Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова

Механико-математический факультет

На правах рукописи
УДК 512.745+512.816.4

Авдеев Роман Сергеевич

Некоторые вопросы гармонического анализа на сферических однородных пространствах

01.01.06 — математическая логика, алгебра и теория чисел

Автореферат

диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Москва 2011

Работа выполнена на кафедре высшей алгебры механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова.

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук, профессор Винберг Эрнест Борисович
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, профессор Ахиезер Дмитрий Наумович
	кандидат физико-математических наук Шмелькин Дмитрий Альфредович
Ведущая организация:	Высшая школа экономики (Национальный исследовательский университет)

Защита диссертации состоится 11 ноября 2011 г. в 16 ч. 45 м. на заседании диссертационного совета Д 501.001.84 при Московском государственном университете имени М. В. Ломоносова по адресу: Российская Федерация, 119991, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д. 1, МГУ, механико-математический факультет, аудитория 14-08.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке механико-математического факультета МГУ (Главное здание, 14 этаж)

Автореферат разослан 11 октября 2011 г.

Учёный секретарь
диссертационного совета
Д 501.001.84 при МГУ
доктор физико-математических наук,
профессор

А. О. Иванов

Общая характеристика работы

Актуальность темы

Диссертация посвящена решению некоторых алгебраических задач гармонического анализа на сферических однородных пространствах, а также исследованию связи этих задач с некоторыми геометрическими свойствами сферических однородных пространств.

Пусть G — связная редуктивная комплексная алгебраическая группа. Зафиксируем в G борелевскую (т. е. максимальную связную разрешимую) подгруппу B и максимальную унипотентную подгруппу U, содержащуюся в B. Обозначим через $\Lambda_+(G)$ полугруппу доминантных весов группы G по отношению к борелевской подгруппе B.

Пусть $H \subset G$ — некоторая алгебраическая подгруппа. Естественное действие группы G на однородном пространстве G/H левыми сдвигами индуцирует её представление ρ в алгебре $\mathbb{C}[G/H] = \mathbb{C}[G]^H$ регулярных (т. е. полиномиальных) функций на G/H. Алгебра $\mathbb{C}[G/H]$ как векторное пространство над $\mathbb{C}$ разлагается в прямую сумму конечномерных G-инвариантных подпространств, в каждом из которых представление группы G неприводимо. Набор (с учётом кратностей) неприводимых представлений группы G, входящих в это разложение, не зависит от самого разложения и называется *спектром* представления ρ. Для каждого доминантного веса λ группы G обозначим через m_λ кратность вхождения в этот спектр неприводимого представления группы G со старшим весом λ. В силу двойственности Фробениуса для всех $\lambda \in \Lambda_+(G)$ справедливо неравенство $m_\lambda < \infty$. Ясно, что спектр представления ρ, а тогда и само представление ρ с точностью до изоморфизма, однозначно определяется числами m_λ. В контексте теории представлений алгебраических групп одной из основных задач гармонического анализа на однородном пространстве G/H является нахождение спектра представления ρ, т. е. нахождение чисел m_λ. Обозначим через $\Lambda_+(G/H)$ множество тех доминантных весов λ группы G, для которых $m_\lambda \geqslant 1$. Это множество является полугруппой (и даже моноидом), которая называется *полугруппой старших весов* однородного пространства G/H. Обозначим эту полугруппу через $\Lambda_+(G/H)$.

Полугруппа старших весов является важным инвариантом однородного пространства, однако в некоторых ситуациях она сообщает мало информации о нём. Например, для однородного пространства G/B имеем $\mathbb{C}[G/B] \simeq \mathbb{C}$, откуда вытекает, что $\Lambda_+(G/B) = \{0\}$. В подобных ситуациях оказывается полезным рассматривать естественное обобщение описанной выше задачи. А именно, таковым является задача о нахождении спектров представлений группы G в пространствах регулярных сечений однородных линейных расслоений над G/H.

