Московский государственный университет имени
М. В. Ломоносова

Механико-математический факультет

На правах рукописи
УДК 515.164.8+514.172.45

Ероховец Николай Юрьевич

# МАКСИМАЛЬНЫЕ ДЕЙСТВИЯ ТОРОВ НА МОМЕНТ-УГОЛ МНОГООБРАЗИЯХ

Специальность:
01.01.04 – геометрия и топология

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени кандидата
физико-математических наук

Москва – 2011

Работа выполнена на кафедре высшей геометрии и топологии Механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова

**Научный руководитель:**
член-корреспондент РАН,
доктор физико-математических наук,
профессор Виктор Матвеевич Бухштабер.

**Официальные оппоненты:**
доктор физико-математических наук,
профессор Ландо Сергей Константинович
кандидат физико-математических наук,
ассистент Кустарёв Андрей Александрович.

**Ведущая организация:**
Московский педагогический государственный университет.

Защита диссертации состоится 11 ноября 2011г. в $16^{\underline{45}}$ на заседании диссертационного совета Д.501.001.84 при Московском государственном университете имени М. В. Ломоносова по адресу: 119991, Российская Федерация, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, Механико-математический факультет, аудитория 14-08.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Механико-математического факультета МГУ имени М. В. Ломоносова (Главное здание, 14 этаж).

Автореферат разослан 11 октября 2011г.

Ученый секретарь диссертационного
совета Д.501.001.84 при МГУ
доктор физ.-мат. наук, профессор А. О. Иванов

# Общая характеристика работы

## Актуальность темы

Теория действий тора имеет длинную историю развития и образует важную область алгебраической топологии. За последние 15 лет на стыке эквивариантной топологии, алгебраической и симплектической геометрии, комбинаторики, коммутативной и гомологической алгебры возникла новая область исследований — торическая топология, которая быстро привлекла внимание большого числа исследователей и активно развивается в настоящее время. Во второй половине прошлого века в алгебраической геометрии возникло важное направление исследований – торическая геометрия, центральным объектом которой являются торические многообразия. Она является богатым источником явных примеров алгебраических многообразий и имеет яркие приложения в таких областях, как теория особенностей и математическая физика. В работе М. Дэвиса и Т. Янушкевича[1] были введены *квазиторические многообразия* – топологические аналоги торических многообразий из алгебраической геометрии. Для этого им потребовалась конструкция $(m+n)$-мерного многообразия $\mathcal{Z}_P$ с каноническим действием тора $T^m$, таким что простой многогранник $P^n$ с $m$ гипергранями является пространством орбит. Эта конструкция является обобщением известной конструкции Э. Б. Винберга[2]. В. М. Бухштабер и Т. Е. Панов в[3,4] показали, что многообразие $\mathcal{Z}_P$, названное *момент-угол многообразием*, обладает канонической гладкой структурой и на основе его конструкции ввели функтор из категории симплициальных комплексов в категорию пространств с действием тора. Эти работы положили начало торической топологии как нового направления исследований. Диссертация посвящена развитию теории момент-угол многообразий и её приложениям. Тема диссертации актуальна, так как момент-угол многообразия являются центральным объектом торической топологии.

Основным объектом изучения в диссертации является инвариант, характеризующий действие тора на момент-угол многообразии. Квазиторические многообразия получаются как факторпространства многообразия

[1] M. Davis, T. Januszkiewicz, *Convex polytopes, Coxeter orbifolds and torus actions*, Duke Math. J., 1991. V.62, N2, P.417-451.

[2] Э. Б. Винберг, *Дискретные линейные группы, порождённые отражениями*, Известия АН СССР, сер. матем. 35 (1971), 1072–1112.

[3] В. М. Бухштабер, Т. Е. Панов, *Действия тора и комбинаторика многогранников*, Труды МИРАН им. Стеклова, 225, 1999, 96–131.

[4] В. М. Бухштабер, Т. Е. Панов, *Действия торов, комбинаторная топология и гомологическая алгебра*, УМН, 55:5(335) (2000), 3–106

$\mathcal{Z}_P$ по свободному действию $(m-n)$-мерного тора $T^{m-n} \subset T^m$. Размерность $m-n$ является максимальной возможной размерностью тора $T^r \subset T^m$, свободно действующего на $\mathcal{Z}_P$ и не для всякого многогранника она достигается. Многообразие $\mathcal{Z}_P$ зависит только от комбинаторного типа многогранника $P$, что даёт возможность исследовать комбинаторику многогранника при помощи топологии момент-угол многообразия и наоборот. На основании этого В. М. Бухштабер ввел комбинаторный инвариант $s(P)$ простого многогранника $P$ как максимальную размерность подгрупп $H \simeq T^r \subseteq T^m$, действующих свободно на $\mathcal{Z}_P$. Этот инвариант получил название *число Бухштабера.* В некотором смысле число $s(P)$ является мерой симметрии момент-угол многообразия. В 2002 году В.М. Бухштабер[5] поставил проблему найти алгоритм вычисления числа $s(P)$ по комбинаторике многогранника $P$. Так как конструкция многообразия $\mathcal{Z}_P$ распространяется на любой симплициальный комплекс, так что $\mathcal{Z}_P = \mathcal{Z}_{K_P}$, где $K_P = \partial P^*$ – граница двойственного симплициального многогранника, то аналогичная проблема формулируется для произвольного симплициального комплекса $K$.

