МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ М. В. ЛОМОНОСОВА

На правах рукописи

Деревянкин Алексей Викторович

ЗАДАЧИ КАЛИБРОВКИ БЕСПЛАТФОРМЕННЫХ ИНЕРЦИАЛЬНЫХ НАВИГАЦИОННЫХ СИСТЕМ

Специальность 01.02.01 — теоретическая механика

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва — 2011

Работа выполнена на кафедре прикладной механики и управления механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук, профессор Матасов Александр Иванович.
Официальные оппоненты:	доктор технических наук, профессор Колосов Геннадий Евгеньевич; кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник Башков Александр Борисович.
Ведущая организация:	Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет).

Защита состоится 28 октября 2011 г. в 16:30 на заседании диссертационного совета Д.501.001.22 при Московском государственном университете имени М. В. Ломоносова по адресу: 119991, Москва, Ленинские горы, Главное здание МГУ, механико-математический факультет, аудитория 16-10.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке механико-математического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова.

Автореферат разослан 28 сентября 2011 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
Д.501.001.22 при МГУ
кандидат физико-математических наук, доцент В. А. Прошкин

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Инерциальная навигация — метод определения местоположения, скорости и ориентации подвижных объектов без использования внешней информации, исходя из показаний чувствительных элементов механической природы, находящихся на объекте. Решающий вклад в создание основ инерциальной навигации внесли работы Б. В. Булгакова, А. Ю. Ишлинского, А. Н. Крылова, Е. Б. Левенталя, Г. О. Фридлендера, Ч. Дрейпера, М. Шулера. Интенсивное развитие метода инерциальной навигации началось в послевоенные годы; значительный вклад в развитие теории инерциальной навигации в этот период в нашей стране внесли В. Д. Андреев, Е. А. Девянин, С. П. Дмитриев, Н. А. Парусников и многие другие ученые. В настоящее время широкие исследования в области инерциальной навигации ведутся во многих учреждениях — в частности, в лаборатории управления и навигации Московского государственного университета под руководством А. А. Голована и Н. А. Парусникова.

Информация в инерциальных навигационных системах формируется на основании показаний чувствительных элементов, к которым относятся акселерометры и датчики угловой скорости, или гироскопы. В показаниях этих чувствительных элементов содержатся ошибки, которые со временем приводят к накоплению ошибок определения координат, скоростей и углов ориентации объекта. Таким образом, один из путей повышения точности решения навигационной задачи заключается в оценивании инструментальных ошибок и введении соответствующих поправок в показания чувствительных элементов. Определение указанных ошибок называется *калибровкой.*

Проблема калибровки инерциальных навигационных систем исследовалась, начиная с 1970-х гг., во многих научных учреждениях и специализированных предприятиях. Однако, несмотря на значительное количество исследований, посвященных проблеме калибровки, и существенные успехи, достигнутые в этой области, общая целостная и методически корректная теория, которая содержала бы подробное математическое исследование этой проблемы, до сих пор отсутствует. Часто на предприятиях ограничиваются приближенными «инженерными» алгоритмами, основанными на хорошей профессиональной интуиции и дающими приемлемые (а иногда и весьма точные) оценки параметров моделей; при этом суждения об эффективности алгоритмов калибровки выводятся из окончательного поведения инерциальной системы на штатных траекториях. Подобные алгоритмы часто позволяют успешно решать конкретные задачи; однако, при таком подходе источники основных погрешностей остаются недостаточно ясными, а предельно допустимые точности оценивания не обсуждаются, и, следовательно, усовершенствование алгоритмов калибровки затруднено. Отметим, что эпизодически доступные западные публикации не содержат внятного анализа ключевых этапов калибровки, определяющего ее эффективность. Поэтому описание алгоритмов калибровки со строгих математических позиций представляется актуальным.

Наиболее эффективным является подход к решению задачи калибровки, основанный на теории оценивания в линейных динамических системах. В соответствии с этим подходом задача калибровки рассматривается как задача оценивания вектора ошибок инерциальной навигационной системы по измерениям выходных сигналов инерциальной системы и, возможно, по некоторым внешним измерениям. Классические методы оценивания исходят из предположения, что вероятностные характеристики ошибок измерений известны; в частности, в задаче калибровки бесплатформенных инерциальных навигационных систем (БИНС) часто полагают, что флуктуационные ошибки чувствительных элементов описываются процессами типа белого шума. Это предположение приводит к методам оценивания, подобным методу наименьших квадратов или фильтру Калмана. Однако на практике не всегда можно с достаточной уверенностью сделать какие-либо предположения относительно статистических характеристик ошибок измерений; в этом случае представляется целесообразным применение *гарантирующего подхода*, который обеспечивает оптимальную оценку параметров в предположении ограниченности модулей ошибок измерений известными величинами. Широкое развитие гарантирующих методов оценивания началось в 60-е годы XX века; значительный вклад в разработку этих методов внесли Н. Н. Красовский, А. Б. Куржанский, М. Л. Лидов, Ф. Л. Черноусько, П. Е. Эльясберг, Х. Витценхаузен, П. Хьюбер, Ф. Швеппе и многие другие отечественные и зарубежные ученые. Гарантирующий подход с успехом применяют и для решения навигационных задач.

