Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова

Механико-математический факультет

На правах рукописи
УДК 519.21

Морозов Иван Сергеевич

СТОХАСТИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ МАКСИМИЗАЦИИ РОБАСТНОЙ ПОЛЕЗНОСТИ

01.01.05 — теория вероятностей и математическая статистика

Автореферат

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико–математических наук

Москва–2011

Работа выполнена на кафедре теории вероятностей механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова.

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук
Гущин Александр Александрович.

Официальные оппоненты:
доктор физико-математических наук,
профессор Богачев Владимир Игоревич;
доктор физико-математических наук,
доцент Рохлин Дмитрий Борисович.

Ведущая организация:
Центральный экономико-математический институт РАН
(ЦЭМИ РАН)

Защита диссертации состоится 28 октября 2011 года в 16 часов 40 минут на заседании диссертационного совета Д 501.001.85 при Московском государственном университете имени М. В. Ломоносова по адресу: Российская Федерация, 119991, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д. 1, МГУ, Механико-математический факультет, аудитория 16-24.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова (Главное здание, 14 этаж).

Автореферат разослан 27 сентября 2011 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета
Д 501.001.85 при МГУ
доктор физико-математических наук,
профессор В. Н. Сорокин.

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Фундаментальной проблемой финансовой математики является описание оптимального способа инвестирования при заданных предпочтениях инвестора и бюджетных ограничениях. Концепция максимизации ожидаемой полезности восходит к 1950-м годам, в частности, работе Дж. Тобина[1], в которой были представлены теоретико-вероятностные обоснования портфельной теории Марковица, основанной на анализе ожидаемых средних значений и дисперсий случайных величин. Одной из предпосылок к сравнению именно средних ожидаемых доходов стали монографии Дж. фон Неймана, О. Моргенштерна[2] и Л. Сэвиджа[3], где поставленный набор аксиом привел к представлению полезности $\mathscr{U}(\xi)$ того или иного исхода ξ в виде математического ожидания $\mathsf{E}_{\mathsf{P}}U(\xi)$ по некоторой вероятностной мере P от некоторой функции полезности U: $\mathscr{U}(\xi) = \mathsf{E}_{\mathsf{P}}U(\xi)$.

Если предпочтения инвестора описываются возрастающей вогнутой функцией полезности $U\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ и случайность на рынке реализована через вероятностное пространство $(\Omega, \mathscr{F}, \mathsf{P})$, то стандартная задача максимизации ожидаемой полезности финального благосостояния может быть поставлена в виде

$$\sup_{\xi \in \mathscr{K}(x)} \mathsf{E}_{\mathsf{P}}U(\xi), \tag{1}$$

где множество $\mathscr{K}(x)$ состоит из всех терминальных капиталов ξ, отвечающих допустимым (с точки зрения экономического агента) стратегиям с начальным капиталом x.

Наряду с задачей максимизации полезности терминального капитала в литературе рассматриваются и более общие постановки. Так, если в терминальный момент времени агент получает случайную прибыль B (например, от реализации опциона), то мы получим задачу максимизации полезности со случайным вкладом:

$$\sup_{\xi \in \mathscr{K}(x)} \mathsf{E}_{\mathsf{P}}U(\xi + B).$$

С этой задачей связано нахождение беспристрастной цены (indifference pricing) платежного обязательства (см., например, работу[4]).

---

[1] *Tobin J.* Liquidity preference as behavior towards risk // Rev. Econ. Stud., 1958, Vol. 25, p. 68–85.

[2] *Von Neumann J., Morgenstern O.* Theory of games and economic behavior. Princeton University Press, 1944.

[3] *Savage L.* The foundations of statistics. N. Y.: Wiley, 1954.

[4] *Biagini S., Frittelli M., Grasselli M.* Indifference price with general semimartingales // Math. Finance, 2011, Vol. 21, №3, p. 423–446.

Еще одна проблема максимизации полезности возникает в задачах с "потреблением", когда экономический агент извлекает прибыль (и потребляет) на протяжении всего временного горизонта, а не только в терминальный момент времени. Функции полезности $\bar{U}(t,\cdot)$ могут варьироваться со временем. План потребления C в момент времени $t \in [0,T]$ определяется случайной нормой потребления $c(t) \geqslant 0$, а общий объем потребления на промежутке $[t, t+dt]$ увеличивается на $c(t)dt$. Если за $X^{C,P}$ обозначить процесс капитала, отвечающий инвестиционной стратегии P и плану потребления C, то его изменение $dX^{C,P}$ будет удовлетворять соотношению $dX^{C,P} = -c(t)dt + dV^P(t)$, где $dV^P(t)$ есть изменение стоимости инвестиционного портфеля вследствие изменения цен торгуемых активов. Таким образом агент заинтересован в получении наибольшей интегральной полезности

$$\sup_{(C,P)\in\mathscr{A}(x)} \mathsf{E}_{\mathsf{P}} \int_0^T \bar{U}(t, c(t))dt,$$