Инвариант Бухштабера изучается с 2001 года. И. В. Изместьев[6] показал, что $s(P) \geqslant m - \gamma(P)$, где $\gamma(P)$ – хроматическое число многогранника, то есть наименьшее число цветов, для которого существует такая раскраска гиперграней, что любые две пересекающиеся гиперграни имеют разный цвет. А. А. Айзенберг[7,8,9] показал, что $s(K) \leqslant m - \lceil \log_2(\gamma(K)+1) \rceil$, где $m = |\mathrm{Vert(K)}|$, причём если $K$ – граф, то имеет место равенство. Он также предложил универсальный подход к построению комбинаторных инвариантов симплициальных комплексов, обобщающих хроматическое число многогранника. Одним из подходов к изучению числа $s(P)$ является рассмотрение его вещественного аналога $s_{\mathbb{R}}(P)$. В этом случае $s_{\mathbb{R}}(P) = m - n$ тогда и только тогда, когда над многогранником существует хотя бы одно *малое накрытие.* Легко показать, что $s(K) \leqslant s_{\mathbb{R}}(K)$, причём А. А. Айзенбергом был придуман пример 3-мерного симплициального комплекса $K$, для которого неравенство строгое. Кроме того, можно показать, что если $r = 1, 2, 3$, то $s(K) \geqslant r$ тогда и только тогда, когда $s_{\mathbb{R}}(K) \geqslant r$. М. Масуда и Ю. Фукукава[10] переформулировали задачу вычисления числа

[5] В. М. Бухштабер, Т. Е. Панов, *Торические действия в топологии и комбинаторике*, М.: МЦНМО, 2004.

[6] И. В. Изместьев, *Трехмерные многообразия, определяемые раскраской граней простого многогранника*, Матем. заметки, 69:3 (2001), 375–382.

[7] А. А. Айзенберг, *Курсовая работа*, мехмат МГУ, 2009.

[8] А. А. Айзенберг, *Экспоненциальный закон для K-степени*, УМН, 64:4(388) (2009), 175–176.

[9] A. Ayzenberg, *The problem of Buchstaber number and its combinatorial aspects*, arXiv:1003.0637v1 [math.CO].

[10] Y Fukukawa, M. Masuda, *Buchstaber invariants of skeleta of a simplex*, Osaka J. Math. Volume 48,

$s_{\mathbb{R}}(m,p) = s_{\mathbb{R}}(\Delta^{m-1}_{m-1-p})$ как задачу целочисленного линейного программирования и получили значительные результаты по ней. А. А. Айзенбегом были придуманы примеры графов $\Gamma_1$ и $\Gamma_2$, таких что $s(\Gamma_1 * \Gamma_2) \neq s(\Gamma_1) + s(\Gamma_2)$ и аналогично для вещественного числа Бухштабера. Им был также построен аналог хроматического многочлена для $s_{\mathbb{R}}(K)$.

В диссертации рассмотрены также задачи, важные для развития связей торической топологии с другими актуальными разделами математики, такими как комбинаторика симметрической группы, теории алгебр Хопфа и квазисимметрических функций. Одной из таких задач является изучение комбинаторики многогранников, у которых $s(P) = m - n$. Такой пример дают нестоэдры – простые многогранники, возникшие в работах А. Постникова[11] и Е. Фейхтнер и Б. Штурмфельса[12]. В работе А. Постникова, В. Райнера и Л. Вильямса[13] была доказана гипотеза Гала о числах граней флаговых многогранников для нестоэдров, отвечающих так называемым «хордовым» производящим множествам. Их подход заключается в сопоставлении вершинам нестоэдра перестановок таким образом, что $h$-полином является производящей суммой их «числа спусков». Нас интересует задача развития этого подхода для производящих множеств, не являющихся хордовыми. Другой задачей является интерпретация известных конструкций теории многогранников на основе дифференциальных колец выпуклых многогранников, введённых В. М. Бухштабером[15,16]. В диссертации рассматривается конструкция торического $g$-полинома[17,18] и $g$-полинома квазисимметрической функции[19].

---

Number 2 (2011), 549-582.

[11] A. Postnikov, *Permutohedra, associahedra, and beyond*, arXiv: math.CO/0507163.

[12] E.-M. Feichtner, B. Sturmfels, *Matroid polytopes, nested sets and Bergman fans*, Portugaliae Mathematica 62 (2005), 437–468.

1314

[15] В. М. Бухштабер, *Кольцо простых многогранников и дифференциальные уравнения*, Труды математического института им. В. А. Стеклова, т.263, 2008, 1–26.

[16] В. М. Бухштабер, Н. Ю. Ероховец, *Многогранники, числа Фибоначчи, алгебры Хопфа и квазисимметрические функции*, УМН, 66:2(398) (2011), 67–162.

[17] R. P. Stanley, *Generalized h-vectors, intersection cohomology of toric varieties, and related results*, Commutative Algebra and Combinatorics, Advanced Studies in Pure Mathematics, 11, Kinokuniya, Tokyo, and North-Holland, Amsterdam/New York, 1987, 187–213.

[18] M. M. Bayer and R. Ehrenborg, *The toric h-vector of partially ordered sets*, Trans. Amer. Math. Soc., 352, 2000, 4515–4531 (electronic).

[19] L. Billera, S. Hsiao, S. van Willigenburg, *Peak quasisymmetric functions and Eulerian enumeration*, Adv. Math. bf 176 (2003), no. 2, 248–276, arXiv: 0706.3486v1 [math.CO], 24 June 2007.