Цель работы. Цель диссертации состоит, во-первых, в разработке итерационного алгоритма калибровки блока акселерометров БИНС, основанного на использовании гарантирующего подхода, и, во-вторых, в математической формализации методики стендовой калибровки БИНС, разработанной в Московском институте электромеханики и автоматики, и в исследовании этой методики в рамках стандартной постановки задач оценивания.

Достоверность и обоснованность. Результаты, полученные в диссертации, обоснованы при помощи методов и соотношений теоретической механики, теории оценивания, инерциальной навигации и линейной алгебры. Проведенные вычисления и результаты моделирования разработанных алгоритмов подтверждают их корректность.

Научная новизна. В работе получены следующие новые результаты.

Разработан итерационный алгоритм калибровки блока акселерометров БИНС, основанный на использовании гарантирующего подхода; проведено подробное исследование второй итерации.

Разработана строгая математическая формализация методики стендовой калибровки БИНС. Построена динамическая система «телескопической» структуры, позволяющая погрузить рассматриваемую методику, содержащую многократные перезапуски и выставки системы, в русло стандартной постановки задач оценивания.

Теоретическая и практическая ценность. Проведенное исследование привносит методическую ясность в проблему калибровки. Полученные в работе соотношения могут быть использованы при исследовании существующих и при разработке новых алгоритмов калибровки. Разработанные методы могут быть эффективно применены на специализированных предприятиях.

Обсуждение работы и публикации. Результаты диссертации докладывались на научном семинаре им. А. Ю. Ишлинского кафедры прикладной механики и управления механико-математического факультета МГУ (2007, 2008 и 2011 гг.), на IX и X Конференции молодых ученых в ЦНИИ «Электроприбор», Санкт-Петербург (2007 и 2008 гг.), на Научной сессии МИФИ (2008 г.), на XV Санкт-петербургской международной конференции по интегрированным навигационным системам в ЦНИИ «Электроприбор» (2008 г.), на XVII международном научно-техническом семинаре «Современные технологии в задачах управления, автоматики и обработки информации» в г. Алушта (2008 г.). Основные результаты диссертации были опубликованы в восьми работах, список которых приведен в конце автореферата. Работа над диссертацией выполнялась при поддержке РФФИ (грант № 08-08-00904-а).

Структура и объем диссертации. Работа состоит из введения, двух глав, заключения, списка литературы (81 наименование) и пяти приложений. В работе приведены 10 рисунков и 11 таблиц. Объем основной части диссертации (без приложений) составляет 167 страниц, общий объем — 215 страниц.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во **введении** обсуждается актуальность проблемы калибровки инерциальных навигационных систем и современное состояние исследований в этой области. Рассмотрены различные подходы, применяемые для решения задач калибровки. Также описана структура диссертации, перечислены работы, в которых были опубликованы основные результаты диссертации.

В **первой главе** рассмотрена итерационная методика калибровки блока акселерометров БИНС, основанная на использовании гарантирующего подхода. Описан оптимальный план измерений, полученный решением задачи пространственного гарантирующего оценивания, выведены расчетные соотношения (в том числе для второй итерации), приведены оценки точности определения параметров блока и результаты моделирования.

Модель показаний блока акселерометров. Основное калибровочное соотношение

Введем правую ортогональную строительную систему координат Op, по осям которой в идеале должны быть установлены акселерометры БИНС. Показания блока акселерометров можно представить в следующем матричном виде:

$$f' = (E + C)A_p + \varepsilon + \delta f, \tag{1}$$

где f' — показания акселерометров, E — единичная матрица, $C = (c_{ij})$ — постоянная матрица, диагональные элементы которой соответствуют масштабным коэффициентам акселерометров, а суммы — углам перекосов (то есть отклонениям углов между осями чувствительности акселерометров от 90°), A_p — вектор удельной силы в проекциях на оси трехгранника Op, ε — вектор постоянных смещений нуля акселерометров, δf — вектор флуктуационных ошибок. Задача калибровки заключается в оценивании масштабных коэффициентов, углов перекосов и смещений нуля акселерометров.

Пусть Op' — известный информационный образ системы координат Op. Введем вектор ориентации — единичный вектор удельной силы в проекциях на оси трехгранника Op', обозначив его через n. Так как ориентация Op' известна точно, то и n известен точно. Пусть поворот системы координат Op относительно Op' определяется неизвестным вектором малого поворота φ.