Напомним, что однородные линейные расслоения над G/H находятся во взаимно однозначном соответствии с характерами группы H, множество которых обозначим через $\mathfrak{X}(H)$. А именно, характеру $\chi \in \mathfrak{X}(H)$ отвечает однородное линейное расслоение $L(\chi) = (G \times \mathbb{C}_\chi)/H$ над G/H, где H действует на G правыми сдвигами, а в пространстве $\mathbb{C}_\chi \simeq \mathbb{C}$ — при помощи характера χ. Слоем расслоения $L(\chi)$ над точкой eH является прямая $\mathbb{C}_\chi$. При каждом $\chi \in \mathfrak{X}(H)$ имеется естественный G-эквивариантный изоморфизм пространства $\Gamma(L(-\chi))$ регулярных сечений расслоения $L(-\chi)$ и пространства

$$V_\chi = \big\{ f \in \mathbb{C}[G] \mid f(gh) = \chi(h) f(g) \;\; \forall\, g \in G,\ \forall\, h \in H \big\} \subset \mathbb{C}[G].$$

При этом изоморфизме каждой функции $f \in V_\chi$ соответствует сечение $\gamma_f \in \Gamma(L(-\chi))$, задаваемое формулой $\gamma_f(gH) = [g, f(g)]$, где $[g, f(g)]$ — класс пары $(g, f(g))$ в $L(-\chi)$.

Обозначим через $\widehat{\Lambda}_+(G/H)$ множество пар (λ, χ), где $\lambda \in \Lambda_+(G)$, $\chi \in \mathfrak{X}(H)$, для которых неприводимое представление группы G со старшим весом λ реализуется в пространстве V_χ. Множество $\widehat{\Lambda}_+(G/H)$, так же как и множество $\Lambda_+(G/H)$, является полугруппой, которая называется *расширенной полугруппой старших весов* однородного пространства G/H. Поскольку пространство $V_0 \simeq \Gamma(L(0))$, отвечающее характеру $\chi = 0$, есть не что иное, как пространство $\mathbb{C}[G]^H = \mathbb{C}[G/H]$ регулярных функций на G/H, мы получаем следующую простую связь между полугруппами $\Lambda_+(G/H)$ и $\widehat{\Lambda}_+(G/H)$:

$$\Lambda_+(G/H) \simeq \{(\lambda, \chi) \in \widehat{\Lambda}_+(G/H) \mid \chi = 0\} \subset \widehat{\Lambda}_+(G/H).$$

В частности, если подгруппа H не имеет нетривиальных характеров, то имеем $\Lambda_+(G/H) \simeq \widehat{\Lambda}_+(G/H)$.

Одной из задач, рассматриваемых в диссертации, является вычисление (расширенных) полугрупп старших весов для важного класса однородных пространств — сферических однородных пространств.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Подгруппа $H \subset G$ называется *сферической* (однородное пространство G/H — *сферическим*), если для всякого однородного линейного расслоения L над G/H спектр представления группы G в пространстве регулярных сечений расслоения L прост.

Существует множество различных характеризаций сферических однородных пространств. Следующая характеризация является одной из важнейших и была получена Э. Б. Винбергом и Б. Н. Кимельфельдом[1] в 1978 г.

ТЕОРЕМА 1. *Для подгруппы $H \subset G$ следующие условия эквивалентны:*

(1) *H является сферической;*

(2) *борелевская подгруппа $B \subset G$ имеет открытую орбиту в G/H при действии левыми сдвигами.*

Если многообразие G/H квазиаффинно, каждое из условий (1), (2) *эквивалентно следующему:*

(3) *спектр представления группы G в пространстве $\mathbb{C}[G/H]$ регулярных функций на G/H прост.*

Известно, что сферичность однородного пространства G/H является локальным свойством, т. е. зависит только от касательных алгебр $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{h}$ групп G и H соответственно.