### Цель работы.

Целью работы является построение теории инварианта Бухштабера: развитие методов вычисления, анализ связи с другими инвариантами, исследование поведения инварианта относительно операций и структур, связанных с простыми многогранниками, вычисление значения для специальных классов многогранников и симплициальных комплексов.

### Научная новизна.

В диссертации получены следующие результаты:

1. Показано, что максимальная размерность $s(P)$ торических подгрупп, действующих свободно на момент-угол многообразии $\mathcal{Z}_P$, обладает следующими свойствами:

   (a) $s(P) = 1$ тогда и только тогда, когда $P = \Delta^n$.

   (b) Если $2 \leqslant m - n \leqslant \frac{n+83}{48}$, то $s(C^n(m)^*) = 2$, где $C^n(m)$ – циклический многогранник. В частности, для любого $k \geqslant 2$ существует многогранник $P$, такой что $m - n = k$ и $s(P) = 2$.

   (c) $s(P) \geqslant m - \gamma(P) + s(\Delta^{\gamma-1}_{n-1})$. Эта оценка улучшает результат И. В. Изместьева.

   (d) $s(P) + s(Q) \leqslant s(P \times Q) \leqslant s(P) + s(Q) + \min\{k_1 - s(P), k_2 - s(Q)\}$, где $k_l = m_l - n_l$, $l = 1, 2$. В частности, $s(P \times Q) = s(P) + s(Q)$, если $s(P) = k_1$ или $s(Q) = k_2$, и $s(P \times Q) < k_1 + k_2$, если $s(P) < k_1$ или $s(Q) < k_2$,.

   (e) Пусть $[m] = \omega_1 \sqcup \dots \sqcup \omega_r$, причём $\bigcap\limits_{i \in \omega_l} F_i = \varnothing$ для каждого $l \in [r]$. Тогда $s(P) \geqslant r$. В частности $s(P) \geqslant [\frac{m}{n+1}]$.

   (f) Если многогранник $Q$ получается из многогранника $P$ при помощи $i$-перестройки, $2 \leqslant i \leqslant n - 1$, то $|s(P) - s(Q)| \leqslant 1$. Кроме того,

   $$s(P) + 1 \leqslant s(P \sharp \Delta^n) \leqslant s(P) + 2.$$

2. В первом нетривиальном случае простых $n$-мерных многогранников с $m = n + 3$ гипергранями получены ответы на основные вопросы теории инварианта Бухштабера $s(P)$, перечисленные в разделе «цели работы», в том числе получена формула для числа $s(P)$ в терминах диаграммы Гейла, построены многогранники $P$ и $Q$, такие что $f(P) = f(Q), \gamma(P) = \gamma(Q)$, но $s(P) \neq s(Q)$, где $f(P)$ – вектор граней

и $\gamma(P)$ – хроматическое число. Вычислено биградуированное кольцо когомологий $\mathrm{H}^{*,*}(\mathcal{Z}_P)$. В качестве следствия получена формула для числа $s(P)$ многогранника $P$ с $m = n + 3$ в терминах биградуированных чисел Бетти момент-угол многообразия $\mathcal{Z}_P$.

3. Доказана гипотеза Гала для нестоэдров, отвечающих полным двудольным графам $K_{p,q}$, на основе развития метода А. Постникова, В. Райнера и Л. Вильямса[13] описания комбинаторики нестоэдров в терминах группы перестановок.

4. Получена функториальная алгебраическая конструкция кольцевых гомоморфизмов, которая в случае алгебры частично-упорядоченных множеств и джойн-кольца выпуклых многогранников даёт торический $g$-полином, а в случае кольца квазисимметрических функций – $g$-полином квазисимметричекой функции.

## Основные методы исследования.

В работе используются методы торической топологии, теории многогранников, комбинаторики и алгебры.

## Теоретическая и практическая ценность работы.

Диссертация носит теоретический характер. Полученные в диссертации результаты представляют интерес для торической топологии, теории многогранников и алгебры.

## Апробация работы.

Результаты диссертации докладывались на следующих научно-исследовательских семинарах и научных конференциях:

1. Семинар «Геометрия, топология и математическая физика» под руководством акад. РАН С. П. Новикова и чл.-корр. РАН В. М. Бухштабера; кафедра высшей геометрии и топологии Механико-математического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова;

2. Семинар «Алгебраическая топология и её приложения» им. М. М. Постникова под руководством чл.-корр. РАН В. М. Бухштабера, проф. А. В. Чернавского, проф. И. А. Дынникова, проф. Т. Е. Панова, доц. Л. А. Алания и доц. Д. В. Миллионщикова; кафедра высшей геометрии и топологии Механико-математического факультета МГУ;

3. Семинар «Дискретная геометрия и геометрия чисел» под руководством проф. Н. П. Долбилина и проф. Н. Г. Мощевитина, кафедра теории чисел Механико-математического факультета МГУ;

4. Семинар «Выпуклые многогранники» под руководством проф. Н. П. Долбилина, кафедра теории чисел Механико-математического факультета МГУ;

5. Семинар по геометрии и динамике, Высшая Нормальная Школа, г.Лион, Франция, 26 мая 2010 года;

6. Русско-Японская мини-конференция «Discrete Geometry and Statistics of Configurations», МИРАН им. В. А. Стеклова, г. Москва, 1-3 июня 2009 года;

7. Международная конференция «Toric topology in Manchester», г. Манчестер, Великобритания, ноябрь 2009 года;

8. Международная конференция «Топология и динамика: мемориал В. А. Рохлина», институт Л. Эйлера, г.Санкт-Петербург, 11-16 января 2010 года;

9. Международная конференция «Ломоносов 2010», г. Москва, 12-15 апреля 2010 года.