где максимизация происходит по множеству $\mathscr{A}(x)$ допустимых пар инвестиционных стратегий и планов потребления с начальным капиталом x. Одним из естественных ограничений на допустимые стратегии является неотрицательность капитала в заключительный момент времени: $X_T^{C,P} \geqslant 0$.

Диссертация посвящена другому обобщению задачи (1) — максимизации функционала *робастной* полезности. Оно ведет начало от работы[5], где был рассмотрен ряд более мягких аксиом, что привело к измерению полезности $\mathscr{U}(\xi)$ того или иного исхода ξ в виде робастного функционала: $\mathscr{U}(\xi) = \inf_{\mathsf{Q}\in\mathscr{Q}} \mathsf{E}_{\mathsf{Q}} U(\xi)$, где U — по-прежнему некоторая функция полезности, а нижняя грань $\inf_{\mathsf{Q}\in\mathscr{Q}}$ математических ожиданий $\mathsf{E}_{\mathsf{Q}} U(\xi)$ берется по некоторому семейству $\mathscr{Q}$ "субъективных" вероятностных мер. Такой подход может служить описанию предпочтений не склонного к риску инвестора, который в условиях неопределенности выбора вероятностной модели для будущего состояния рынка рассматривает наихудший сценарий.

В соответствии с таким способом измерения благосостояния, задача максимизации робастной полезности выглядит как

$$\sup_{\xi\in\mathscr{X}(x)} \inf_{\mathsf{Q}\in\mathscr{Q}} \mathsf{E}_{\mathsf{Q}} U(\xi). \tag{2}$$

Отметим также дальнейшее ослабление аксиоматического подхода в работе[6], приводящее к появлению функционала робастной полезности со

[5] *Gilboa I., Schmeidler D.* Maxmin expected utility with nonunique prior // J. Math. Econom., 1989, Vol. 18, №2, p. 141–153.

[6] *Maccheroni F., Marinacci M.* Ambiguity aversion, robustness, and the variational representation of preferences // Econometrica, 2006, Vol. 74, №6, p. 1447–1498.

“штрафной” функцией:

$$\sup_{\xi\in\mathscr{K}(x)}\inf_{\mathsf{Q}\in\mathscr{Q}}[\mathsf{E}_{\mathsf{Q}}U(\xi)+\gamma(\mathsf{Q})].$$

Выбор методов исследования задачи максимизации полезности зависит от структуры финансового рынка. В классических работах Р. Мертона[7,8] и П. Самуэльсона[9] для марковских моделей финансового рынка задача максимизации полезности решалась с помощью методов динамического программирования. Применяемые методы позволили конструктивно описать решение, однако явный вид решения был возможен только в конкретных частных случаях. Альтернативой методам динамического программирования служат двойственные методы выпуклого анализа, не требующие практически никаких предположений о структуре модели. Суть этих методов заключается в решении сначала вспомогательной (двойственной) задачи, что позволяет охарактеризовать решение исходной задачи, а также найти ее цену. К недостаткам двойственных методов можно отнести то обстоятельство, что полученные с их помощью результаты о решении исходной задачи носят характер утверждений типа существования и единственности и, вообще говоря, не позволяют найти конкретное решение (которое, впрочем, не всегда можно получить и с помощью методов динамического программирования). Отметим, что в робастном случае (2) исходную задачу минимаксного типа на поиск седловой точки двойственный подход позволяет свести к (вообще говоря, более простой) задаче на минимизацию. Для марковских моделей рынка уже двойственная задача в некоторых работах решалась методами динамического программирования, что в дальнейшем помогло решить и исходную задачу.

В задачах стохастического управления впервые двойственные методы были применены Ж.-М. Бисмутом[10], а в задаче максимизации полезности — С. Плиска[11]. Во многом на развитие двойственных методов повлияла работа Д. Крамкова и В. Шахермайера[12], где приводятся ссылки на предшествующую литературу.

[7] *Merton R. C.* Lifetime portfolio selection under uncertainty: The continuous-time case // Rev. Econom. and Statist., 1969, Vol. 51, №3, p. 247–257.