Обозначим значение модуля ускорения силы тяжести в месте проведения испытаний через g; пусть g' — приближенная информация о значении g. Обозначим ошибку этой информации через $\Delta g = g' - g$. Проведя преобразования представленной выше модели показаний блока акселерометров (1), получим скалярное *основное калибровочное соотношение*:

$$n^T \frac{f'}{g'} - 1 = n^T C_0 n + n^T \frac{\varepsilon}{g'} + N_r(n), \qquad (2)$$

где $C_0 = (c^0_{ij}) = C - (\Delta g/g')E$, а $N_r(n)$ — остаточный член. Инструментальные ошибки, значение Δg и компоненты вектора φ неизвестны. Известно лишь, что указанные величины ограничены известными константами:

$$|c_{ii}| \leqslant k_{\max}, \quad |c_{ij}| \leqslant \nu_{\max} \quad (i \neq j), \quad |\Delta g/g'| \leqslant \Delta g_{\max}/g', \quad |\varphi_i| \leqslant \varphi_{\max}, \quad |\delta f_i| \leqslant \delta f_{\max}.$$

Тогда можно показать, что и остаточный член ограничен сверху: $|N_r(n)| \leqslant N_{\max}$. В работе приведены выражения для вычисления верхней оценки $N_{\max}$.

Стандартная форма задачи оценивания

Основное калибровочное соотношение (2) можно записать в стандартной форме:

$$\sigma(n) = H(n)q + \delta\sigma(n), \qquad \|n\| = 1, \qquad (3)$$

где $q = (c^0_{11},\ c^0_{22},\ c^0_{33},\ c^0_{12} + c^0_{21},\ c^0_{13} + c^0_{31},\ c^0_{23} + c^0_{32},\ \varepsilon_1/g',\ \varepsilon_2/g',\ \varepsilon_3/g')^T$ — вектор неизвестных параметров, $n \in S = \{n \mid ||n|| = 1\}$ — известный вектор ориентации, $H^T(n) = (n_1^2,\ n_2^2,\ n_3^2,\ n_1n_2,\ n_1n_3,\ n_2n_3,\ n_1,\ n_2,\ n_3)$ — известный вектор регрессии, $\sigma(n) = n^T f'/g'$ — известные измерения, $\delta\sigma(n) = N_r(n)$ — ошибки измерений, про которые известно лишь, что $|\,\delta\sigma(n)| \leqslant N_{\max}$. Поскольку спектральный состав ошибок измерений часто неизвестен, то естественно поставить задачу оптимального гарантирующего оценивания каждой компоненты вектора q.

Рассмотрим измерения (3). Требуется оценить скалярную величину $J = a^T q$ с помощью линейных функционалов от измерений[1]:

$$\tilde{J} = \int\limits_{n \in S} \Phi_0(n)\sigma(n)\, dn + \sum_{s=1}^{M} \Phi_s \sigma(n_s),$$

где $\Phi_0(n)$ — интегрируемая на S функция. Введя функцию

$$\Phi(n) = \Phi_0(n) + \sum_{s=1}^{M} \Phi_s \delta(n - n_s), \tag{4}$$

можно представить оценку $\tilde{J}$ в виде

$$\tilde{J} = \int\limits_{n \in S} \Phi(n)\sigma(n)\, dn.$$

Обозначим множество всех оценивателей $\Phi(n)$ вида (4) через $\mathcal{F}$. Задача оптимального гарантирующего оценивания состоит в нахождении оценивателя, который минимизирует гарантированную ошибку оценивания, т. е. решает задачу

$$\sup_{q \in \mathbb{R}^9,\, |\delta\sigma| \leqslant N_{\max}} |\tilde{J} - J| \longrightarrow \min_{\Phi \in \mathcal{F}}. \tag{5}$$

В работе показано, что задачу (5) можно свести к следующей вариационной задаче (проблеме моментов):

$$\int\limits_{n \in S} \sigma(n)|\Phi(n)|\, dn \to \inf_{\Phi \in \mathcal{F}} \tag{6}$$

при ограничении (условие несмещенности)

$$\int\limits_{n \in S} H^T(n)\Phi(n)\, dn = a. \tag{7}$$

Доказаны следующие утверждения о структуре решения задачи (6), (7).

1. Существует по меньшей мере одно решение Φ^0 проблемы (6), (7) такое, что оцениватель $\Phi^0(n)$ отличен от нуля не более чем в $m = \dim q$ точках (в рассматриваемом случае $m = 9$).

[1] Можно показать, что привлечение нелинейных оценок не улучшает точности оценивания.

2. Компоненты оптимального оценивателя могут быть отличны от нуля лишь в тех точках, где обобщенный чебышевский полином (ОЧП), соответствующий задаче (6), (7), принимает максимальные по модулю значения.

