеснения более вязкой жидкости менее вязкой или газом широко распространены в нефтяной промышленности. Одна из технологий нефтедобычи предполагает вытеснение нефти водой из нефтеносного пористого пласта.

Экспериментально установлено, что критерием подобия, определяющим характерный размер вязких пальцев в случае, когда вытесняющая и вытесняемая жидкости не смешиваются, является модифицированное капиллярное число (*Park C. W., Homsy G. M., 1985*). В случае смешивающихся жидкостей таким критерием выступает число Пекле (*Tan C. T., Homsy G. M., 1986*). Однако существуют эксперименты по скоростному (числа Пекле больше 1000) вытеснению водоглицериновой смеси водой (смешивающиеся жидкости), в которых этот критерий не срабатывает (*Smirnov N.N., Nikitin V.F., Ivashnyov O.E., etc., 2002–2004*). Образующиеся пальцы имеют конечную ширину, не зависящую от скорости вытеснения.

**Целями работы** являются: установление критерия подобия и выделение стабилизирующего фактора вытеснения вязкой жидкости из ячейки Хеле-Шоу менее вязкой жидкостью, смешивающейся с вытесняемой, при больших числах Пекле, когда эффекты диффузии малы по сравнению с проникновением одной жидкости в другую за счет развивающейся неустойчивости; определение

характерного размера вязких пальцев и исследование их устойчивости; моделирование вытеснения при больших числах Пекле методом сквозного счета.

Для достижения поставленных целей **решались три задачи:**

1. Об устойчивости границы раздела при фронтальном вытеснении в линейной постановке (неустойчивость типа Саффмана – Тейлора).
2. Об устойчивости границы раздела при сдвиговом течении в линейной постановке (неустойчивость типа Кельвина–Гельмгольца).
3. Численное моделирование вытеснения вязкой жидкости из ячейки Хеле-Шоу.

**Научная новизна** заключается в том, что автором впервые:

1. Выявлен стабилизирующий фактор, определяющий структуру фронта вытеснения, – силы вязкости в плоскости ячейки. Получена оценка характерной ширины пальцев на начальной стадии формирования и предложен критерий подобия.
2. Показано, что за счет инерции вытесняющей жидкости на боковой поверхности пальцев развивается неустойчивость. По схожести механизмов обнаруженная неустойчивость аналогична неустойчивости Кельвина – Гельмгольца (*Ламб Г., 1947*). Силы вязкости в плоскости ячейки приводят к стабилизации боковой поверхности.

**Достоверность результатов** подтверждается качественным соответствием с экспериментальными данными и численным моделированием.

**Научная и практическая ценность** заключается в том, что:

1. Осреднением уравнений Навье – Стокса по зазору ячейки Хеле-Шоу получены двумерные уравнения движения, учитывающие малые силы инерции и вязкости в плоскости ячейки. Предложен критерий подобия вытеснения вязкой жидкости из ячейки Хеле-Шоу при больших числах Пекле.
2. Разработан метод моделирования вытеснения вязкой жидкости из ячейки Хеле-Шоу при больших числах Пекле.

**На защиту выносятся:**

1. Осредненные уравнения движения вязкой жидкости в ячейке Хеле-Шоу, учитывающие малые силы инерции и вязкости в плоскости ячейки.
2. Критерий подобия вытеснения вязкой жидкости из ячейки Хеле-Шоу при больших числах Пекле.
3. Объяснение механизма развития неустойчивости на боковой поверхности пальцев.
4. Метод моделирования вытеснения вязкой жидкости из ячейки Хеле-Шоу при больших числах Пекле.

**Публикации и апробация диссертации.** Основные результаты достаточно полно отражены в **10** публикациях, **3** из которых представлены в журналах перечня ВАК. Все положения, вынесенные на защиту, получены автором самостоятельно.

Результаты работы докладывались на следующих научно-исследовательских семинарах и конференциях: семинаре кафедры газовой и волновой динамики под руководством академика Р. И. Нигматулина (МГУ им. М. В. Ломоносова, 2010 г.), семинаре по многофазным средам под руководством профессора Н. Н. Смирнова (МГУ им. М. В. Ломоносова, 2008–2010 гг.), семинаре кафедры аэромеханики и газовой динамики под руководством академика Г. Г. Черного (МГУ им. М. В. Ломоносова, 2009 г.), семинаре по механике сплошной среды под руководством академика РАН А. Г. Куликовского, профессора В. П. Карликова и член-корр. РАН О. Э. Мельника (НИИ механики МГУ, 2011 г.); конференции «Ломоносовские чтения» (МГУ им. М. В. Ломоносова, 2007–2009 гг.), конференции–конкурсе молодых ученых НИИ механики МГУ (2008 г.), Всероссийской конференции «Современные проблемы механики сплошной среды», посвященной столетию со дня рождения академика Л. И. Седова (Москва, 2007 г.), международной конференции «Современные проблемы газовой и волновой динамики», посвященной столетию со дня рождения академика Х. А. Рахматулина (Москва,

2009 г.), Одиннадцатой международной школе-семинаре «Модели и методы аэродинамики» (Евпатория, 2011 г.)

**Структура и объем.** Диссертация состоит из введения, четырех глав, выводов и списка литературы (92 наименования); изложена на 117 страницах с 27-ю рисунками и 2-мя таблицами.

## Содержание работы

**Во введении** описана область исследования, обоснована актуальность темы, сформулированы цели, дан порядок изложения материала и информация о публикациях автора и апробации диссертации.