[8] *Merton R. C.* Optimum consumption and portfolio rules in a continuous-time model // J. Econom. Theory, 1971, Vol. 3, №4, p. 373–413.

[9] *Samuelson P. A.* Lifetime portfolio selection by dynamic stochastic programming // Rev. Econom. and Statist., 1969, Vol. 51, №3, p. 239–246.

[10] *Bismut J.-M.* Conjugate convex functions in optimal stochastic control // J. Math. Anal. Appl., 1973, Vol. 44, №2, p. 384–404.

[11] *Pliska S. R.* A stochastic calculus model of continuous trading: optimal portfolios // Math. Oper. Res., 1986, Vol. 11, №2, p. 370–382.

[12] *Kramkov D., Schachermayer W.* The asymptotic elasticity of utility functions and optimal investment in incomplete markets // Ann. Appl. Prob., 1999, Vol. 9, №3, p. 904–950.

При изучении задач (1) и (2) в качестве моделей финансового рынка зачастую рассматривают динамические модели, в которых дисконтированные цены базовых рисковых активов описываются случайным процессом S (при самых общих предположениях являющегося семимартингалом), инвестиционные стратегии — предсказуемыми S-интегрируемыми процессами H, а доходы инвестора X_t к моменту времени t при заданной стратегии H представляются векторными стохастическими интегралами $X_t = H \cdot S_t = \int_0^t H_u dS_u$. В качестве $\mathscr{K}(x)$ тогда берут множество $\mathscr{K}(x) := \{x + H \cdot S_T \colon H \in \mathscr{H}(x)\}$, где T — заключительный момент времени операций на финансовом рынке, а $\mathscr{H}(x)$ — множество допустимых стратегий, реализуемых при начальном капитале x.

С экономической точки зрения кредитная линия, открываемая инвестору, имеет конечные пределы, что привело к появлению классического ограничения о допустимости только таких инвестиционных стратегий H, при которых доходы $X_t = H \cdot S_t$ оказывались бы равномерно ограниченными снизу: $X_t \geqslant \mathrm{const}$ для всех моментов времени t. В частности, это ограничение позволило исключить мартингальные (удваивающие) стратегии, приводящие к появлению арбитража.

Существующая литература по максимизации полезности в основном разделяется на два общих случая: 1) функция полезности U конечна на полупрямой $(a, +\infty)$, $a \in \mathbb{R}$, и равна $-\infty$ на $(-\infty, a)$; 2) функция полезности U конечна всюду на $\mathbb{R}$. В первом случае в стандартной (1) и робастной (2) постановках задачи максимизации полезности ограничение $X_t \geqslant \mathrm{const}$, $t \in [0, T]$, никак не ограничивает выбор инвестиционных стратегий. Действительно, из всех капиталов $k = x + X_T \in \mathscr{K}(x)$ итоговая полезность не обращается в $-\infty$ только в тех случаях, когда $x + X_T \geqslant a$ (соответственно P-п.н. или Q -п.н. при всех $\mathsf{Q} \in \mathscr{Q}$), а при условии отсутствия арбитража (NA) условие $X_T \geqslant c$ эквивалентно условию $X_t \geqslant c$, $t \in [0, T]$.

Благодаря этому обстоятельству в работе[12] (где был внесен наиболее существенный вклад в исследование задачи максимизации стандартной полезности с функцией полезности, конечной на полупрямой) авторы использовали следующую схему рассуждений. Сначала все основные результаты были сформулированы и доказаны для абстрактной модели рынка, в которой заданным предполагалось только множество $\mathscr{K}(x)$ терминальных капиталов, после чего полученные результаты переносились на случай динамической семимартингальной модели.

В случае конечной на $\mathbb{R}$ функции полезности допустимость только ограниченных снизу процессов капиталов является существенным предположением. Более того, оно является не вполне естественным, так как в классе стратегий с ограниченными снизу капиталами не приходится рассчитывать на существование оптимальной стратегии. Так, в работе[13] фактически решалась задача (1) со множеством $\mathscr{K}(x)$, которое получалось расширением множества $\{x + H \cdot S_T \colon H \cdot S_t \geqslant \mathrm{const}$ для всех $t \in [0,T]\}$ с помощью некоторой процедуры замыкания. При определенных условиях доказывалось существование оптимального решения $\hat{k}$ задачи (1), при этом случайная величина $\hat{k}$, вообще говоря, уже не ограничена снизу, но представима в виде $\hat{k} = x + H \cdot S_T$, где процесс $\{H \cdot S_t\}_{t\in[0,T]}$, естественно, также может не быть ограниченным снизу. Отметим, что упомянутое расширение множества $\{x + H \cdot S_T \colon H \cdot S_t \geqslant \mathrm{const}$ для всех $t \in [0,T]\}$ до $\mathscr{K}(x)$ не изменило ожидаемую полезность.