На основе этих утверждений получен конструктивный алгоритм для нахождения оптимального оценивателя. Сформулируем его в явном виде:

1) находится ОЧП, соответствующий исходной задаче;

2) определяются точки n_s, $s = 1, 2, \ldots, d$, в которых построенный ОЧП принимает максимальные по модулю значения;

3) для найденных точек n_s решается система линейных уравнений

$$\sum_{s=1}^{d} H^T(n_s)\Phi_s^0 = a$$

(условие несмещенности (7)) относительно неизвестных компонент оценивателя Φ_s^0.

Детальное исследование девяти ОЧП, соответствующих разным компонентам вектора q, приводит к оптимальному плану измерений, состоящему из следующих 18 положений[2]:

$$\begin{aligned} n^0_{(1)} &= (1, 0, 0), & n^0_{(3)} &= (0, 1, 0), & n^0_{(5)} &= (0, 0, 1), \\ n^0_{(2)} &= (-1, 0, 0), & n^0_{(4)} &= (0, -1, 0), & n^0_{(6)} &= (0, 0, -1), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} n^0_{(7)} &= (\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2, 0), & n^0_{(11)} &= (\sqrt{2}/2, 0, \sqrt{2}/2), & n^0_{(15)} &= (0, \sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2), \\ n^0_{(8)} &= (\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2, 0), & n^0_{(12)} &= (\sqrt{2}/2, 0, -\sqrt{2}/2), & n^0_{(16)} &= (0, \sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2), \\ n^0_{(9)} &= (-\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2, 0), & n^0_{(13)} &= (-\sqrt{2}/2, 0, \sqrt{2}/2), & n^0_{(17)} &= (0, -\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2), \\ n^0_{(10)} &= (-\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2, 0), & n^0_{(14)} &= (-\sqrt{2}/2, 0, -\sqrt{2}/2), & n^0_{(18)} &= (0, -\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2). \end{aligned}$$

Поочередно поставив блок в указанные 18 положений и используя приведенные в работе расчетные формулы, основанные на основном калибровочном соотношении, можно получить оценки параметров блока.

Общая итерационная процедура построения оценок

Оценить внедиагональные элементы матрицы C при помощи описанной выше процедуры невозможно: оцениванию поддаются только их суммы, отвечающие уг-

[2] Впервые этот план был получен в работе Б о б р и к Г. И., М а т а с о в А. И. Оптимальное гарантирующее оценивание параметров блока ньютонометров. *Известия РАН. Механика твердого тела*, 1993, № 5, с. 8–14.

лам перекосов блока. Таким образом, матрица C полностью не оценивается. Однако, как показано в работе, существует расчетная система координат Op^*, в которой матрица C является симметричной, и, следовательно, все ее компоненты поддаются оцениванию. Далее все вычисления будем проводить в этой системе координат: это дает возможность скорректировать показания блока при помощи полученных оценок и повторить процедуру оценивания. Опишем соответствующий алгоритм более подробно.

Пусть в результате описанной выше процедуры оценивания, которую будем далее называть первой итерацией, построена оценка $C^{(1)}$ матрицы C и оценка $(\varepsilon/g')^{(1)}$ вектора (ε/g'). Положим

$$C = C^{(1)} + \Delta C^{(1)}, \qquad (\varepsilon/g') = (\varepsilon/g')^{(1)} + \Delta(\varepsilon/g')^{(1)}. \tag{8}$$

Проведя преобразования, получим модифицированное основное калибровочное соотношение

$$n^T \left(\frac{f'}{g'}\right)^{(2)} - 1 = n^T C_0^{(2)} n + n^T \left(\frac{\varepsilon}{g'}\right)^{(2)} + N_r^{(2)}(n), \tag{9}$$

которое имеет такую же структуру, что и (2). Здесь

$$\begin{aligned}
\left(\frac{f'}{g'}\right)^{(2)} &= \left(E + C^{(1)}\right)^{-1} \left(\frac{f'}{g'} - \left(\frac{\varepsilon}{g'}\right)^{(1)}\right), \\
\left(\frac{\varepsilon}{g'}\right)^{(2)} &= \left(E + C^{(1)}\right)^{-1} \Delta \left(\frac{\varepsilon}{g'}\right)^{(1)}, \\
C^{(2)} &= \left(E + C^{(1)}\right)^{-1} \Delta C^{(1)}, \\
C_0^{(2)} &= C^{(2)} - (\Delta g/g')E.
\end{aligned} \tag{10}$$

Если заметное влияние в остаточном члене $N_r(n)$ имеют слагаемые, содержащие C, а априорная информация $C^{(1)}$ достаточно точная, т. е. $\|\Delta C^{(1)}\| \ll \|C\|$, то «новый» остаточный член $N_r^{(2)}(n)$ будет меньше «старого» $N_r(n)$ и повторное применение описанной выше процедуры (вторая итерация) должно дать улучшение точности.