10. Международная конференция «Геометрия, топология, алгебра и теория чисел, приложения», посвященная 120-летию Б. Н. Делоне, г.Москва, 16-20 августа 2010 года;

11. Международная конференция «Topological methods in toric geometry, symplectic geometry and combinatorics», г.Банфф, Канада, 7-12 ноября 2010 года;

12. Международная конференция «Ломоносов 2011», г. Москва, 11-15 апреля 2011 года.

13. Международная конференция «Торическая топология и автоморфные функции», г. Хабаровск, 5-10 сентября 2011 года.

**Публикации.**

Основное содержание диссертации опубликовано в четырёх работах, список которых приведен в конце автореферата [1,2,3,4].

**Структура и объем диссертации.**

Диссертационная работа изложена на 125 страницах и состоит из введения, пяти глав и приложения. Библиография включает 70 наименований.

## Краткое содержание работы

Во введении к диссертации излагается история рассматриваемой проблемы, формулируются основные результаты, приводится краткое содержание работы и список основных соглашений и обозначений.

### Содержание главы 1

Глава 1 содержит основные определения и конструкции, используемые в диссертации. В разделе 1.1 речь идёт о простых многогранниках и симплициальных комплексах, перечисляющих полиномах многогранников, таких как $f-$,$h-$,$\gamma-$,$g-$ полиномы, конструкции симплициального комплекса $K_\omega$ по заданному симплициальному комплексу $K$ на $[m]$ вершинах и набору натуральных чисел $\omega = (k_1, \ldots, k_m)$, аналогичной конструкции простого многогранника $P_\omega$ по заданному многограннику $P$ с $m$-гипергранями, $i$-перестройках многогранника, а также диаграммах Гейла. Следует отметить, что понятие $i$-перестройки используется нами в специальном виде, а именно рассматривается элементарное изменение комбинаторного типа многогранника при движении в пространстве внутрь многогранника одной из его опорных гиперплоскостей. При этом с границей двойственного симплициального многогранника происходит бизвёздное преобразование.

Раздел 1.2 посвящён изложению необходимых сведений о момент-угол многообразиях. В разделе 1.3 рассказывается про биградуированную структуру в кольце когомологий момент-угол многообразия и приводятся некоторые леммы, которые затем используются для многогранника с $m = n+3$ гипергранями. В разделе 1.4 приводятся основные факты о циклических многогранниках $C^n(m)$.

### Содержание главы 2

Глава 2, наряду с главой 3, является центральной главой диссертации. В ней в разделе 2.1 приводится определение числа Бухштабера $s(P)$ простого многогранника $P$ – наибольшей размерности торических подгрупп, действующих свободно на момент-угол многообразии $\mathcal{Z}_P$. В разделе 2.3

приводится два комбинаторных описания числа $s(P)$, первое из которых содержится в книге[5], а второе является естественным обобщением понятия характеристической функции. Пусть $\mathcal{F}$ – множество гиперграней многогранника $P$. Для матрицы $S$ обозначим через $S^{\hat{i}_1,\dots,\hat{i}_n}$ подматрицу, получающуюся удалением строк с номерами $\{i_1,\dots,i_n\}$.

**Предложение 2.2.5**

1. *$s(P)$ – наибольшее натуральное число $s$, для которого существует целочисленная матрица $S$ размера $m\times s$, такая что для любой вершины $\boldsymbol{v}=F_{i_1}\cap\dots\cap F_{i_n}$ матрица $S^{\hat{i}_1,\dots,\hat{i}_n}$ задаёт мономорфизм на прямое слагаемое;*

2. *$s(P)$ – наибольшее натуральное число $s$, для которого существует отображение $\Lambda\colon\mathcal{F}\to\mathbb{Z}^{m-s}$, такое что для любой вершины $\boldsymbol{v}=F_{i_1}\cap\dots\cap F_{i_n}$ векторы $\Lambda(F_{i_1}),\dots,\Lambda(F_{i_n})$ образуют часть базиса в $\mathbb{Z}^{m-s}$.*

В разделе 2.4 приводится сводка известных фактов о числе $s(P)$. Раздел 2.5 посвящён исследованию свойств числа $s(P)$. Результаты собраны в основной теореме 2.4.1. главы 2. Вот выдержка из неё.