В работе[13] было также отмечено, что множество стратегий с ограниченными снизу капиталами и вовсе может оказаться тривиальным. Например, такое возможно в семимартингальной модели рынка, если процесс цены S не является локально ограниченным. В то же время задача максимизации полезности может быть поставлена и иметь нетривиальное решение в более широком классе стратегий. А именно, такая задача максимизации стандартной полезности была рассмотрена С. Бьяджини и М. Фрителли[14,15,16,17], где в качестве допустимых они рассматривали такие стратегии H, что $H \cdot S_t \geqslant -cW$ для всех моментов времени $t \in [0,T]$ и некоторого $c > 0$, где W есть положительная случайная величина, удовлетворяющая некоторым условиям интегрируемости. Особенно стоит выделить работу[17], где было отмечено, что подобное расширение класса допустимых стратегий может привести к увеличению ожидаемой полезности.

В диссертации мы ставим целью расширить применимость двойственных методов в задаче максимизации робастной полезности. Исследуемая нами постановка носит абстрактный характер, т.е. мы имеем дело с задачей (2). Наши ограничения на множество $\mathscr{K}(x)$ оказываются более слабыми, чем в предшествующих работах. В частности, в стандартной задаче (1) от множества $\mathscr{K}(x)$ требуется только представимость в виде $\mathscr{K}(x) = x + \mathscr{K}$, где $\mathscr{K}$ — выпуклый конус.

Другим объектом исследования является вопрос о дифференцируемости целевой функции $u(\cdot)$ в задаче максимизации робастной полезности (2).

---

[13] *Schachermayer W.* Optimal investment in incomplete markets when wealth may become negative // Ann. Appl. Probab., 2001, Vol. 11, №3, p. 694–734.

[14] *Biagini S.* An Orlicz spaces duality for utility maximization in incomplete markets // Seminar on Stochastic Analysis, Random Fields and Applications V, Progress Probab., Birkhäuser, Basel, Vol. 59, Part 2, p. 445–455.

[15] *Biagini S., Frittelli M.* Utility maximization in incomplete markets for unbounded processes // Finance Stoch., 2005, Vol. 9, №4, p. 493–517.

[16] *Biagini S., Frittelli M.* The supermartingale property of the optimal portfolio process for general semimartingales // Finance Stoch., 2007, Vol. 11, №2, p. 253–266.

[17] *Biagini S., Frittelli M.* A unified framework for utility maximization problems: an Orlicz space approach // Ann. Appl. Probab., 2008, Vol. 18, №3, p. 929–966.

Выбор оптимального способа инвестирования позволяет при начальном капитале x получить итоговую полезность $u(x)$: $x \rightsquigarrow u(x)$. В этом смысле целевая функция $u(\cdot)$ позволяет оценивать возможности финансового рынка, и поэтому сама может рассматриваться как функция полезности. А для функций полезности условия гладкости во многих задачах являются необходимыми, что ставит соответствующие вопросы и в задачах максимизации полезности.

Цель исследования. Целью исследования являются: постановка двойственной задачи к задаче максимизации робастной полезности при минимальных предположениях на множество капиталов; установление минимаксных соотношений между основной и двойственной задачами; изучение вопроса дифференцируемости целевой функции в задаче максимизации робастной полезности.

Научная новизна. Основные результаты диссертации являются новыми и состоят в следующем:

1) в задаче максимизации робастной полезности при минимальных предположениях на множество капиталов доказана минимаксная теорема и установлена двойственная характеризация целевой функции;

2) доказано, что в задаче максимизации робастной полезности целевая функция может быть не всюду дифференцируемой, если только функция полезности не является степенной, экспоненциальной или логарифмической;

3) установлены свойства сопряженных пространств для некоторого класса пространств Орлича по семейству мер.

Методы исследования. В работе применяются методы теории вероятностей и функционального анализа.

Теоретическая и практическая ценность. Работа носит теоретический характер. Ее результаты могут быть полезны в теории вероятностей, функциональном анализе, математической статистике, теории случайных процессов и различных областях ее применения, в частности, в задачах финансовой математики.