Модифицированное основное калибровочное соотношение (9) можно записать в стандартной форме, аналогичной (3). Повторив описанную выше процедуру оценивания, получим оценку вектора $(\varepsilon/g')^{(2)}$, откуда при помощи формул (10) и (8) получим оценки векторов $\Delta(\varepsilon/g')^{(1)}$ и (ε/g'). Для $C^{(2)}$ аналогичным образом поступить нельзя, поскольку несмотря на то, что $C^{(1)}$ и $\Delta C^{(1)}$ — симметричные матрицы, матрица $C^{(2)} = \left(E + C^{(1)}\right)^{-1}\Delta C^{(1)}$, вообще говоря, не является симметричной, и, следовательно, все ее компоненты оценить невозможно. Однако, используя симметричность $C^{(1)}$ и $\Delta C^{(1)}$, при помощи специальных алгебраических преобразований можно получить оценку матрицы $\Delta C^{(1)}$, а следовательно, и матрицы C. В работе подробно описаны соответствующие вычисления.

Моделирование

Для проверки эффективности полученного алгоритма и подтверждения того, что вторая итерация дает улучшение точности оценки параметров по сравнению с первой, было проведено моделирование алгоритма. Моделирование показало, что:

1) первая итерация дает значительное улучшение точности оценивания параметров по сравнению с априорной информацией об их максимальной величине;

2) вторая итерация дает существенное улучшение точности оценивания параметров по сравнению с первой итерацией.

Во **второй главе** проведено математическое исследование методики стендовой калибровки БИНС, разработанной в Московском институте электромеханики и автоматики (МИЭА). Предложена формализация процесса калибровки; построена динамическая система так называемой «телескопической» структуры, позволяющая погрузить рассматриваемый алгоритм, содержащий многократные перезапуски и выставки системы, в русло стандартной постановки задач оценивания. Предложен алгоритм калибровки, основанный на применении фильтра Калмана в «телескопической» системе.

Рассматриваемая методика калибровки состоит из 14 последовательно выполняемых операций. В каждой из операций БИНС устанавливается в определенное положение на поворотный стенд, основание которого неподвижно относительно Земли, после чего осуществляется выставка БИНС. Далее в режиме навигации осуществляется поворот стенда вокруг заданной оси на определенный угол (начальное положение БИНС, ось поворота и угол поворота известны и приведены в описании методики). Оценки параметров определяются по скоростным измерениям, полученным в момент окончания поворота и в некоторый последующий момент времени.

Пусть калибровка БИНС проводится в точке M. Обозначим модельную (расчетную) точку, вычисляемую БИНС, через M'. Введем следующие системы координат, которые будут использованы в работе.

1. Mx — идеальный географический трехгранник, начало которого находится в точке M, а оси направлены следующим образом: ось Mx_3 — вверх по географической вертикали; оси Mx_1 и Mx_2 лежат в плоскости горизонта, при этом ось Mx_1 направлена на восток, а Mx_2 — на север.

2. $M'x'$ — модельный географический трехгранник, который представляет из себя географический трехгранник, связанный с точкой M'.

3. Mz — приборный трехгранник, жестко связанный с корпусом БИНС; по осям этого трехгранника должны быть расположены чувствительные элементы.

4. $M'z'$ — модельный трехгранник, который принимается в алгоритмах БИНС за приборный трехгранник.

5. Mz_x — квазиприборный трехгранник, имеющий такую же ориентацию относительно истинного приборного трехгранника Mz, какую модельный географический трехгранник $M'x'$ имеет относительно модельного приборного трехгранника $M'z'$.

Введем также трехгранники Ox, Ox', Oz, Oz', Oz_x с общим началом в центре Земли O, оси которых параллельны осям определенных выше трехгранников Mx, Mx', Mz, $M'z'$, Mz_x соответственно. Будем называть их так же, как соответствующие им трехгранники с центром в точке M, что не приведет к недоразумению. Взаимосвязь между введенными трехгранниками можно описать следующей диаграммой:

$$\begin{tikzcd}
Oz' \arrow[r, "D'"] \arrow[d, "E+\hat\beta_z"'] & Ox' \arrow[d, "E+\hat\beta_{x'}"'] & \\
Oz \arrow[r, "D'"] \arrow[rr, bend right, "D"'] & Oz_x & Ox \arrow[l, "E+\hat\alpha_x"'] \arrow[ul, "E+\hat\gamma_x"']
\end{tikzcd}$$

Здесь α_x, $\beta_{x'}$, β_z и γ_x — векторы малого поворота, а D и D' — ортогональные матрицы. Через $\hat\rho$ здесь и далее будем обозначать кососимметрическую матрицу, соответствующую вектору ρ.