*Число $s(P)$ обладает следующими свойствами:*

- *Для простых многогранников $s(P)=1$ тогда и только тогда, когда $P=\Delta^n$ – симплекс.*

- *Если $2\leqslant m-n\leqslant\frac{n+83}{48}$, то $s(C^n(m)^*)=2$. В частности, для любого $k\geqslant 2$ существует многогранник $P$, такой что $m-n=k$ и $s(P)=2$.*

- *$s(P)+s(Q)\leqslant s(P\times Q)\leqslant s(P)+s(Q)+\min\{m_1-n_1-s(P),m_2-n_2-s(Q)\}$. В частности, если $s(P)=m_1-n_1$, то $s(P\times Q)=s(P)+s(Q)$.*

- *$s(P)\geqslant m-\gamma(P)+s(\Delta_{n-1}^{\gamma-1})$, причём*

    *a) $s(\Delta_{n-1}^{m-1})\geqslant 1$ тогда и только тогда, когда $m\geqslant n+1$.*

    *b) $s(\Delta_{n-1}^{m-1})\geqslant 2$ тогда и только тогда, когда $\frac{m}{n+1}\geqslant\frac{3}{2}$;*

    *c) $s(\Delta_{n-1}^{m-1})\geqslant 3$ тогда и только тогда, когда $4m\geqslant 7(n+1)+r_{m \bmod 7}$, где $r_0=0,r_1=4,r_2=8,r_3=5,r_4=2,r_5=6,r_6=3$.*

    *d) $s(\Delta_{n-1}^{m-1})\geqslant\left[\frac{m}{n+1}\right]$, откуда $s(P)\geqslant m-\gamma+\left[\frac{\gamma}{n+1}\right]\geqslant\left[\frac{m}{n+1}\right]$.*

- *Пусть $K$ – симплициальный комплекс на множестве вершин $[m]$ и $\omega_1,\dots,\omega_l\notin K$ – подмножества в $[m]$, такие что $[m]=\omega_1\cup\dots\cup\omega_l$. Тогда $m-s(K)\leqslant\dim\omega_1+\dots+\dim\omega_l=(|\omega_1|-1)+\dots+(|\omega_l|-1)$.*

- *Если многогранник $Q$ получается из многогранника $P$ при помощи $i$-перестройки, $2 \leqslant i \leqslant n-1$, то $|s(P)-s(Q)| \leqslant 1$. Кроме того,*

$$s(P)+1 \leqslant s(P\sharp\Delta^n) \leqslant s(P)+2.$$

**Содержание главы 3**

Глава 3 посвящена исследованию простых многогранников с малым числом гиперграней с точки зрения торической топологии. В разделе 3.1 приводится доказательство известного факта о проективной классификации выпуклых многогранников с $m=n+2$ гипергранями. На основе этой классификации в разделе 3.2 исследуются простые многогранники с $m=n+3$. В частности, в подразделе 3.2.1 даётся геометрическое описание таких многогранников при помощи диаграмм прямых, двойственное к описанию Б. Грюнбаума[20] симплициальных многогранников при помощи «звёздных» диаграмм. В подразделе 3.3.2 на основе этого описания приводится комбинаторное описание, полученное М. Перлесом при помощи диаграмм Гейла.

**Следствие 3.2.8.** *Любой простой многогранник $P^n$, $m=n+3$, комбинаторно описывается при помощи правильного $(2k-1)$-угольника $M_{2k-1}$ и сюръективного отображения $\zeta\colon \mathcal{F} \to \mathrm{vert}(M_{2k-1})$, причём гиперграни $F_1,\dots,\widehat{F_r},\dots,\widehat{F_s},\dots,\widehat{F_r},\dots,F_{n+3}$ пересекаются в вершине тогда и только тогда, когда $\mathbf{0} \in \mathrm{conv}\{\zeta(F_r),\zeta(F_s),\zeta(F_t)\}$. Простой многогранник с $m=n+2$ комбинаторно эквивалентен $\Delta^i \times \Delta^j$ и соответствует треугольнику с числами $(1,i+1,j+1)$ в вершинах. Простой многогранник с $m=n+1$ является симплексом и соответствует треугольнику с числами $(1,1,n+1)$ в вершинах.*

Таким образом, простые многогранники с $m \leqslant n+3$ описываются при помощи правильных $(2k-1)$ – угольников с числами в вершинах, отвечающими числам гиперграней заданного типа. В треугольнике вершине с числом 1 не соответствует никакая гипергрань, но гиперплоскость, не пересекающая многогранник. Мы используем обозначение $P \sim (a_1,\dots,a_{2k-1})$ или $P \sim (M_{2k-1},a_1,\dots,a_{2k-1})$. Далее мы приводим краткое доказательство результата М. Перлеса о классификации простых многогранников с $m \leqslant n+3$.

**Предложение 3.2.9.** *Многогранники $P \sim (a_1,\dots,a_{2k-1})$ и $Q \sim (a'_1,\dots,a'_{2k'-1})$ комбинаторно эквивалентны тогда и только тогда, когда $k=k'$ и $M_{2k-1}$*

[20] B. Grunbaum, *Convex Polytopes*, Vol. 221 of Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, New York, Second ed., 2003.

*переводится в $M_{2k'-1}$ ортогональным преобразованием, сохраняющим числа в вершинах.*

Наконец, мы приводим доказательство следующего результата.

**Предложение 3.2.10.** *Имеем:* $C^{2k-4}(2k-1)^* \sim (M_{2k-1}, 1, \ldots, 1)$, *причём сюръективное отображение имеет вид* $\zeta(F_i) = \boldsymbol{w}_{ki}$.

В подразделе 3.2.3 мы приводим связь нашего подхода с диаграммами Гейла, находим минимальные наборы непересекающихся гиперграней, а также получаем следующий результат, который завершает комбинаторную классификацию простых многогранников с $m \leqslant n+3$.

**Предложение 3.2.12.** Имеем: $C^{2k-4}(2k-1)^*_{a_1,\ldots,a_{2k-1}} \sim (M_{2k-1}, a_1, \ldots, a_{2k-1})$, $k \geqslant 3$, и $(\Delta^2, a+1, b+1, c+1) = \Delta^a \times \Delta^b \times \Delta^c$.