**В главе I** представлен обзор основных теоретических и экспериментальных работ в рассматриваемой области. Выделены вопросы, требующие дальнейшего изучения.

В рамках классической модели (*Saffman P. G., Taylor G., 1958*) анализируется устойчивость первоначально плоского фронта вытеснения, движущегося по своей нормали. Модель включает уравнение неразрывности и аналог закона Дарси для ячейки Хеле-Шоу. Решается задача на малые возмущения в бесконечной области: слева менее вязкая жидкость («1»), справа более вязкая («2», рис. 1). На границе раздела жидкостей ставятся условия равенства нормальных к фронту скоростей и равенства давлений. На бесконечности – условие постоянства скорости.

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{12\mu}{\delta^2} u, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = -\frac{12\mu}{\delta^2} v, \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0;$$

$$x = \xi(y, t): \quad p_1 = p_2, \quad u_1 = u_2 = \frac{d\xi}{dt};$$

$$x \rightarrow +\infty: \quad u_2 = U_0, \quad v_2 = 0, \quad x \rightarrow -\infty: \quad u_1 = U_0, \quad v_1 = 0.$$

$u, v, p$  – осредненные по зазору ячейки  $\delta$  компоненты скорости и давление,

$\mu$  – вязкость жидкости.

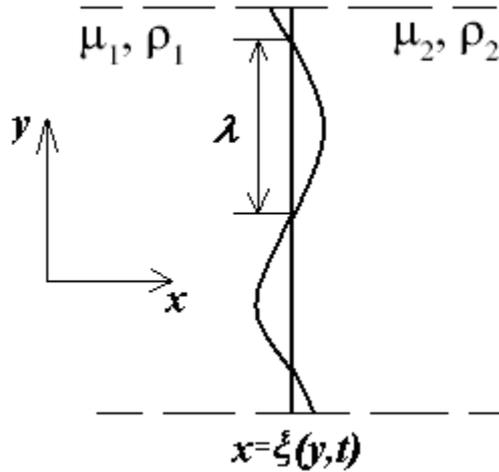


Рис. 1. Постановка задачи устойчивости первоначально плоского фронта вытеснения, движущегося по своей нормали.

Линейный анализ приводит к дисперсионному соотношению между длиной волны возмущения  $\bar{\lambda}$  и интенсивностью его роста  $\bar{h}$

$$\bar{h} = \frac{M-1}{M+1} \frac{1}{\bar{\lambda}}, \quad M = \frac{\mu_2}{\mu_1}, \quad \bar{h} = \frac{h\delta}{U_0}, \quad \bar{\lambda} = \frac{\lambda}{2\pi\delta}. \quad (1)$$

Зависимость  $\bar{h} = \bar{h}(\bar{\lambda})$  для  $M = 100$  показана на рис. 2 кривой 1. Видно, что при  $M > 1$  процесс вытеснения более вязкой жидкости менее вязкой абсолютно неустойчив, декремент затухания строго положителен для всех длин волн. Причем чем меньше длина волны возмущения, тем больше интенсивность его роста, так что возмущения бесконечно малой длины нарастают с бесконечной скоростью. Таким образом, на начальной стадии формирования вязких пальцев мгновенно должно образоваться огромное число тонких «каналов». Это представляется логичным, так как классическая модель учитывает только дестабилизирующий фактор – силу трения о пластины ячейки. При вытеснении более вязкой жидкости менее вязкой она приводит к развитию неустойчивости Саффмана – Тейлора.

Если вытесняющая и вытесняемая жидкости не смешиваются, на границе между ними действуют малые силы поверхностного натяжения.

Условие для давления претерпит изменения:

$$p_1 = p_2 - \sigma \left[ \left( 1 + \left( \frac{\partial \xi}{\partial y} \right)^2 \right)^{-3/2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{1}{\delta} \right].$$

$\sigma$  – коэффициент поверхностного натяжения между жидкостями.

С учетом поверхностного натяжения получается дисперсионное соотношение

$$\bar{h} = \frac{M-1}{M+1} \frac{1}{\bar{\lambda}} - \frac{M}{12\bar{\lambda}^3 (M+1)Ca}, \quad Ca = \frac{U_0 \mu_2}{\sigma}. \quad (2)$$

Зависимость  $\bar{h} = \bar{h}(\bar{\lambda})$  для  $Ca = 0.1$  и  $M = 100$  показана на рис. 2 кривой 2. Учет поверхностного натяжения в плоскости ячейки привел к стабилизации коротковолновых возмущений. Существует критическая длина волны  $\bar{\lambda}^*$ , интенсивность роста которой наибольшая. Считается, что вязкие пальцы имеют ширину наиболее быстро растущего возмущения. Для нее получена аналитическая оценка.