Апробация работы. Результаты, относящиеся к диссертации, излагались на следующих семинарах

1. Большой семинар кафедры теории вероятностей (МГУ, механико-математический факультет) под руководством члена-корреспондента РАН профессора А. Н. Ширяева, Москва, 2010;

2. Семинар “Стохастический анализ: теория и приложения”, проводимый в Математическом институте им. В. А. Стеклова под руководством члена-корреспондента РАН профессора А. Н. Ширяева и доктора физико-математических наук А. А. Гущина, Москва, 2009

и конференциях

3. Международная конференция “Современная стохастика: теория и применения II”, Киев, Украина, 2010;

4. Международная научная конференция студентов аспирантов и молодых ученых “Ломоносов-2009”, Москва, 2009;

5. Международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых “Ломоносов-2010”, Москва, 2010;

6. Российско-японский симпозиум “Стохастический анализ сложных статистических моделей”, Москва, 2007.

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в пяти работах [1–5] (полный список приведен в конце автореферата). Из них три — в журналах, внесенных в список ВАК. Работ, опубликованных в соавторстве, нет.

Структура и объем работы. Диссертация изложена на 93 страницах и состоит из списка обозначений, введения, трех глав и списка литературы, включающего 48 наименований.

Содержание работы

Глава 1 посвящена исследованию некоторых вспомогательных вопросов, которые также имеют и самостоятельный интерес.

В разделе 1.1 определяются пространства Орлича, построенные по семейству мер. Дадим некоторые определения.

Функцией Юнга называется ненулевая неотрицательная четная выпуклая функция $\Phi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ с $\Phi(0) = 0$.

Пусть задано измеримое пространство $(\Omega, \mathscr{F})$ и семейство $\mathscr{Q}$ вероятностных мер. Пространство Орлича $L^\Phi(\mathscr{Q})$, построенное по семейству мер $\mathscr{Q}$ и ассоциированное с функцией Юнга Φ, определяется как

$$L^\Phi(\mathscr{Q}) := \{\xi \in L^0(\mathscr{Q})\colon \sup_{\mathsf{Q}\in\mathscr{Q}} \mathsf{E}_\mathsf{Q}\Phi(\varepsilon\xi) < +\infty \text{ для некоторого } \varepsilon > 0\},$$

где пространство $L^0(\mathscr{Q})$ состоит из классов эквивалентности случайных величин, совпадающих Q-п.н. при всех $\mathsf{Q} \in \mathscr{Q}$. Это пространство является банаховым (см. монографию Р. Розенберга[18])относительно нормы Люксембурга

$$N_\Phi(\xi) := \sup_{\mathsf{Q}\in\mathscr{Q}} N_\Phi^\mathsf{Q}(\xi) = \inf\left\{K > 0\colon \sup_{\mathsf{Q}\in\mathscr{Q}} \mathsf{E}_\mathsf{Q}\Phi\left(\frac{\xi}{K}\right) \leqslant 1\right\}.$$

В разделах 1.2–1.5 свойства пространств Орлича по семейству мер $\mathscr{Q}$ и сопряженных к ним изучаются при следующих предположениях на множество $\mathscr{Q}$:

- $\mathscr{Q}$ — выпуклое подмножество вероятностных мер на $(\Omega, \mathscr{F})$;
- $\mathsf{Q} \ll \mathsf{P}$ для всех $\mathsf{Q} \in \mathscr{Q}$ и некоторой вероятностной меры P;
- найдется такая $\mathsf{Q}_0 \in \mathscr{Q}$, что $\mathsf{Q}_0 \sim \mathsf{P}$;
- семейство $\{\eta\frac{d\mathsf{Q}}{d\mathsf{P}}\}_{\mathsf{Q}\in\mathscr{Q}}$ P-равномерно интегрируемо и $L^1(\mathsf{P})$-замкнуто для любой случайной величины η, такой что $\sup_{\mathsf{Q}\in\mathscr{Q}} \mathsf{E}_\mathsf{Q}|\eta| < +\infty$.

В разделе 1.2 показано, что последнее свойство эквивалентно компактности $\mathscr{Q}$ в $*$-слабой топологии $\sigma(L^1(\mathscr{Q})^*, L^1(\mathscr{Q}))$. В этом же разделе доказаны некоторые свойства пространств Орлича по семейству мер, характерные для стандартных пространств Орлича.

Условие компактности на множество $\mathscr{Q}$ не является интуитивно понятным, поэтому в разделе 1.3 дается описание широкого класса множеств, обладающих этим свойством.