Этот результат получен с использованием комбинаторной классификации М. Перлеса, описания комбинаторного типа многогранника $C^{2k-4}(2k-1)^*$ и применения конструкции многогранника $P_\omega$.

В разделе 3.3 мы описываем все возможные $i$-перестройки, которые могут происходить в классе простых многогранников с $m \leqslant n+3$. В разделе 3.4 мы приводим компактную формулу для $h$-полинома многогранника $(M_{2k-1}, a_1, \ldots, a_{2k-1})$. Положим $\varphi_r = a_r + \cdots + a_{r+k-2}$, $\psi_r = a_r + \cdots + a_{r+k-1}$, где все индексы рассматриваются $\mod (2k-1)$. Тогда

$$h(P) = \frac{\alpha^{n+3} - \sum\limits_{r=1}^{2k-1} \alpha^{\psi_r} t^{\varphi_{r+k}} + \sum\limits_{r=1}^{2k-1} \alpha^{\varphi_r} t^{\psi_{r+k-1}} - t^{n+3}}{(\alpha - t)^3} \qquad (3.2)$$

Отметим, что в книге Б. Грюнбаума[20] содержатся результаты, позволяющие вычислить полином $h(P)$, но указанной формулы в ней не содержится.

Следующий результат является основным в разделе 3.5.

**Предложение 3.5.1.** *Пусть* $P \sim (M_{2k-1}, a_1, \ldots, a_{2k-1})$ *и* $m = n+3$. *Тогда* $s(P) = 3$, *если* $k \leqslant 4$; *и* $s(P) = 2$, *если* $k \geqslant 5$.

На основе этой классификации мы получаем следствие.

**Следствие 3.5.3.** *Для многогранников* $P \sim (a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7)$ *и* $Q \sim (1, a_1, a_2, a_3, 1, a_4-1, a_5, a_6, a_7-1)$, *таких что* $a_1+a_2+a_3+2 = a_4+a_5+a_6+a_7$, *имеем:* $f(P) = f(Q)$, $\gamma(P) = \gamma(Q)$, *но* $s(P) = 3$, $s(Q) = 2$. *Следовательно, число Бухштабера нельзя вычислить, зная только $f$-полином и хроматическое число многогранника.*

В разделе 3.6 мы приводим вычисление кольца $\mathrm{H}^{*,*}(\mathcal{Z}_P)$.

**Теорема 3.6.1.** *Пусть* $P \sim (a_1, \ldots, a_{2k-1})$. *Тогда*

$$\mathrm{H}^{*,*}(\mathcal{Z}_\mathrm{P}) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}^{\mathrm{2k-1}} \oplus \mathbb{Z}^{\mathrm{2k-1}} \oplus \mathbb{Z}$$

*с образующими:* $\{1, X_i, Y_j, Z\colon i,j = 1,\ldots,2k-1\}$,

$$\mathrm{bideg} X_i = (-1, 2\varphi_i),\ \mathrm{bideg} Y_j = (-2, 2\psi_j),\ \mathrm{bideg} Z = (-3, 2(n+3)).$$

*Для* $k = 2$ *имеем:* $X_i^2 = 0, \quad X_iX_{i+1} = Y_i, \quad X_1X_2X_3 = Z$.
*Для* $k \geqslant 3$ *имеем:* $X_iX_j = 0, \quad X_iY_j = \delta_{i+k-1,j}Z, \quad Y_iY_j = 0$.

Как следствие получаем следующие результаты.
**Следствие 3.6.6.** *Пусть* $P \sim (a_1, \ldots, a_{2k-1})$. *Тогда*

$$2k-1 = \mathrm{rank H}^{-1,*}(\mathcal{Z}_\mathrm{P}) = \sum_\mathrm{i} \beta^{-1,2\mathrm{i}}(\mathrm{P}) = \mathrm{rank H}^{-2,*}(\mathcal{Z}_\mathrm{P}) = \sum_\mathrm{j} \beta^{-2,2\mathrm{j}}(\mathrm{P}).$$

Как известно, число минимальных наборов гиперграней, имеющих пустое пересечение, равно $l(P) = \sum_p \beta^{-1,2p}(P)$.
**Следствие 3.6.7.** *Для многогранника* $P^n$ *с* $m = n+3$ *имеем:* $s(P) = 3$, *если* $l(P) \leqslant 7$, *и* $s(P) = 2$, *если* $l(P) > 7$. *Таким образом, для многогранника с* $m \leqslant n+3$ *инвариант* $s(P)$ *выражается через биградуированные числа Бетти* $\{\beta^{-q,2p}(P)\}$.

Мы также приводим пример «жесткого»[21] многогранника.
**Пример 3.6.10.** *Пусть* $P \sim (a, a, \ldots, a)$, $a \geqslant 1$, *и* $\beta^{-q,2p}(Q) = \beta^{-q,2p}(P)$ *для всех* $p, q$. *Тогда* $Q = P$.

В разделе 3.7 мы показываем, как результат работы[22] о момент-угол комплексах позволяет связать теорему 3.6.1. с результатом Лопе де Медрано[23] о полном пересечении квадрик.
**Теорема 3.7.1** *Пусть* $k = 2$. *Тогда* $\mathcal{Z}_P = S^{2a+1} \times S^{2b+1} \times S^{2c+1}$, *где* $P \sim (a+1, b+1, c+1)$. *Пусть* $k \geqslant 3$. *Тогда* $\mathcal{Z}_P = \mathop{\#}\limits_{i=1}^{2k-1} S^{2\varphi_i - 1} \times S^{2\psi_{i+k-1}-2}$, *где* $P \sim (a_1, \ldots, a_{2k-1})$.