В качестве примеров сферических однородных пространств приведём (алгебраические) симметрические пространства, т. е. однородные пространства G/H, где H — подгруппа неподвижных точек нетривиального автоморфизма порядка 2 группы G, и (обобщённые) многообразия флагов G/P, где P — параболическая подгруппа группы G, т. е. подгруппа, содержащая некоторую борелевскую подгруппу группы G.

Теория сферических однородных пространств является одним из наиболее разработанных разделов теории алгебраических групп преобразований. Сферические однородные пространства интенсивно изучались многими авторами с различных точек зрения начиная с конца 70-х гг. XX века и продолжают активно изучаться в настоящее время. Обзор различных направлений исследования сферических однородных пространств, а также достигнутых по этим направлениям результатов можно найти в монографии Д. А. Тимашёва[2].

Коснёмся вопроса о классификации сферических однородных пространств. Прежде всего отметим, что классификация таких пространств легко сводится к случаю полупростой группы G, поскольку однородное пространство G/H является сферическим тогда и только тогда, когда таковым является однородное пространство $(G/Z)/(H/Z)$, где Z — центр

[1] Винберг Э. Б., Кимельфельд Б. Н., *Однородные области на флаговых многообразиях и сферические подгруппы полупростых групп Ли*, Функц. анализ и его прил., **12**:3 (1978), 12–19.

[2] Timashev D., *Homogeneous spaces and equivariant embeddings*, Encyclopaedia of Mathematical Sciences, **138**, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2011.

группы G. В диссертации существенно используется классификация всех с точностью до локального изоморфизма *аффинных* сферических однородных пространств G/H (т. е. таких, для которых подгруппа H редуктивна), где группа G полупроста. Эта классификация была получена в работах М. Кремера[3], И. В. Микитюка[4], М. Бриона[5] и О. С. Якимовой[6]. Чтобы сформулировать результаты этой классификации, нам потребуется ввести некоторые понятия.

Прямое произведение сферических однородных пространств

$$(G_1/H_1) \times (G_2/H_2) = (G_1 \times G_2)/(H_1 \times H_2)$$

также является сферическим однородным пространством. Пространства такого вида и локально изоморфные им называются *приводимыми*, а все остальные — *неприводимыми*. Сферическое пространство G/H называется *строго неприводимым*, если сферическое пространство $G/N_G(H)^0$ неприводимо ($N_G(H)^0$ — связная компонента единицы нормализатора группы H в G).

Теперь приведём результаты классификации всех с точностью до локального изоморфизма аффинных сферических однородных пространств. Все с точностью до локального изоморфизма однородные пространства G/H, где G — простая группа, H — её редуктивная сферическая подгруппа, найдены М. Кремером[3] в 1979 г.[7] Далее, И. В. Микитюком[4] в 1986 г. и, независимо, М. Брионом[5] в 1987 г. классифицированы все с точностью до локального изоморфизма строго неприводимые аффинные сферические однородные пространства непростых полупростых групп. Отметим, что все аффинные сферические однородные пространства простых групп являются строго неприводимыми, ввиду чего результаты Кремера, Бриона и Микитюка дают полный список всех с точностью до локального изоморфизма строго неприводимых аффинных сферических однородных пространств. Наконец, общая процедура, позволяющая строить произвольные аффинные сферические однородные пространства из строго неприводимых, в окончательной форме описана О. С. Якимовой[6] в 2002 г.

Из определения вытекает, что для сферического однородного пространства G/H спектры представлений группы G в пространствах регулярных

[3] Krämer M., *Sphärische Untergruppen in kompakten zusammenhängenden Liegruppen*, Compositio Math., **38**:2 (1979), 129–153.

[4] Микитюк И. В., *Об интегрируемости инвариантных гамильтоновых систем с однородными конфигурационными пространствами*, Матем. сб., **129(171)**:4 (1986), 514–534.

[5] Brion M., *Classification des espaces homogènes sphériques*, Compositio Math., **63**:2 (1987), 189–208.