Динамическая система, описывающая одну операцию из рассматриваемой методики, описывается хорошо известными уравнениями ошибок[3], которые в случае неподвижного основания принимают вид

$$\begin{aligned} \Delta\dot{x} &= \delta V, \\ \delta\dot{V} &= -\Delta x g/a + 2\hat{u}_x \delta V + (-\beta_2,\ \beta_1,\ 0)^T g + \Delta f_{z_x}, \\ \dot{\beta}_{x'} &= \hat{u}_x \beta_{x'} + \nu_{z_x}, \end{aligned} \tag{11}$$

где Δx — вектор полных ошибок определения координат, δV — вектор динамических ошибок определения относительных скоростей, $\beta_{x'} = (\beta_1,\ \beta_2,\ \beta_3)^T$ — вектор кинематических ошибок, a — большая полуось земного эллипсоида, u_x — вектор угловой скорости вращения Земли, а Δf_{z_x} и ν_{z_x} — векторы инструментальных погрешностей соответственно акселерометров и гироскопов, которые выражаются через постоянные параметры блоков следующими формулами:

$$\Delta f_{z_x}(t) = A_1(t)c + A_2(t)l + A_3(t)(\varepsilon + \delta f_z(t)), \qquad \nu_{z_x}(t) = A_4(t)\Gamma + A_5(t)(\nu_0 + \delta\nu_z(t)).$$

Здесь c и Γ — векторы, содержащие масштабные коэффициенты и углы перекосов акселерометров и гироскопов соответственно, ε и ν_0 — векторы смещений нуля акселерометров и гироскопов соответственно, l — вектор, описывающий разнесение чувствительных масс акселерометров, $\delta f_z(t)$ и $\delta\nu_z(t)$ — векторы непараметрических (флуктуационных) ошибок показаний акселерометров и гироскопов соответственно, $A_1(t), \ldots, A_5(t)$ — некоторые матрицы. Тогда, введя вектор состояния $X(t) = \big(\Delta x(t)^T,\ \delta V(t)^T,\ \beta(t)^T,\ c^T,\ \varepsilon^T,\ \Gamma^T,\ \nu_0^T,\ l^T\big)^T$ и вектор случайных возмущений $q(t) = \big(\delta f_z(t)^T,\ \delta\nu_z(t)^T\big)^T$, систему (11) можно записать в стандартном виде:

$$\dot{X}(t) = A(t)X(t) + B(t)q(t); \tag{12}$$

выражения для матриц $A(t)$ и $B(t)$ здесь не приводятся ввиду их громоздкости.

Для перехода от полученной системы к эквивалентной ей дискретной необходимо вычислить переходную матрицу системы. При этом возникают сложности, связанные с тем, что матрица $A_2(t)$ содержит вторые производные $\ddot{\phi}(t)$ угла поворота

[3] Голован А. А., Парусников Н. А. Математические основы навигационных систем. Часть I. Математические модели инерциальной навигации. Изд-е 2-е. М.: Изд-во МГУ, 2010.

БИНС, которые, во-первых, непосредственно не известны, и, во-вторых, могут принимать в начале и в конце поворота большие значения. Однако с учетом специфики данной задачи интегралы, входящие в состав переходной матрицы и содержащие неизвестную матрицу $A_2(t)$, поддаются явному вычислению. Соответствующие выкладки достаточно громоздки и отнесены в Приложение 1.

Соотношения между параметрами системы, порождаемые начальной выставкой

Выставка БИНС, осуществляемая в начале каждой операции, порождает связи между параметрами системы, которые необходимо учитывать для правильного задания начальной ковариационной матрицы. Опишем эти связи.

Под выставкой понимается определение взаимной ориентации приборного трехгранника Oz и идеального географического трехгранника Ox в начальный момент времени t_0. Эта взаимная ориентация определяется матрицей $D(t_0)$; а именно, для произвольного вектора l

$$l_x = D(t_0)\, l_z. \tag{13}$$

(нижним индексом будем обозначать систему координат, в проекциях на оси которой записаны координаты вектора). Однако фактически бортовой вычислитель оперирует не с матрицей D, а с некоторой расчетной матрицей D'. В бортовых алгоритмах начальное значение $D'(t_0)$ расчетной матрицы D' часто определяют из первых двух скалярных компонент следующего уравнения, соответствующего уравнению (13):

$$f_x \cong D'(t_0) f'(t_0), \tag{14}$$

где при неподвижном основании $f_x = (0,\ 0,\ g)^T$ — известный вектор удельной силы в проекциях на оси идеального географического трехгранника Ox. Знак «$\cong$» обозначает, что равенство имеет место лишь для первых двух скалярных уравнений (14).