Как и в случае любых банаховых решеток элементы μ сопряженного пространства $L^\Phi(\mathscr{Q})^*$ допускают разложение на регулярные $\mu^r \in L^\Phi(\mathscr{Q})^r$ и сингулярные $\mu^s \in L^\Phi(\mathscr{Q})^s$ составляющие. Сингулярные функционалы $z \in L^\Phi(\mathscr{Q})^s$ могут быть охарактеризованы как функционалы, принимающие нулевые значения на $L^\infty(\mathsf{P})$. Регулярным функционалам $m \in L^\Phi(\mathscr{Q})^r$ можно поставить в соответствие меру dm, такую что для всех $\xi \in L^\Phi(\mathscr{Q})$

[18] *Rosenberg R.* Orlicz spaces based on families of measures // Studia Math., 1970, Vol. 35, p. 15–49.

будет иметь место соотношение $m(\xi) = \int_\Omega \xi dm$. Для сингулярного функционала $z \in L^\Phi(\mathscr{Q})^s$ с любой точностью $\varepsilon > 0$ можно подобрать такое множества $G \in \mathscr{F}$, что $\mathsf{P}(G) < \varepsilon$ и $z(\xi) = 0$ при $\xi \mathbb{1}_G = 0$.

Следуя подходу, предложенному А. А. Гущиным[19], в разделах 1.4 и 1.5 вводится понятие f-дивергенции функционалов на пространствах Орлича, построенных по семейству мер, и исследуются ее свойства. Полученные результаты существенно используются для доказательства результатов главы 2.

Перейдем к задаче максимизации робастной полезности, которая исследуется в главе 2.

Пусть U — конечная функция полезности экономического агента, действующего на финансовом рынке, т.е. $U\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ вогнута и возрастает. Свяжем с ней функцию Юнга $\Phi(x) := -U(-|x|) + U(0)$.

Пусть также на измеримом пространстве $(\Omega, \mathscr{F})$ задано множество случайных величин $\mathscr{K}$, которое мы будем интерпретировать как множество всех реализуемых на финансовом рынке доходов. Для начального капитала $x \in \mathbb{R}$ в качестве допустимых предлагается рассматривать множество

$$\mathscr{K}_x := \{k \in \mathscr{K} : \inf_{\mathsf{Q} \in \mathscr{Q}} \mathsf{E}_\mathsf{Q} U(x - k^-) > -\infty\}.$$

Ожидаемая робастная полезность при начальном капитале x тогда определяется соотношением

$$u(x) := \sup_{k \in \mathscr{K}_x} \inf_{\mathsf{Q} \in \mathscr{Q}} \mathsf{E}_\mathsf{Q} U(x + k).$$

Индивидуальные целевые функции по мерам $\mathsf{Q} \in \mathscr{Q}$ имеют вид $u_\mathsf{Q}(x) := \sup_{k \in \mathscr{K}_x} \mathsf{E}_\mathsf{Q} U(x + k)$, $\mathsf{Q} \in \mathscr{Q}$.

В теореме 2.1 доказываются основные свойства целевой функции u:

1(i) Функция $u(x)$, $x \in \mathbb{R}$, принимает значения в $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, является возрастающей и вогнутой, а также $u(x) \geqslant U(x)$ для всех $x \in \mathbb{R}$.

1(ii) Либо $u(x) = +\infty$ для всех $x \in \mathbb{R}$, либо $u(x) \in \mathbb{R}$ для всех $x \in \mathbb{R}$.

1(iii) Для любого начального капитала $x \in \mathbb{R}$ выполнены минимаксные соотношения:

$$u(x) = \min_{\mathsf{Q} \in \mathscr{Q}} u_\mathsf{Q}(x).$$

[19] *Гущин А. А.* О расширении понятия f-дивергенции // Теория вероятн. и ее примен., 2007, т. 52, в. 3, с. 468–489.

Перейдем к описанию двойственной задачи. Зададим множество $\mathscr{C} := (\mathscr{K} - L^0_+(\mathsf{P})) \cap L^\Phi(\mathscr{Q})$, а также множество разделяющих функционалов

$$\mathscr{R} := \{\mu \in L^\Phi(\mathscr{Q})^*\colon \mu(\mathbb{1}_\Omega) = 1 \text{ и } \mu(\xi) \leqslant 0 \text{ для любой } \xi \in \mathscr{C}\},$$

Пусть V — двойственная к U функция, т.е. $V(y) := \sup_{x\in\mathbb{R}}[U(x) - xy]$, $y \in \mathbb{R}$. В случае $\mathscr{R} = \varnothing$ положим $v(0) := V(0)$ и $v(y) := +\infty$ при $y > 0$. Если же $\mathscr{R} \neq \varnothing$, положим двойственную целевую функцию v равной

$$v(y) := \inf_{\substack{\mu\in\mathscr{R},\mathsf{Q}\in\mathscr{Q}\\ \mu^r\ll\mathsf{Q}}} \left[y\|\mu^s\| + \mathsf{E}_\mathsf{Q} V\left(y\frac{d\mu^r}{d\mathsf{Q}}\right)\right], \quad y \geqslant 0, \tag{3}$$

где $\mu = \mu^r + \mu^s$ есть разложение функционала μ на регулярную μ^r и сингулярную μ^s составляющие.