[6] Якимова О. С., *Слабо симметрические пространства полупростых групп Ли*, Вестник Моск. Ун-та, сер. 1, матем., мех., **2** (2002), 57–60.

[7] На самом деле Кремером решена эквивалентная задача для компактных групп.

сечений всех однородных линейных расслоений над G/H однозначно определяются полугруппой $\widehat{\Lambda}_+(G/H)$. При этом спектр представления группы G в пространстве регулярных функций на G/H однозначно определяется полугруппой $\Lambda_+(G/H)$.

В связи со сказанным выше представляет интерес вычисление полугрупп старших весов и расширенных полугрупп старших весов для сферических однородных пространств. Перечислим известные на настоящий момент результаты по этому направлению. В случае симметрических пространств рассматриваемой проблемой занимался ещё Э. Картан[8], добившийся значительных продвижений в 1929 г. Окончательный результат вычисления полугрупп старших весов для односвязных симметрических пространств был впервые анонсирован М. Сугиурой[9] в 1962 г., однако доказательство так и не было им нигде опубликовано. Этот пробел был восполнен С. Хелгасоном[10] в 1970 г. Затем в 1979 г. М. Кремер[3] завершил вычисление полугрупп старших весов для всех односвязных аффинных сферических однородных пространств простых групп. Далее, насколько известно автору, расширенные полугруппы старших весов для всех односвязных строго неприводимых аффинных сферических однородных пространств непростых полупростых групп были вычислены Ю. В. Дзядыком в 1985 г. сразу же после того, как стал известен их полный список[11] (опубликованный позднее в работе И. В. Микитюка[4]). К сожалению, результаты Дзядыка до сих пор не опубликованы. Отметим (хотя этот момент пока не отражён в литературе), что полугруппу $\widehat{\Lambda}_+(G/H)$ несложно вычислить в случае, когда H — *орисферическая* подгруппа, т. е. подгруппа, содержащая некоторую максимальную унипотентную подгруппу группы G (в этой ситуации однородное пространство G/H также называется *орисферическим*).

Одной из целей диссертации является получение упомянутых выше неопубликованных результатов Дзядыка.

Отметим, что для произвольного (т. е. не обязательно сферического) однородного пространства G/H проблема вычисления спектра представления ρ или хотя бы полугруппы $\Lambda_+(G/H)$ весьма далека от своего решения. Среди частных случаев, для которых известен результат, отметим следующие два. Во-первых, хорошо известно (и несложно доказать), что для

[8] Cartan E. *Sur la determination d'un système orthogonal complet dans un espace de Riemann symétrique clos*, Rend. Circ. Mat. Palermo, **53** (1929), 217–252.

[9] Sugiura M., *Representations of compact groups realized by spherical functions on symmetric spaces*, Proc. Japan Acad., **38** (1962), 111–113.

[10] Helgason S., *A duality for symmetric spaces with applications to group representations*, Advances in Math. **5** (1970), 1-154.

[11] Об этом Дзядык сообщил Э. Б. Винбергу.

всякой унипотентной подгруппы $H \subset G$ полугруппа $\Lambda_+(G/H)$ совпадает с полугруппой $\Lambda_+(G)$ доминантных весов группы G. Во-вторых, Д. И. Панюшевым[12] вычислены полугруппы $\Lambda_+(G/H)$ для большинства аффинных однородных пространств G/H сложности 1, где группа G проста.

Далее предполагается, что группа G полупроста.

Пусть $\omega_1, \ldots, \omega_l$ — все фундаментальные веса группы G. Для каждого доминантного веса $\lambda = k_1\omega_1 + \ldots + k_l\omega_l$, где $k_i \in \mathbb{Z}$ и $k_i \geqslant 0$ при всех $i = 1, \ldots, l$, введём его *носитель* $\operatorname{Supp} \lambda = \{\omega_i \mid k_i > 0\}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Сферическая подгруппа $H \subset G$ называется *превосходной* (сферическое однородное пространство G/H — *превосходным*), если выполнены следующие два условия:

(1) многообразие G/H квазиаффинно;

(2) полугруппа $\Lambda_+(G/H)$ порождается весами $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ с условием $\operatorname{Supp} \lambda_i \cap \operatorname{Supp} \lambda_j = \varnothing$ при $i \neq j$.