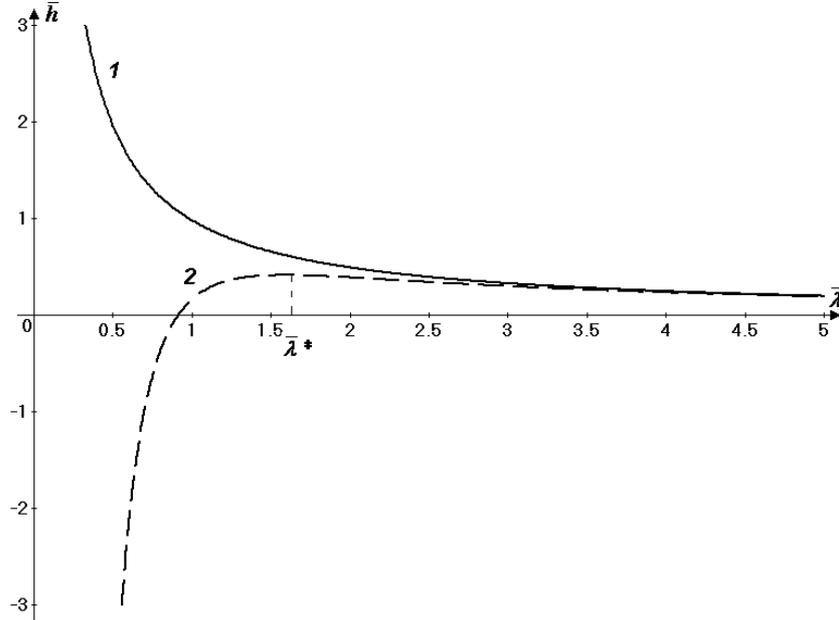


Рис. 2. Зависимость темпа роста возмущений от длины волны: 1 – по решению (1) при отсутствии поверхностного натяжения ( $Ca = \infty$ ); 2 – по решению (2) с учетом поверхностного натяжения ( $Ca = 0.1$ ). В обоих расчетах  $M = 100$ .

В предположении, что течения в двух ячейках подобны, если в них образуется одинаковое число пальцев, получается критерий подобия

$$\lambda^* = \pi \delta \sqrt{\frac{\sigma}{(\mu_2 - \mu_1) U_0}}, \quad \frac{l}{\lambda^* / 2} = const, \quad Ca' = \frac{U_0 \mu_2}{\sigma} \left( \frac{l}{\delta} \right)^2.$$

$l$  – ширина ячейки.

Его квадрат с точностью до константы совпадает с модифицированным капиллярным числом, если вязкостью вытесняющей жидкости пренебречь по сравнению с вязкостью вытесняемой.

Если жидкости смешиваются, структура фронта вытеснения определяется молекулярной диффузией. Коротковолновые возмущения стабилизируются, так как прорвавшиеся тонкие пальцы диффундируют в вытесняемую жидкость,

растворяясь в ней. Критерием подобия выступает число Пекле  $Pe = \frac{U_0 l}{D}$ ,  $D$  –

коэффициент диффузии.

В работе анализируются эксперименты с иным механизмом стабилизации. Водоглицериновая смесь вытесняется водой (смешивающиеся жидкости) при числах Пекле больших тысячи (*Smirnov N.N., Nikitin V.F., Ivashnyov O.E., etc., 2002–2004*). Пальцы имеют конечную ширину, не зависящую от скорости вытеснения, поэтому число Пекле как критерий подобия не срабатывает. Высказывается гипотеза, что для объяснения образования вязких пальцев в подобных экспериментах необходим учет дополнительных параметров в модели. А поскольку течения вязкой жидкости в ячейке Хеле-Шоу хорошо описываются уравнениями Навье – Стокса (числа Рейнольдса порядка единицы), было решено провести их осреднение по зазору ячейки.

**В главе II** уравнения Навье – Стокса несжимаемой вязкой жидкости осредняются по зазору ячейки. Интегрирование по вертикальной координате, перпендикулярной плоскости ячейки, приводит к уравнениям «типа Рейнольдса» (*Шлихтинг Г., 1974*) с осредненными параметрами течения и

отклонениями от средних значений. Они вычисляются в предположении, что профиль скорости между пластинами параболический. Получаются осредненные уравнения, которые в отличие от классической модели содержат члены, характеризующие инерционные свойства жидкости и силы вязкости в плоскости ячейки.

$$\begin{aligned} \rho \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right) + \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} &= -\frac{12\mu}{\delta^2} \bar{u} + \mu \left( \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} \right), \\ \rho \left( \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \right) + \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} &= -\frac{12\mu}{\delta^2} \bar{v} + \mu \left( \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial y^2} \right), \\ \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} &= 0, \\ \bar{u} &= \frac{1}{\delta} \int_{-\delta/2}^{\delta/2} u dz, \quad \bar{v} = \frac{1}{\delta} \int_{-\delta/2}^{\delta/2} v dz, \quad \bar{p} = \frac{1}{\delta} \int_{-\delta/2}^{\delta/2} p dz. \end{aligned}$$

(черточки, означающие осреднение, в дальнейшем опускаются).

Показано, что учет инерции жидкости не приводит к стабилизации фронта вытеснения. Соответствующая зависимость  $\bar{h} = \bar{h}(\bar{\lambda})$  имеет вид

гиперболы (рис. 3 кривая 1,  $M = 84$ ,  $D = \frac{\rho_2}{\rho_1} = 1$ ,  $\text{Re} = \frac{\rho_2 U_0 \delta}{\mu_2} = 1.2$ ).

Выбранные значения безразмерных параметров соответствуют экспериментам *Smirnov N.N., Nikitin V.F., Ivashnyov O.E., etc., 2002–2004.*

Силы вязкости в плоскости ячейки являются малым параметром по сравнению с силой трения о ее пластины. Но решение задачи об устойчивости плоского фронта в классической постановке (1) приводит к образованию в начальный момент большого числа тонких пальцев, эти силы становятся огромными и классическая модель выходит за рамки своей применимости. Поэтому в нее добавляются силы вязкости в плоскости ячейки (приходим к уравнениям «типа Бринкмана», *Brinkman H. C., 1947*). На границе раздела ставятся условия равенства векторов скоростей и векторов напряжений.