В соответствии с приведенной выше диаграммой трехгранников имеем для произвольного вектора l:

$$l_z = {D'}^T(t_0)\,(E + \hat{\alpha}_x(t_0))\, l_x,$$

и поэтому в соответствии с моделью показаний блока акселерометров

$$f'(t_0) = (E + C)\, {D'}^T(t_0)\,(E + \hat{\alpha}_x(t_0))\,(0,\ 0,\ g)^T + \varepsilon + \delta f(t_0). \tag{15}$$

Из соотношений выставки (14) и равенства (15) получим, что с точностью до членов второго порядка малости

$$0 \cong \left(P^T C P + \hat{\alpha}_x(t_0)\right)(0,\ 0,\ g)^T + P^T(\varepsilon + \delta f(t_0)), \tag{16}$$

где P — известная матрица начальной расчетной ориентации БИНС, приблизительно равная $D'^T(t_0)$.

Поскольку для каждой операции матрица P известна, то, записав первые две скалярные проекции равенства (16), можно получить уравнения, выражающие компоненты $\alpha_1(t_0)$, $\alpha_2(t_0)$ (а следовательно, и $\beta_1(t_0)$, $\beta_2(t_0)$) через инструментальные ошибки и $\delta f(t_0)$. Приведем, например, эти уравнения для случая $P = E$:

$$\begin{aligned} \beta_1(t_0) &= -\frac{\varepsilon_2}{g} - \frac{\delta f_2(t_0)}{g} + \frac{\Delta x_2(t_0)}{a}, \\ \beta_2(t_0) &= \frac{\varepsilon_1}{g} + \frac{\delta f_1(t_0)}{g} - \frac{\Delta x_1(t_0)}{a}. \end{aligned}$$

«Телескопическая» система

Для того, чтобы свести рассматриваемую задачу к стандартным задачам оценивания и учесть всю имеющуюся информацию, нужно объединить все 14 операций в одной динамической системе. Однако при этом возникают сложности, связанные с необходимостью описать одной системой процесс калибровки, включающий в себя многократные перезапуски и выставки БИНС. Для преодоления этих трудностей построим так называемую «телескопическую» систему.

Пусть k-я операция калибровки разворачивается на промежутке $[T^{k-1}, T^k]$, $k = 1, 2, \ldots, 14$. Полный процесс калибровки, таким образом, осуществляется на отрезке $[T^0, T^{14}]$. Представим введенный выше фазовый вектор $X(t)$ в виде $X^k(t) = \left(y^k(t)^T, p^T\right)^T$, где $y^k(t) = \left(\Delta x^k(t)^T,\ \delta V^k(t)^T,\ \beta^k(t)^T\right)^T$ — подвектор переменных величин, а $p = \left(c^T,\ \varepsilon^T,\ \Gamma^T,\ \nu_0^T,\ l^T\right)^T$ — подвектор постоянных параметров, подлежащих оцениванию. Верхний индекс «k» указывает на номер операции. С учетом этих обозначений динамическую систему (12), соответствующую k-й операции, можно представить в виде

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} y^k(t) \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_1^k(t) & M_2^k(t) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y^k(t) \\ p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} N^k(t) \\ 0 \end{pmatrix} q^k(t); \tag{17}$$

здесь матрицы $M_1^k(t)$, $M_2^k(t)$ и $N^k(t)$ очевидным образом строятся по известным выражениям для $A(t)$ и $B(t)$. Поскольку k-я операция калибровки разворачивается на промежутке $[T^{k-1}, T^k]$, то вне этого отрезка будем полагать матрицы $M_1^k(t)$, $M_2^k(t)$ и $N^k(t)$ равными нулю.

Построим «телескопическую» систему. Фазовым вектором этой системы положим вектор $X^f(t) = \left(y^1(t)^T,\ y^2(t)^T, \ldots, y^{14}(t)^T,\ p^T\right)^T$, вектором случайных возмущений положим $q^f(t) = \left(q^1(t)^T,\ q^2(t)^T, \ldots, q^{14}(t)^T\right)^T$, а динамическую систему построим следующим образом: производная каждой из компонент $y^k(t)$ описывается уравнениями (17), а $\dot{p} = 0$. Построенную таким образом систему, очевидно, можно записать в блочном виде:

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} y^1(t) \\ y^2(t) \\ \vdots \\ y^{14}(t) \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_1^1(t) & 0 & \cdots & 0 & M_2^1(t) \\ 0 & M_1^2(t) & \cdots & 0 & M_2^2(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & M_1^{14}(t) & M_2^{14}(t) \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y^1(t) \\ y^2(t) \\ \vdots \\ y^{14}(t) \\ p \end{pmatrix} +$$

$$+\begin{pmatrix} N^1(t) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & N^2(t) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & N^{14}(t) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} q^1(t) \\ q^2(t) \\ \vdots \\ q^{14}(t) \end{pmatrix}.$$

Переходная матрица и начальная ковариационная матрица «телескопической» системы здесь не приводятся ввиду их громоздкости.