В диссертации в основном рассматриваются редуктивные сферические подгруппы H. В силу сказанного выше для них условие (1) определения 2 выполнено автоматически.

Отметим также, что из условия (2) определения 2 следует свободность полугруппы $\Lambda_+(G/H)$.

К числу превосходных сферических однородных пространств относятся все односвязные (комплексные) симметрические пространства, а также большинство односвязных аффинных сферических однородных пространств G/H, где G проста. В качестве примера неаффинного превосходного сферического однородного пространства приведём пространство G/U, где G односвязна. Хорошо известно, что полугруппа $\Lambda_+(G/U)$ совпадает с полугруппой доминантных весов группы G.

Пусть $H \subset G$ — произвольная подгруппа, для которой алгебра $\mathbb{C}[G/H]$ конечно порождена (к числу таких подгрупп относятся все сферические подгруппы[13]). Как показано Дж. Хаджиевым[14], в этой ситуации алгебра ${}^U\mathbb{C}[G/H]$ тех функций на G/H, которые инвариантны относительно действия группы U на G/H левыми сдвигами, также конечно порождена. Рассмотрим соответствующие алгебрам $\mathbb{C}[G/H]$ и ${}^U\mathbb{C}[G/H]$ аффинные алгебраические многообразия $X = \operatorname{Spec} \mathbb{C}[G/H]$ и $Y = \operatorname{Spec} {}^U\mathbb{C}[G/H]$.

[12] Panyushev D., *Complexity of Quasiaffine Homogeneous Varieties, t-Decompositions, and Affine Homogeneous Spaces of Complexity* 1, Advances in Soviet Mathematics, **8** (1992), 151–166.

[13] Knop F., *Über Hilberts vierzehntes Problem für Varietäten mit Kompliziertheit eins*, Math. Z., **213**:1 (1993), 33–36.

[14] Хаджиев Дж., *Некоторые вопросы теории векторных инвариантов*, Матем. сб., **72(114)**:3 (1967), 420–435.

Отметим, что если многообразие G/H квазиаффинно, то оно естественным образом отождествляется с открытым подмножеством в X. Если G/H аффинно, то имеет место изоморфизм $G/H \simeq X$. Вложению алгебр ${}^U\mathbb{C}[G/H] \hookrightarrow \mathbb{C}[G/H]$ отвечает доминантный морфизм $\pi_U \colon X \to Y$ соответствующих алгебраических многообразий.

Если G/H — сферическое однородное пространство, то алгебра ${}^U\mathbb{C}[G/H]$ является полугрупповой алгеброй полугруппы $\Lambda_+(G/H)$ (В. Л. Попов[15]). Если при этом G/H превосходно, то из свободности полугруппы $\Lambda_+(G/H)$ вытекает свободность алгебры ${}^U\mathbb{C}[G/H]$, откуда следует, что $Y \simeq \mathbb{C}^r$, где r — ранг полугруппы $\Lambda_+(G/H)$.

Следующая теорема была доказана Д. И. Панюшевым[16] в 1999 г.[17]

ТЕОРЕМА 2. *Пусть G/H — квазиаффинное сферическое однородное пространство. Тогда:*

(а) *если G/H превосходно, то морфизм π_U равноразмерен;*

(б) *если $Y \simeq \mathbb{C}^r$ для некоторого r и подгруппа H содержит некоторую максимальную унипотентную подгруппу группы G, то верно и обратное к* (а) *утверждение.*

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Говоря о равноразмерности какого-либо морфизма, мы подразумеваем, что он сюръективен.