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{12\mu}{\delta^2}u + \mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right), \quad \frac{\partial p}{\partial y} = -\frac{12\mu}{\delta^2}v + \mu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right),$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0;$$

$$x = \xi(y, t): \quad \bar{w}_1 = \bar{w}_2, \quad \bar{\sigma}_{1n} = \bar{\sigma}_{1n};$$

$$x \rightarrow +\infty: u_2 = U_0, v_2 = 0, \quad x \rightarrow -\infty: u_1 = U_0, v_1 = 0.$$

Линейный анализ приводит к дисперсионному соотношению

$$\bar{h} = \frac{18\bar{\lambda}^3 \frac{M+1}{M-1} \left(\sqrt{12\bar{\lambda}^2 + 1} - 1\right)}{\sqrt{12\bar{\lambda}^2 + 1} \left[ 18 \left(\frac{M+1}{M-1}\right)^2 \bar{\lambda}^4 + 6\bar{\lambda}^2 + 1 \right] - (18\bar{\lambda}^4 + 12\bar{\lambda}^2 + 1)}. \quad (3)$$

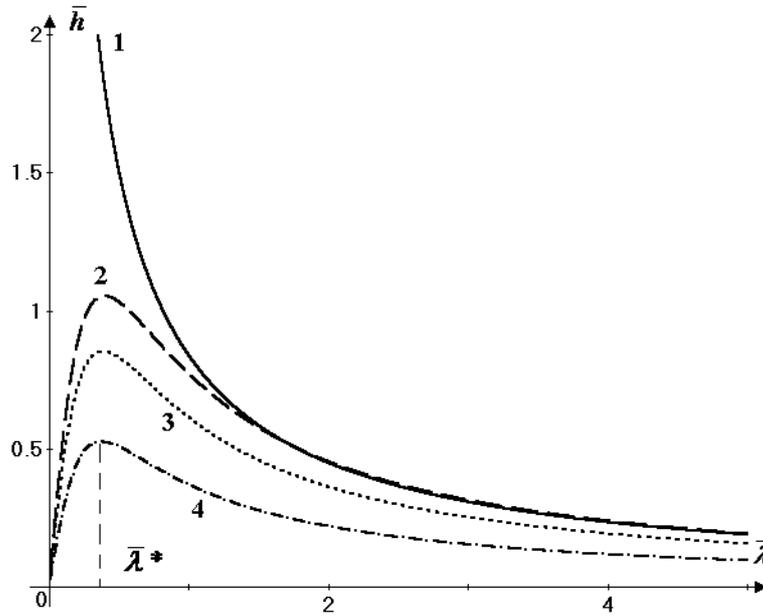


Рис. 3. Зависимость темпа роста возмущений от длины волны: кривая 1 – с учетом инерции жидкости, для  $M = 84$ ,  $D = 1$ ,  $Re = 1.2$ . Кривые 2–4 по решению (3) с учетом вязкости в плоскости ячейки для  $M = 3, 9, 84$  соответственно.

Зависимость  $\bar{h} = \bar{h}(\bar{\lambda})$  для  $M = 3, 9, 84$  показана на рис. 3 кривыми 2–4. Учет вязкости в плоскости ячейки привел к стабилизации коротковолновых возмущений. Существует критическая длина волны возмущения  $\bar{\lambda}^*$ , интенсивность роста которой наибольшая. Ее зависимость от отношения вязкостей показана на рис. 4. Увеличение отношения вязкостей  $M$  не приводит к увеличению ширины пальцев. Она оценивается как  $1.25 \cdot \delta$ . Эта оценка и тенденция, чем больше зазор ячейки, тем шире образующиеся пальцы, качественно согласуется с реальной шириной пальцев на начальной стадии их образования (Smirnov N.N., Nikitin V.F., Ivashnyov O.E., etc., 2002–2004).

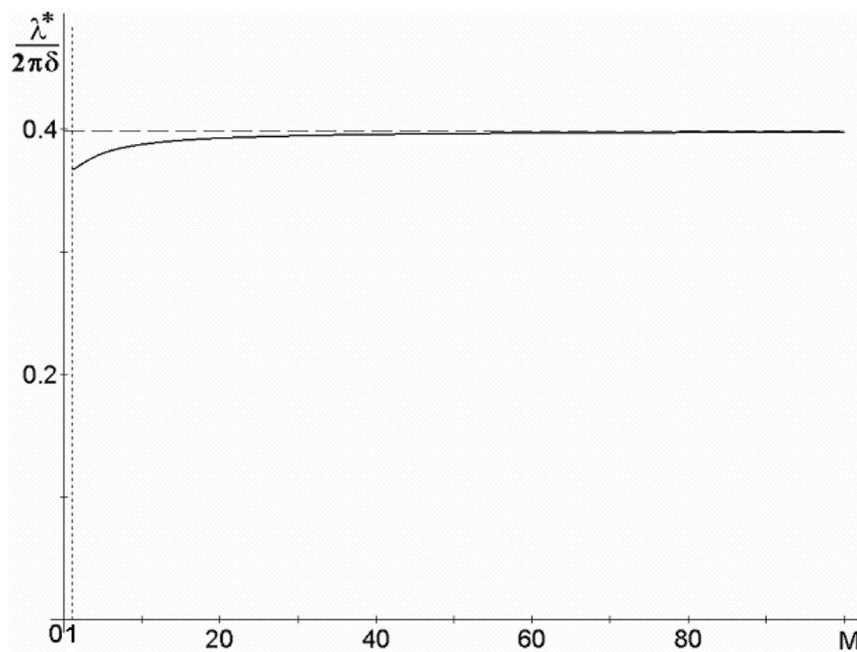


Рис. 4. Зависимость критической длины волны от отношения вязкостей.