Определим также для всех $\mathsf{Q} \in \mathscr{Q}$ функции $v_\mathsf{Q}(y) := v(y)$ в случае $\mathscr{R} = \varnothing$ и

$$v_\mathsf{Q}(y) := \inf_{\substack{\mu\in\mathscr{R}\\ \mu^r\ll\mathsf{Q}}} \left[y\|\mu^s\| + \mathsf{E}_\mathsf{Q} V\left(y\frac{d\mu^r}{d\mathsf{Q}}\right)\right], \quad y \geqslant 0, \tag{4}$$

в случае $\mathscr{R} \neq \varnothing$.

Основные свойства двойственной функции v перечислены в теореме 2.2:

2(i) Функция $v(y)$, $y \geqslant 0$ принимает значения в $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, является выпуклой и полунепрерывной снизу, а также $v(y) \geqslant V(y)$ для всех $y \geqslant 0$.

2(ii) Нижняя грань в (3) и (4) достигается.

2(iii) Для любого $y \geqslant 0$
$$v(y) = \min_{\mathsf{Q}\in\mathscr{Q}} v_\mathsf{Q}(y).$$

Решение двойственной задачи позволяет найти решение основной задачи, поскольку целевые функции u и v являются двойственными друг другу. Более того, между основной и двойственной задачами выполнены следующие соотношения:

3(i) Если $\operatorname{dom} v = \varnothing$, то $u(x) = +\infty$ для любого $x \in \mathbb{R}$. Если $\operatorname{dom} v \neq \varnothing$, то $u(x) \in \mathbb{R}$ для любого $x \in \mathbb{R}$.

3(ii) Между функциями u и v выполнены двойственные связи:
$$u(x) = \min_{y\geqslant 0}[v(y) + xy], \quad x \in \mathbb{R}, \tag{5}$$
и
$$v(y) = \sup_{x\in\mathbb{R}}[u(x) - xy], \quad y \geqslant 0.$$

3(iii) Для любой $\mathsf{Q} \in \mathscr{Q}$ двойственные связи выполнены между функциями u_{Q} и v_{Q}:

$$u_{\mathsf{Q}}(x) = \min_{y \geqslant 0}[v_{\mathsf{Q}}(y) + xy], \quad x \in \mathbb{R},$$

и

$$v_{\mathsf{Q}}(y) = \sup_{x \in \mathbb{R}}[u_{\mathsf{Q}}(y) - xy], \quad y \geqslant 0.$$

3(iv) Зафиксируем $x \in \mathbb{R}$. Если минимум в (5) достигается на $\hat{y}$, а минимум в (3) при $y = \hat{y}$ — на паре $(\hat{\mu}, \hat{\mathsf{Q}}) \in \mathscr{R} \times \mathscr{Q}$, то

$$u(x) = u_{\hat{\mathsf{Q}}}(x) = \sup_{k \in \mathscr{K}_x} \mathsf{E}_{\hat{\mathsf{Q}}} U(x + k). \tag{6}$$

Обратно, если для некоторой $\hat{\mathsf{Q}} \in \mathscr{Q}$ выполнено (6), то найдутся такие $\hat{y} \geqslant 0$ и $\hat{\mu} \in \mathscr{R}$, что минимум в (5) достигается на $\hat{y}$, а минимум в (3) при $y = \hat{y}$ — на паре $(\hat{\mu}, \hat{\mathsf{Q}})$.

Глава 3 имеет дело со следующей моделью финансового рынка:

- Функция полезности $U \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ возрастает, вогнута, полунепрерывна сверху, не тождественно равна $-\infty$ и не является линейной. Совокупность $\operatorname{int} \operatorname{dom} U$ внутренних точек области конечности U обозначим $(a, +\infty)$, где $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$.

- Пространство элементарных событий Ω дискретно и состоит из четырех исходов: $\Omega := \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$. Сигма-алгебра $\mathscr{F} := 2^\Omega$. Вероятностные меры и случайные величины тогда можно отождествить с четырехмерными векторами.