Теорема 2 устанавливает интересную связь между комбинаторными и геометрическими свойствами квазиаффинного сферического однородного пространства. Ввиду этой связи превосходные сферические однородные пространства и получили своё название в 2007 г., когда теорема 2 была независимо передоказана Э. Б. Винбергом и С. Г. Гиндикиным[18]. В диссертации получена классификация всех с точностью до изоморфизма превосходных аффинных сферических однородных пространств.

В связи с теоремой 2(а) представляет определённый интерес следующая

ГИПОТЕЗА 1. *Пусть G/H — квазиаффинное сферическое однородное пространство, морфизм π_U равноразмерен и $Y \simeq \mathbb{C}^r$ для некоторого r. Тогда G/H превосходно.*

Отметим, что в этой гипотезе условие $Y \simeq \mathbb{C}^r$ не является ограничитель-

[15] Попов В. Л., *Стягивания действий редуктивных алгебраических групп*, Матем. Сб., **130(172)**:3(7) (1986), 310–334.

[16] Panyushev D., *Parabolic subgroups with Abelian unipotent radical as a testing site for invariant theory*, Canad. J. Math., **51**:3 (1999), 616–635.

[17] На самом деле Панюшевым был доказан более общий факт, сформулированный в других терминах.

[18] Этот результат не опубликован.

ным, поскольку, как отмечалось выше, оно является необходимым условием превосходности сферического однородного пространства.

Как следует из теоремы 2(б), гипотеза 1 верна для сферических однородных пространств G/H, где подгруппа H содержит какую-либо максимальную унипотентную подгруппу группы G (напомним, что такие подгруппы H, так же как и соответствующие однородные пространства G/H, называются *орисферическими*). В диссертации доказывается, что эта гипотеза также верна для произвольных аффинных сферических однородных пространств.

Наряду с понятием превосходного сферического однородного пространства в диссертации вводится также понятие почти превосходного сферического однородного пространства.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Сферическая подгруппа $H \subset G$ называется *почти превосходной* (сферическое однородное пространство G/H — *почти превосходным*), если выполнены следующие два условия:

(1) многообразие G/H квазиаффинно;

(2) выпуклый конус $\mathbb{Q}_+\Lambda_+(G/H)$ (т. е. множество конечных линейных комбинаций элементов из $\Lambda_+(G/H)$ с неотрицательными рациональными коэффициентами) порождается (как выпуклый конус) весами $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ с условием $\operatorname{Supp}\lambda_i \cap \operatorname{Supp}\lambda_j = \varnothing$ при $i \neq j$.

Свойство почти превосходности сферического однородного пространства G/H, так же как и свойство сферичности однородного пространства, является локальным, т. е. зависит только от касательных алгебр $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{h}$. Таким образом, можно говорить о классах локального изоморфизма почти превосходных сферических однородных пространств.

Из определений 2 и 3 следует, что всякое превосходное сферическое однородное пространство G/H является почти превосходным. В диссертации доказывается, что для всякого почти превосходного сферического однородного пространства его односвязное накрывающее пространство превосходно.

Ввиду сказанного выше из теоремы 2 вытекает аналогичный результат для почти превосходных сферических однородных пространств:

СЛЕДСТВИЕ 1. *Пусть G/H — квазиаффинное сферическое однородное пространство. Тогда:*

(а) *если G/H почти превосходно, то морфизм π_U равноразмерен;*

(б) *если подгруппа H содержит некоторую максимальную унипотентную подгруппу группы G, то верно и обратное к* (а) *утверждение.*

Цель работы

Целью диссертации является решение следующих задач:

1. Вычислить расширенные полугруппы старших весов для всех односвязных строго неприводимых аффинных сферических однородных пространств непростых полупростых алгебраических групп.
2. Классифицировать все с точностью до изоморфизма превосходные аффинные сферические однородные пространства полупростых алгебраических групп.
3. Получить геометрическую характеризацию превосходных и почти превосходных аффинных сферических однородных пространств полупростых алгебраических групп.