В предположении, что течения в двух ячейках подобны, если в них образуется одинаковое число пальцев, получается критерий подобия –

отношение ширины пластин к зазору между ними  $K = \frac{l}{\delta}$ .

В главе III исследуется экспериментально наблюдаемая неустойчивость боковой поверхности вязких пальцев: со временем они могут разрушаться, превращаясь в вязкие пузырьки. Приводится постановка задачи о сдвиговом течении двух вязких жидкостей в ячейке Хеле-Шоу (рис. 5).

Пусть установилась структура фронта вытеснения из чередующихся пальцев, заполненных вытесняющей жидкостью «1», и промежутков между ними с вытесняемой жидкостью «2». Жидкость в пальцах движется со скоростью  $U_1$ , жидкость в промежутках – с меньшей скоростью  $U_2$ . Таким образом, возле границы раздела реализуется сдвиговой поток, когда скорости обеих жидкостей ей параллельны (рис. 6, а).

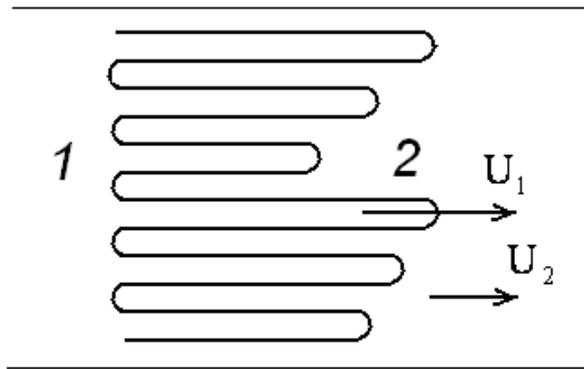


Рис. 5. Постановка задачи о сдвиговом течении двух вязких жидкостей в ячейке Хеле-Шоу.

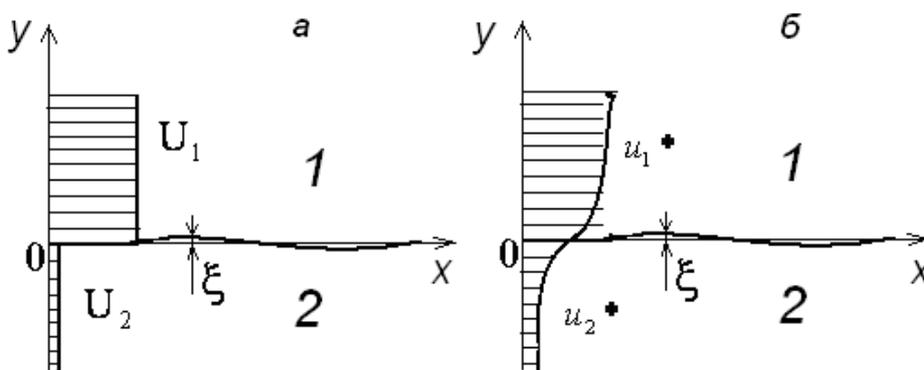


Рис. 6. Профили скоростей: а – без учета сил вязкости, б – с учетом вязкости в плоскости пластин ячейки.

На первом этапе возникающая неустойчивость анализируется в рамках классической модели. Решается задача на малые возмущения в бесконечной области: сверху менее вязкая жидкость («1»), снизу – более вязкая («2», рис. 6, а). На границе ставятся условия равенства давлений и равенства между нормальной к границе скоростью и соответствующей субстанциональной производной вдоль нее. На бесконечности – условия постоянства скоростей.

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial x} &= -\frac{12\mu}{\delta^2} u, & \frac{\partial p}{\partial y} &= -\frac{12\mu}{\delta^2} v, & \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0; \\ y = \xi(x, t): & p_1 = p_2, & v_1 &= \frac{d_1 \xi}{dt}, & v_2 &= \frac{d_2 \xi}{dt}; \\ y \rightarrow +\infty: & u_1 = U_1, & v_1 &= 0, & y \rightarrow -\infty: & u_2 = U_2, & v_2 = 0. \end{aligned}$$

Линейный анализ приводит к дисперсионному соотношению, которое говорит о безразличии границы раздела к малым возмущениям – действительная часть декремента затухания тождественно равна нулю.

$$\operatorname{Re}[\bar{h}(\bar{\lambda})] = \bar{h}_x(\bar{\lambda}) = 0, \quad \operatorname{Im}[\bar{h}(\bar{\lambda})] = \bar{h}_y(\bar{\lambda}) = \frac{2}{(M+1)\bar{\lambda}}.$$

Таким образом, классическая модель не позволяет описать экспериментально наблюдаемую неустойчивость боковой поверхности вязких пальцев.