## Содержание главы 4

Глава 4 посвящена развитию метода А. Постникова, В. Райнера и Л. Вильямса[13] описания комбинаторики нестоэдров в терминах группы перестановок для доказательства гипотезы Гала для нестоэдров $P_{p,q}$, отвечающих полным двудольным графам $K_{p,q}$. В разделе 4.1 приводятся с краткими доказательствами необходимые сведения о нестоэдрах. В разделе 4.2 вводятся

[21] S. Choi, T. Panov and D. Y. Suh, *Toric cohomological rigidity of simple convex polytopes*, Journal of the London Math. Society, II Ser. 82 (2010), no.2, 343–360; arXiv:0807.4800.
[22] V. M. Buchstaber, T. E. Panov, N. Ray, *Spaces of polytopes and cobordism of quasitoric manifolds.*, Moscow Math. J., v. 7, N 2, 2007, 219–242; arXiv: Math AT/0609346.
[23] S. Lopez de Medrano, *The topology of the intersection of quadrics in* $\mathbb{R}^n$, Lecture Notes in Mathematics 1370 (1989), 280–292.

нестоэдры, отвечающие полным двудольным графам. В разделе 4.3 доказывается следующий факт.

**Предложение 4.3.1** *Для любого связного производящего множества $B$ существует такой набор перестановок $\{\omega_v\}$, взаимно однозначно соответствующих вершинам $v$ нестоэдра $P_B$, что*

$$\boldsymbol{h}(P_B)(t) = \sum_v t^{\mathrm{des}\omega_v},$$

*где $\mathrm{des}\omega_v$ – число «спусков» перестановки $\omega_v$.*

Это является обобщением результата А. Постникова, В. Райнера и Л. Вильямса, которые доказали такое утверждение для так называемых «хордовых» производящих множеств. Для графа $K_{p,q}$ производящее множество не является хордовым, однако на основе предложения 4.3.1 при помощи индукции мы показываем, что гипотеза Гала верна и для нестоэдров $P_{p,q}$.

**Теорема 4.3.2.** $\gamma_i(P_{p,q}) \geqslant 0, p, q \geqslant 1, i \geqslant 0.$

В разделе 4.4 рассматриваются примеры нестоэдров $P_{p,2}$ и $P_{p,3}$.

### Содержание главы 5

Глава 5 посвящена построению универсальной функториальной конструкции кольцевых гомоморфизмов $G\colon R \to \mathbb{Z}[\alpha_1, \alpha_2, \dots, t_1, t_2, \dots]$, которая в частных случаях джойн-кольца многогранников и алгебры Рота-Хопфа частично-упорядоченных множеств даёт торические $g$- и $h$-полиномы, в случае кольца квазисимметрических функций даёт $g$-полином квазисимметрической функции[19], а в случае кольца простых многогранников даёт гомоморфизм $P^n \to f_0(P)t^n$.

В разделе 5.1 приводятся необходимые сведения о $\times$- и $*$- кольцах многогранников, алгебре Рота-Хопфа градуированных частично-упорядоченных множеств и операторах граней на них, доказывается, что кольца многогранников являются кольцами полиномов от неразложимых многогранников. В разделе 5.2 приводятся необходимые сведения о градуированно двойственных друг к другу алгебрах Хопфа квазисимметрических функций и Лейбница-Хопфа. В разделе 5.3 даётся определение модуля Милнора над алгеброй Хопфа и показывается (см. [1]) что рассмотренные ранее кольца являются модулями Милнора над алгеброй Лейбница-Хопфа.

В разделе 5.4 приводится конструкция $G$-полинома деформации умножения. Пусть $\mathbb{A}$ – коммутативное ассоциативное кольцо с единицей и $A = \sum A^{2n}$, $n \geqslant 0$, – связная градуированная ассоциативная $\mathbb{A}$-алгебра. Рассмотрим градуированное кольцо $A[\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{t}] = A[\alpha_1, \alpha_2, \dots, t_1, t_2, \dots], \deg \alpha_i > 0, \deg t_i > 0.$

*Градуированной деформацией умножения* в $\mathbb{A}$-алгебре $A$ называется гомоморфизм градуированных $\mathbb{A}$-алгебр $\Psi\colon A \to A[\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{t}]$, $\Psi(a) = \Psi(a; \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{t})$, такой что $\Psi(a; \mathbf{0}, \mathbf{0}) = a$ для любого $a \in A$.