- Зафиксируем произвольные $r_1, r_2 \in (0,1)$ и зададим процессы (дисконтированных) цен двух рисковых активов $(S^i_t)_{t=0,1}$ для $i = 1, 2$ соотношениями $S^1_0 :\equiv S^2_0 :\equiv 1$,

$$\begin{aligned} S^1_1 &:= (\ 2 - r_1,\ 1 - r_1,\ 1,\ 1\ ), \\ S^2_1 &:= (\ 1,\ 1,\ 2 - r_2,\ 1 - r_2\ ). \end{aligned}$$

  Множество $\mathscr{K}$ допустимых доходов определим стандартным образом как $\mathscr{K} := \{\lambda_1(S^1_1 - S^1_0) + \lambda_2(S^2_1 - S^2_0) \colon \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}\}$.

- Зафиксируем произвольные $q_1, q_2 \in (0,1)$, две вероятностные меры зададим равенствами

$$\begin{aligned} \mathsf{Q}_1 &:= (\ q_1,\ 1 - q_1,\ 0,\ 0\ ), \\ \mathsf{Q}_2 &:= (\ 0,\ 0,\ q_2,\ 1 - q_2\ ) \end{aligned}$$

и положим множество субъективных мер $\mathscr{Q}$ равным выпуклой оболочке Q_1 и Q_2: $\mathscr{Q} := \{\mathsf{Q}^\beta := \beta\mathsf{Q}_1 + (1-\beta)\mathsf{Q}_2 \colon 0 \leqslant \beta \leqslant 1\}$.

Будем говорить, что функция U является степенной, логарифмической или экспоненциальной, если с точностью до константы, сдвига и умножения на положительную константу

$$U(x) = \begin{cases} -\infty, & x < 0, \\ \frac{x^\alpha}{\alpha}, & x \geqslant 0, \end{cases} \quad \alpha < 1, \alpha \neq 0 \quad \text{и} \quad U(x) = \begin{cases} -|x|^\alpha, & x < 0, \\ 0, & x \geqslant 0, \end{cases} \quad \alpha > 1,$$

$$U(x) = -e^{-x}, \quad x \in \mathbb{R}$$

или

$$U(x) = \begin{cases} -\infty, & x < 0, \\ \ln x, & x \geqslant 0 \end{cases}$$

соответственно.

Тогда в рассматриваемой постановке следующие условия эквивалентны:

1. Для любой рассматриваемой модели рынка целевая функция $u(x)$ в случае конечности дифференцируема на $(a, +\infty)$ и при $a > -\infty$ удовлетворяет условию Инада на левом конце: $\lim_{x\downarrow a} u'_-(x) = +\infty$.

2. Функция полезности $U(x)$ имеет степенной, экспоненциальный или логарифмический вид.

А именно, если функция $U(x)$ имеет один из указанных видов, то для любых параметров $r_1, r_2, q_1, q_2 \in (0,1)$ целевая функция $u(x)$ в случае конечности будет дифференцируемой на $(a, +\infty)$ и при $a > -\infty$ удовлетворять условию Инада на левом конце. Если же функция $U(x)$ имеет иной вид, то всегда можно подобрать такие $r_1, r_2, q_1, q_2 \in (0,1)$, что целевая функция $u(x)$ будет либо недифференцируемой по крайней мере в одной точке, либо не будет выполнено условие Инада на левом конце $a > -\infty$.

Работа выполнена под руководством доктора физико-математических наук Александра Александровича Гущина, которому автор выражает искреннюю благодарность за помощь в выборе направления исследования и постоянную поддержку.

Работы автора по теме диссертации

[1] *Морозов И. С.* Расширение класса допустимых стратегий в задаче максимизации робастной полезности с конечной на $\mathbb{R}$ функцией полезности // Обозрение прикл. и промышл. матем., 2010, т. 17, в. 5, с. 617–634.

[2] *Морозов И. С.* Дифференцируемость целевой функции в задаче максимизации робастной полезности // Теория вероятн. и ее примен., 2011, т. 56, в. 2, с. 374–384.

[3] *Морозов И. С.* О характеристическом свойстве степенных, экспоненциальных и логарифмических функций полезности // Обозрение прикл. и промышл. матем., 2011, т. 18, в. 2, с. 309.

[4] *Морозов И. С.* Дифференцируемость целевой функции в задаче максимизации робастной полезности // Тезисы докладов Секции "Математика и механика" XVI Международной научной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых "Ломоносов–2009". М.: Механико-математический факультет МГУ имени М. В. Ломоносова, 2009, с. 47.

[5] *Morozov I. S.* On an extension of the class of admissible trading strategies in the robust utility maximization problem // Abstracts of International Conference "Modern Stochastics: Theory and Applications II", Kyiv, Ukraine, 2010, p. 58.