Высказывается гипотеза, что она аналогична неустойчивости Кельвина – Гельмгольца (Ламб Г., 1947), которая развивается за счет инерции жидкости. Добавление этих сил в классическую модель приводит к следующему дисперсионному соотношению

$$\begin{aligned} \bar{h}_x &= \left[ -\frac{6}{\operatorname{Re}} \frac{M+1}{D+1} \frac{D}{M} + \sqrt{\sqrt{K^2 + \Lambda^2} + K} \right], & (4) \\ K &= \frac{18}{\operatorname{Re}^2} \left[ \frac{(M+1)D}{(D+1)M} \right]^2 + \frac{1}{2\bar{\lambda}^2} \frac{D}{(D+1)^2} \left[ \frac{M-1}{M} \right]^2, & \Lambda &= \frac{6}{\bar{\lambda} \operatorname{Re}} \frac{M-1}{M} \frac{(D-M)D}{(D+1)^2 M}, \\ D &= \frac{\rho_2}{\rho_1}, & \operatorname{Re} &= \frac{\rho_2 U_1 \delta}{\mu_2}. \end{aligned}$$

Зависимость  $\bar{h}_x = \bar{h}_x(\bar{\lambda})$  показана на рис. 7 кривой 1 при  $M = 84$ ,  $D = 1$ ,  $Re = 1.2$ . Возмущения бесконечно малой длины неограниченно возрастают, следовательно, боковая поверхность пальцев начинает разрушаться сразу же при их формировании. Дестабилизирующим фактором, приводящим к развитию неустойчивости данного типа, являются малые силы инерции. По схожести механизмов обнаруженная неустойчивость аналогична неустойчивости Кельвина – Гельмгольца (Ламб Г., 1947).

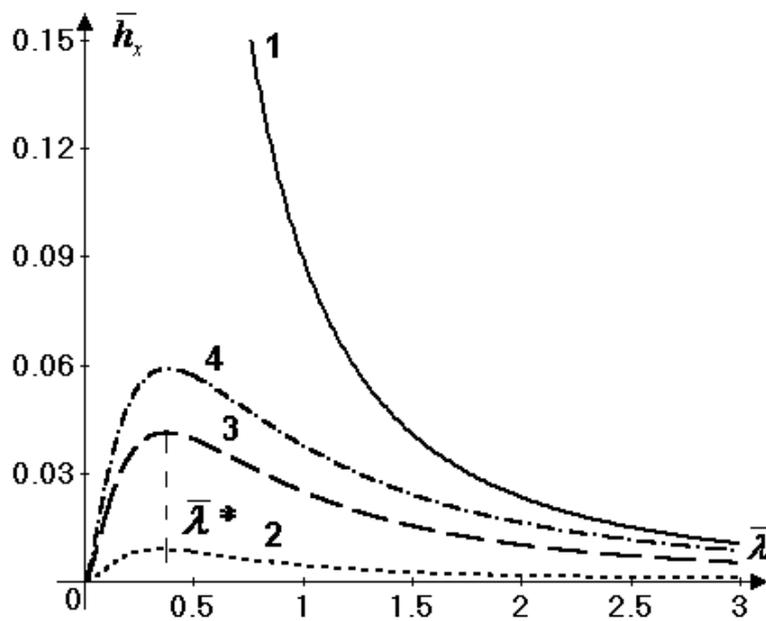


Рис. 7. Зависимость темпа роста возмущений от длины волны: кривая 1 – по решению (4) без учета вязкости в плоскости ячейки для  $Re = 1.2$ . Кривые 2–4 по неявному решению с учетом вязкости в плоскости ячейки для  $Re = 0.1, 0.7, 1.2$  соответственно. Во всех расчетах  $M = 84$ ,  $D = 1$ .

Силы поверхностного натяжения стабилизируют боковую поверхность, когда вытесняющая и вытесняемая жидкости не смешиваются. Высказана гипотеза, что в случае рассматриваемых экспериментов стабилизирующим фактором выступают силы вязкости в плоскости ячейки.

Эти силы добавляются в модель. На границе раздела жидкостей ставятся условия равенства векторов скоростей и векторов напряжений. На бесконечности – условия постоянства скоростей.

$$\rho \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{12\mu}{\delta^2} u + \mu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right),$$

$$\rho \left( \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\partial p}{\partial y} = -\frac{12\mu}{\delta^2} v + \mu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right),$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0;$$

$$y = \xi(x, t): \quad \bar{w}_1 = \bar{w}_2, \quad \bar{\sigma}_{1n} = \bar{\sigma}_{2n};$$

$$y \rightarrow +\infty: \quad u_1 = U_1, \quad v_1 = 0, \quad y \rightarrow -\infty: \quad u_2 = U_2, \quad v_2 = 0.$$

Добавление вязких сил приводит к появлению стационарного экспоненциального профиля скорости (рис. 6, б), поэтому невозмущенное решение зависит от координаты  $y$ . Линейный анализ приводит к дисперсионному соотношению в неявном виде:  $f(\bar{\lambda}, \bar{h}) = 0$ ,  $f$  – комплексная функция. Вместо нее вводится действительная функция  $F = [\text{Re}(f)]^2 + [\text{Im}(f)]^2$ , принимающая нулевые значения при тех же значениях параметров. Корни действительной функции ищутся с привлечением средств MATLAB. Параметры  $\bar{\lambda}$ ,  $\text{Re}$ ,  $M$ ,  $D$  фиксируются, строится трехмерная поверхность  $F(\bar{h}_x, \bar{h}_y) = 0$ ,  $\bar{h} = \bar{h}_x + i\bar{h}_y$ , минимумы (нули) которой определяются методом наискорейшего спуска. При всех рассмотренных значениях параметров существует только один минимум с положительной действительной частью.

Его зависимость от длины волны показана на рис. 7 при  $\text{Re} = 0.1, 0.7, 1.2$  кривыми 2–4 соответственно. Видно, что учет вязкости в плоскости ячейки привел к стабилизации коротковолновых возмущений. Существует критическая длина волны  $\bar{\lambda}^*$ , интенсивность роста которой

наибольшая. Длина образующихся вязких пальцев оценивается как  $\bar{\lambda}^*$ ; считается, что палец разрушается наиболее быстро растущим возмущением. Для условий экспериментов *Smirnov N.N., Nikitin V.F., Ivashnyov O.E., etc., 2002–2004*, это несколько миллиметров, что намного меньше длины ячейки. Поэтому «классические» пальцы с устойчивой боковой поверхностью заметны только на самой ранней стадии вытеснения. На более поздних стадиях начинается их разрушение, приводящее к образованию сложной хаотической структуры.