Пусть $\tau\colon \mathbb{A}[\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{t}] \to \mathbb{A}[\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{t}]$ – кольцевой гомоморфизм, меняющий местами $\boldsymbol{\alpha}$ и $\boldsymbol{t}$. Положим $\mathbb{Z}_+^\infty = \varinjlim \mathbb{Z}_+^n$. Элементами полугруппы $\mathbb{Z}_+^\infty$ являются последовательности $\omega = (j_1, j_2, \dots)$ неотрицательных целых чисел, имеющие конечное число ненулевых компонент. Упорядочим все слова $\omega \in \mathbb{Z}_+^\infty$ линейно таким образом, что если $\omega_1 < \omega_2$ и $\omega_1' < \omega_2'$, то $\omega_1 + \omega_1' < \omega_2 + \omega_2'$, и если $\omega_1 \leqslant \omega_2$ и $\omega_1' \leqslant \omega_2'$, то $\omega_1 + \omega_1' \leqslant \omega_2 + \omega_2'$, например лексикографически.
**Теорема 5.4.2** *Пусть $\Psi\colon A \to A[\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{t}]$ – градуированная деформация умножения в $\mathbb{A}$-алгебре $A$. Тогда*

1. *Существует единственная пара градуированных $\mathbb{A}$-линейных отображений $\widetilde{G} = \widetilde{G}_\Psi$ и $G = G_\Psi\colon A \to \mathbb{A}[\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{t}]$, $G(1) = \widetilde{G}(1) = 1$, таких что*

   (a) $G(a) = \sum g_{\omega',\omega''} \boldsymbol{\alpha}^{\omega'} \boldsymbol{t}^{\omega''}$, $\omega' < \omega''$, $g_{\omega',\omega''} \in \mathbb{A}$;

   (b) $\widetilde{G}(a) = \sum \tilde{g}_{\omega',\omega''} \boldsymbol{\alpha}^{\omega'} \boldsymbol{t}^{\omega''}$, $\omega' \geqslant \omega''$, $\tilde{g}_{\omega',\omega''} \in \mathbb{A}$;

   (c) *Отображения $G$ и $\widetilde{G}$ связаны уравнением $\widetilde{G} = G\Psi$.*

2. *Отображения $\widetilde{G}$ и $G$ являются гомоморфизмами $\mathbb{A}$-алгебр.*

3. *Если в кольце $A$ нет 2-кручения и $\Psi(\Psi(a; \boldsymbol{t}, \boldsymbol{\alpha}); \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{t}) = a$ для любого $a \in A$, то $\widetilde{G} = \tau G$.*

Показывается, что конструкция функториальна в следующем смысле.
**Предложение 5.4.5.** *Пусть $A$, $B$ – градуированные $\mathbb{A}$-алгебры, $\Psi_A\colon A \to A[\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{t}]$, $\Psi_B\colon B \to B[\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{t}]$ – градуированные деформации умножений и $\Lambda\colon A \to B$ – гомоморфизм градуированных $\mathbb{A}$-алгебр, такой что $\Lambda\,\Psi_A = \Psi_B\,\Lambda$. Тогда $G_A = G_B\,\Lambda$ и $\widetilde{G}_A = \widetilde{G}_B\,\Lambda$.*

В разделе 5.5 показано применение конструкции $G$-полинома в случае градуированного модуля Милнора над алгеброй Лейбница-Хопфа и разобраны случаи введённых ранее модулей Милнора. В разделе 5.6 показано разложение кольца простых многогранников, возникающее при рассмотрении многогранников с $s(P) = m - n$ и многогранников с $s(P) < m - n$.

## Содержание приложения А

В приложении получены уравнения, которым удовлетворяют производящие функции простых многогранников $\mathfrak{C}_k^n = C^n(n+k)^*$, двойственных к циклическим. Например, положим $U_k = \sum\limits_{n\geqslant 0} \frac{h(\mathfrak{C}_k^n)x^{n+k}}{(n+k)!}$ и $U = \sum\limits_{k\geqslant 1} U_k u^{k-1}$.

**Предложение 1.0.3.** *Имеем:*

$$(\frac{\partial}{\alpha}+\frac{\partial}{\partial t})U = xU - u\frac{(\sqrt{\frac{u^2}{\alpha t}+4}+2)e^{\frac{u-\sqrt{u^2+4\alpha t}}{2}x}+(\sqrt{\frac{u^2}{\alpha t}+4}-2)e^{\frac{u+\sqrt{u^2+4\alpha t}}{2}x}}{(u^2+4\alpha t)^{\frac{3}{2}}};$$

$$A(\alpha,0,x,u) = \frac{e^{\alpha x}-e^{xu}}{\alpha-u}.$$

### Благодарности

Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю члену-корреспонденту РАН, профессору Виктору Матвеевичу Бухштаберу за постановки задач и постоянное внимание. Автор благодарен д.ф.-м.н., профессору Н. П. Долбилину, д.ф.-м.н., профессору Т. Е. Панову, д.ф.-м.н. А. А. Гайфуллину, А. А. Айзенбергу за полезные обсуждения, а также В. Д. Володину за метод, позволивший сократить доказательство полиномиальности колец многогранников. Автор также благодарен всему коллективу кафедры высшей геометрии и топологии Механико-математического факультета МГУ за поддержку и внимание.

## Список публикаций по теме диссертации

[1] Н. Ю. Ероховец, *Инвариант Бухштабера простых многогранников*, УМН, 63:5(383) (2008), 187–188.

[2] Н. Ю. Ероховец, *Момент-угол многообразия простых $n$-мерных многогогранников с $n+3$ гипергранями*, УМН, 66:5(401) (2011), 187-188.

[3] Н. Ю. Ероховец, *Гипотеза Гала для нестоэдров, отвечающих полным двудольным графам*, Тр. МИАН, 266, МАИК, М., 2009, 127–139.

[4] В. М. Бухштабер, Н. Ю. Ероховец, *Многогранники, числа Фибоначчи, алгебры Хопфа и квазисимметрические функции*, УМН, 66:2(398) (2011), 67–162. (В диссертацию включены результаты, полученные лично автором.)