Научная новизна

Результаты диссертации являются новыми и заключаются в следующем:

1. Вычислены расширенные полугруппы старших весов для всех односвязных строго неприводимых аффинных сферических однородных пространств непростых полупростых алгебраических групп, а также в каждом случае найдены старшие весовые функции, отвечающие неразложимым элементам этих полугрупп.
2. Классифицированы все с точностью до изоморфизма превосходные аффинные сферические однородные пространства полупростых алгебраических групп.
3. Получена геометрическая характеризация превосходных и почти превосходных аффинных сферических однородных пространств полупростых алгебраических групп.

Основные методы исследования

В диссертации используются методы алгебраической геометрии, теории представлений, теории алгебраических групп и теории инвариантов.

Теоретическая и практическая ценность работы

Полученные в диссертации результаты имеют теоретическое значение. Они могут найти применение в теории представлений, эквивариантной симплектической геометрии, теории алгебраических групп преобразований и теории инвариантов.

Апробация работы

Результаты диссертации докладывались:

- на семинаре «Алгебраические группы и теория инвариантов» механико-математического факультета МГУ (руководители — Э. Б. Винберг, Д. А. Тимашёв и И. В. Аржанцев), май 2007 г. и май 2008 г.
- на школе-конференции «Алгебры Ли, алгебраические группы и теория инвариантов» (Самара, Россия), июнь 2009 г.;
- на второй школе-конференции «Алгебры Ли, алгебраические группы и теория инвариантов» (Москва, Россия), февраль 2011 г.
- на семинаре профессора Х. Фленнера в Университете г. Бохум (Германия), апрель 2011 г.
- на международной конференции «Lie groups and algebraic groups» (Билефельд, Германия), июль 2011 г.

Публикации

Основные результаты диссертации опубликованы в четырёх работах автора. Список работ приводится в конце автореферата [1–4].

Структура и объём диссертации

Диссертация состоит из четырёх глав (первая из которых является вводной) и списка литературы. Главы разбиты на параграфы, параграфы — на пункты. Список литературы включает в себя 30 наименований. Общий объём диссертации составляет 75 страниц.

Краткое содержание работы

В **первой главе** (вводной) приводятся основные понятия, обсуждается история вопроса, формулируются основные результаты диссертации, а также освещается место полученных результатов в современной теории алгебраических групп преобразований.

Вторая глава посвящена вычислению расширенных полугрупп старших весов для всех односвязных строго неприводимых аффинных сферических однородных пространств непростых полупростых алгебраических групп. Для этой цели сначала в **§ 2.1** перечисляются некоторые свойства этих полугрупп, упрощающие вычисление последних. В частности, одно из важнейших свойств расширенной полугруппы старших весов односвязного сферического однородного пространства выражено в следующей теореме.

ТЕОРЕМА 3. *Если группа G односвязна, а подгруппа $H \subset G$ связна и сферична, то полугруппа $\widehat{\Lambda}_+(G/H)$ свободна.*

Доказательство этой теоремы практически повторяет доказательство предложения 2 работы Д. И. Панюшева[19], которое утверждает, что полугруппа $\Lambda_+(G/H)$ свободна в том случае, когда группа G односвязна, а подгруппа H не имеет нетривиальных характеров.