Таким образом, силы вязкости в плоскости ячейки оказывают стабилизирующее действие, но оно настолько мало, что не приводит к образованию пальцев с устойчивой боковой поверхностью.

**В главе IV** вытеснение вязкой жидкости из ячейки Хеле-Шоу при больших числах Пекле моделируется методом сквозного счета. Движение обеих жидкостей описывается единой системой уравнений Навье – Стокса несжимаемой жидкости с переменной вязкостью, зависящей от объемной концентрации  $\alpha$ :  $\alpha = 0$  соответствует вытесняющей жидкости («1»),  $\alpha = 1$  – вытесняемой («2»). Зависимость вязкости от концентрации предполагается степенной:  $\mu^\chi(\alpha) = \mu_1^\chi \cdot (1 - \alpha) + \mu_2^\chi$ . В расчетах использовались  $\chi = 1$  и  $\chi = -1$ .

К системе уравнений движения и неразрывности добавляется уравнение переноса (уравнение диффузии с нулевым коэффициентом диффузии). С его помощью отслеживается положение фронта вытеснения: если в текущем узле  $\alpha \leq 0.5$ , считается, что там находится первая жидкость, если  $\alpha > 0.5$  – вторая.

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t} + u \frac{\partial \alpha}{\partial x} + v \frac{\partial \alpha}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (5)$$

$$\rho \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{12\mu}{\delta^2} u + \frac{\partial}{\partial x} \left( 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right), \quad (6)$$

$$\rho \left( \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\partial p}{\partial y} = -\frac{12\mu}{\delta^2} v + \frac{\partial}{\partial x} \left( \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} \right). \quad (7)$$

Уравнения (6)–(7) решаются методом прогонки по неявной схеме, а уравнения (5) – по явной. Для тестирования метода проводится сравнение с аналитическим решением задачи о стационарном течении вязкой жидкости в прямоугольном канале между двумя пластинами. Получено полное соответствие.

На рис. 8 и рис. 9 представлены результаты двух расчетов, отличающихся только величиной зазора между пластинами ячейки: на рис. 8  $\delta = 1.2 \text{ мм}$ , на рис. 9  $\delta = 3.7 \text{ мм}$ . Остальные параметры одинаковы и соответствуют экспериментам *Smirnov N.N., Nikitin V.F., Ivashnyov O.E., etc., 2002–2004*. Габариты ячейки: длина – 20 см, ширина – 10 см, отношение вязкостей  $M = 84$ , скорость вытеснения  $U_0 = 2 \text{ см/с}$ . Результаты экспериментов даны в два момента времени. В начальный момент на границе между жидкостями задается полигармоническое возмущение типа  $\sin(1/y)$ , одинаковое в обоих случаях. На входе ячейки поддерживалось постоянное давление  $P_{\text{вход}}$ . Заметно, что на начальном этапе характерный размер пальцев пропорционален зазору между пластинами. Изменение отношения вязкостей и скоростей вытеснения мало влияет на картину образования пальцев. Характерная ширина диктуется нелинейными эффектами.

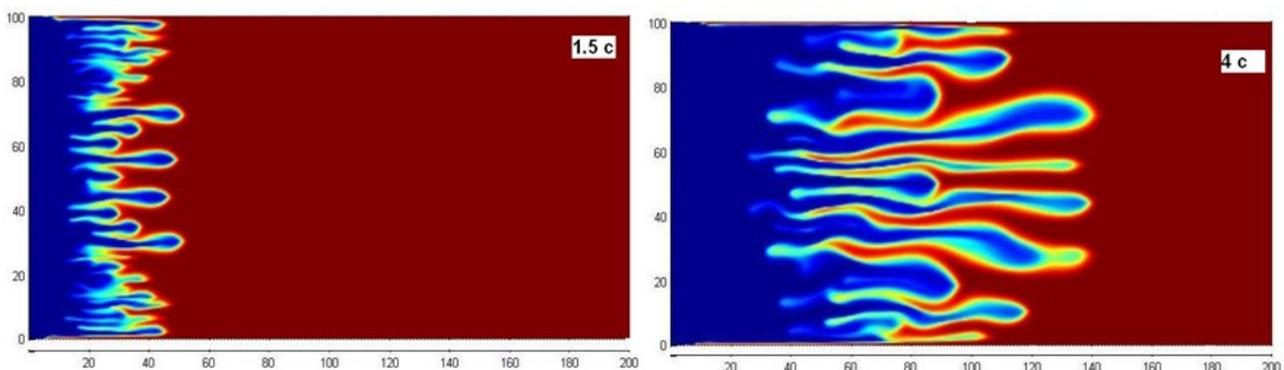


Рис. 8. Результаты численного моделирования для  $\delta = 1.2 \text{ мм}$ : а –  $t = 1.5 \text{ с}$ ,