Построенная «телескопическая» система описывает в стандартном для теории оценивания виде весь процесс калибровки БИНС. Применение фильтра Калмана к этой системе позволяет наиболее полным образом учесть всю имеющуюся информацию.

Отметим, что $y^k(t) \in \mathbb{R}^7$, $p \in \mathbb{R}^{27}$. Таким образом, построенная «телескопическая» система имеет размерность, равную $7 \cdot 14 + 27 = 125$. Количество шагов в фильтре Калмана составляет 42.

Результаты вычислений

Вычисления показывают, что разработанный алгоритм калибровки, основанный на использовании фильтра Калмана в «телескопической» системе, позволяет оценить все параметры блоков со значительным увеличением точности по сравнению с априорной ошибкой знания параметров. Так, например, для углов перекосов осей чувствительности датчиков угловой скорости ошибка оценивания составляет порядка нескольких угловых секунд, для смещения нуля акселерометров — порядка $10^{-6}g \ldots 10^{-5}g$ и т. п. При этом точность оценивания параметров повышается с увеличением промежутка между скоростными измерениями.

Оценки, используемые в методике МИЭА, также позволяют со значительным увеличением точности оценивать все параметры блока, за исключением масштабных коэффициентов акселерометров, смещений нуля датчиков угловой скорости и смещений чувствительных масс акселерометров[4]. Однако с ростом интервала времени между скоростными измерениями точность оценивания параметров в алгоритме МИЭА падает и, начиная с определенного момента, становится недостаточно высокой. Таким образом, алгоритм МИЭА имеет ограниченную область применимости. В качестве достоинства алгоритма, предложенного в МИЭА, следует отметить простоту используемых в нем расчетных соотношений и, соответственно, простоту его программной реализации.

Сравнение двух алгоритмов показывает, что теоретическая точность оценивания параметров при помощи алгоритма, основанного на использовании фильтра Калмана, в несколько раз (а при больших промежутках между скоростными измерениями — в несколько десятков или сотен раз) выше, чем при помощи алгоритма, предложенного в МИЭА.

В **заключении** приведены основные результаты работы.

1. Разработан итерационный алгоритм калибровки блока акселерометров БИНС, основанный на использовании гарантирующего подхода. Проведено детальное исследование второй итерации, позволяющей заметно повысить точность оценивания параметров.

2. Предложена формализация, позволяющая провести строгое математическое описание методики стендовой калибровки БИНС, разработанной в МИЭА. Построена динамическая система «телескопической» структуры, позволяющая свести рассматриваемую методику, содержащую многократные перезапуски и выставки системы, к стандартной постановке задач оценивания и применить для ее решения

[4]Отметим, что фильтр Калмана дает хорошие оценки и этих параметров.

фильтр Калмана. Показано, что использование фильтра Калмана приводит к более гибкой схеме калибровки.

В **приложениях** приведены некоторые вспомогательные математические выкладки. Также в приложениях выведены соотношения, порождаемые начальной выставкой БИНС, и уравнения ошибок БИНС. Приведен список основных обозначений.

Основные публикации по теме диссертации.

1. Болотин Ю. В., Деревянкин А. В., Матасов А. И. Итерационная схема калибровки блока акселерометров при помощи гарантирующего подхода. *Известия РАН. Механика твердого тела*, 2008, т. 3, с. 48—61.

2. Деревянкин А. В. Об одном подходе к калибровке блока акселерометров (тезисы доклада). *Гироскопия и навигация*, 2007, № 2, с. 87.

3. Деревянкин А. В., Матасов А. И. К теории калибровки блока акселерометров (тезисы доклада). *XV Санкт-Петербургская международная конференция по интегрированным навигационным системам.* СПб: ЦНИИ «Электроприбор», 2008, с. 71—72.

4. Деревянкин А. В. Алгоритмы калибровки бесплатформенных инерциальных навигационных систем (тезисы доклада). *Гироскопия и навигация*, 2008, № 2, с. 79.

5. Деревянкин А. В. Гарантирующий подход для калибровки блока акселерометров (тезисы доклада). *Современные технологии в задачах управления, автоматики и обработки информации. Труды XVII международного научно-технического семинара (Алушта).* СПб.: ГУАП, 2008, с. 196.

6. Деревянкин А. В., Матасов А. И. Пространственные задачи гарантирующего оценивания. *Современные проблемы математики и механики. Прикладные исследования*, 2009. т. 1, с. 165—179.

7. Деревянкин А. В., Матасов А. И. Методика калибровки блока акселерометров при грубой информации о его угловом положении. Изд-е 2-е. М.: Механико-математический факультет МГУ, 2010.

8. Derevyankin A. V., Matasov A. I. The Theory of Spatial Guaranteed Estimation and Calibration Problem. *Proceedings of the 3rd IEEE Multiconference on Systems and Control.* The IEEE Control Systems Society, Saint-Petersburg, 2009.