$$б - t = 4 с .$$

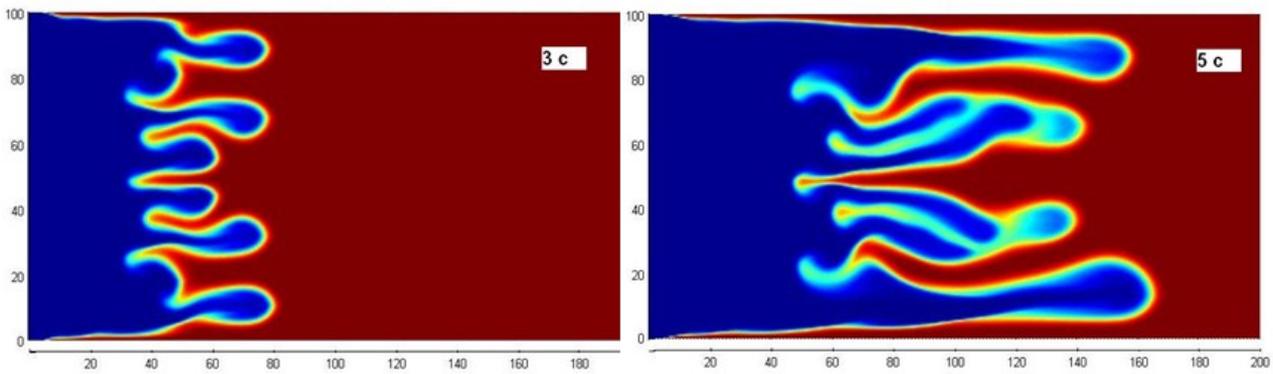


Рис. 9. Результаты численного моделирования для  $\delta = 3.7$  мм : а –  $t = 3$  с ,  
б –  $t = 5$  с .

В конце каждой главы приводятся ее основные результаты. Работа заканчивается **Выводами** и списком литературы.

## Выводы

1. Осреднением общих уравнений Навье – Стокса по зазору ячейки Хеле-Шоу получены двумерные уравнения движения, учитывающие малые силы инерции и вязкости в плоскости пластин ячейки.
2. Выявлен новый стабилизирующий фактор, определяющий структуру фронта неустойчивого вытеснения, – силы вязкости в плоскости ячейки. Характерная ширина образующихся пальцев не зависит от скорости вытеснения, мало зависит от отношения вязкостей и существенно зависит от зазора между пластинами ячейки. На основании этого предложен критерий подобия вытеснения вязкой жидкости из ячейки Хеле-Шоу при больших числах Пекле.
3. Показано, что инерция вытесняющей жидкости приводит к развитию неустойчивости на боковой поверхности пальцев, а силы вязкости оказывают стабилизирующее действие. По схожести механизмов обнаруженная неустойчивость аналогична неустойчивости Кельвина – Гельмгольца.

4. Проведено моделирование вытеснения вязкой жидкости из ячейки Хеле-Шоу при больших числах Пекле методом сквозного счета. Предложенный критерий подобия срабатывает, но ширина пальцев диктуется нелинейными эффектами. Соответствие с экспериментальными данными удовлетворительное.

### **По теме диссертации опубликованы следующие работы**

1. **Логвинов О. А. Об устойчивости боковой поверхности вязких пальцев, образующихся при вытеснении жидкости из ячейки Хеле-Шоу // Вестн. Моск. Ун-та. Сер. 1, Матем. Механ. 2011. № 2. 40–46**
2. **Logvinov O. A., Ivashnyov O. E., Smirnov N. N. Evaluation of viscous fingers width in Hele-Shaw flaws // Acta Astronautica 2010. 67. 53–59**
3. **Звягин А. В., Ивашнев О. Е., Логвинов О. А. О влиянии малых параметров на структуру фронта неустойчивого вытеснения вязкой жидкости из ячейки Хеле-Шоу // Изв. РАН. Механ. жидкости и газа. 2007. № 4. 27–37.**
4. **Логвинов О. А. Особенности неустойчивого вытеснения вязкой жидкости из ячейки Хеле-Шоу при больших числах Пекле // Мат. 11ой межд. шк.-сем. «Модели и методы аэродинамики». Евпатория. 2011. 110**
5. **Ивашнев О. Е., Логвинов О. А. Вытеснение вязких жидкостей из ячейки Хеле-Шоу // Тез. докл. науч. конф. «Ломоносовские чтения». Секц. Механ. Москва. 2009. 81**
6. **Логвинов О. А., Ивашнев О. Е. Исследование устойчивости вытеснения вязких жидкостей из ячейки Хеле-Шоу // Тез. докл. междунар. конф. «Современные проблемы газовой и волновой динамики», посвященной столетию со дня рождения академика Х. А. Рахматулина. Москва. 2009. 62**
7. **Ивашнев О. Е., Логвинов О. А. Неустойчивость при скоростном вытеснении вязкой жидкости из ячейки Хеле-Шоу // Матер. конф. «Современные фундаментальные и прикладные задачи математики и механики» в рамках всероссийского конкурса инновационных проектов. Москва. 2009. 50**

8. *Ивашнев О. Е., Логвинов О. А.* Неустойчивость при фильтрационных течениях вязких жидкостей // Тез. докл. науч. конф. «Ломоносовские чтения». Секц. Механ. Москва. 2008. 89
9. *Логвинов О. А., Ивашнев О. Е.* Неустойчивое вытеснение вязкой жидкости из ячейки Хеле-Шоу // Тез. докл. всеросс. конф. «Современные проблемы механики сплошной среды», посвященной столетию со дня рождения академика Л. И. Седова. Москва. 2007. 114–116
10. *Ивашнев О. Е., Логвинов О. А.* Неустойчивое вытеснение вязкой жидкости из ячейки Хеле-Шоу // Тез. докл. науч. конф. «Ломоносовские чтения». Секц. Механ. Москва. 2007. 78