Непосредственно вычисление расширенных полугрупп старших весов осуществляется в два этапа. На первом этапе (**§ 2.2**) рассматриваются серии пространств $(\mathrm{SL}_n \times \mathrm{SL}_{n+1})/(\mathrm{SL}_n \times \mathbb{C}^\times)$ $(n \geqslant 2)$ и $(\mathrm{Spin}_n \times \mathrm{Spin}_{n+1})/\mathrm{Spin}_n$ $(n \geqslant 3)$, расширенные полугруппы старших весов которых удаётся вычислить, используя хорошо известные в теории представлений правила ветвления для специальной линейной и спинорной групп. Ранг расширенной полугруппы старших весов для пространств первой из упомянутых серий равен $2n$, для пространств второй серии он равен n. На втором этапе (**§ 2.3**) рассматриваются остальные серии пространств (6 серий). Для этих пространств G/H расширенные полугруппы старших весов вычисляются путём нахождения соответствующих им полугрупповых алгебр. Последние вычисляются при помощи известного в теории инвариантов метода сечений, основу которого составляет процесс приведения элемента g из некоторого плотного открытого подмножества $G_0 \subset G$ к «каноническому» виду при помощи действия группы $U \times H'$ (где U — максимальная унипотентная подгруппа группы G — действует левыми сдвигами, H' — коммутант группы H — действует правыми сдвигами).

[19] Panyushev D. I., *Complexity and rank of homogeneous spaces*, Geometriae Dedicata, **34**:3 (1990), 249–269.

Для всех однородных пространств, рассматриваемых на втором этапе, ранг расширенной полугруппы старших весов не превосходит шести.

Результаты вычисления расширенных полугрупп старших весов представлены в таблице 1.1 диссертации.

Основной целью **третьей главы** является получение классификации всех с точностью до изоморфизма превосходных аффинных сферических однородных пространств. Отправной точкой для достижения этой цели является приводимая в **§ 3.1** известная классификация всех с точностью до локального изоморфизма аффинных сферических однородных пространств. Важнейшим элементом этой классификации является общий метод построения произвольных аффинных сферических однородных пространств из строго неприводимых пространств указанного типа. Этот метод описан О. С. Якимовой[6]. В свою очередь, все с точностью до локального изоморфизма строго неприводимые аффинные сферические однородные пространства классифицированы (известен их полный список).

В **§ 3.2** доказываются следующие две теоремы.

ТЕОРЕМА 4. *Пусть G/H — почти превосходное сферическое однородное пространство. Тогда его односвязное накрывающее однородное пространство превосходно.*

ТЕОРЕМА 5. *Всякое превосходное аффинное сферическое однородное пространство является прямым произведением строго неприводимых превосходных аффинных сферических однородных пространств.*

Ввиду теоремы 5 классификация всех с точностью до изоморфизма превосходных аффинных сферических однородных пространств сводится к классификации строго неприводимых пространств указанного типа, каждое из которых, в свою очередь, по теореме 4 локально изоморфно односвязному строго неприводимому превосходному аффинному сферическому однородному пространству. Последние легко перечислить, исходя из следующих данных:

1) известен полный список односвязных строго неприводимых аффинных сферических однородных пространств;

2) для всех пространств из этого списка известны их полугруппы старших весов (вычисление которых завершено во второй главе диссертации).

Пусть G/H — односвязное строго неприводимое аффинное сферическое однородное пространство. В случае простой группы G это пространство превосходно за исключением случаев $G = \mathrm{SL}_{2n+1}, H = \mathbb{C}^\times \times \mathrm{Sp}_{2n}$ ($n \geqslant 2$) и $G = \mathrm{Spin}_{10}, H = \mathbb{C}^\times \times \mathrm{Spin}_7$. В случае непростой полупростой группы G, наоборот, это пространство не превосходно за исключением случаев $G = \mathrm{Sp}_{2n} \times \mathrm{Sp}_{2m}, H = \mathrm{Sp}_{2n-2} \times \mathrm{Sp}_2 \times \mathrm{Sp}_{2m-2}$ $(n, m \geqslant 1)$ и $G = L \times L, H = \operatorname{diag} L$ (где L — произвольная односвязная полупростая алгебраическая группа).

Полный список односвязных строго неприводимых аффинных сферических однородных пространств содержится в таблицах 1.2 и 1.3 диссертации.

Для завершения классификации превосходных аффинных сферических однородных пространств остаётся решить следующую задачу:

Для каждого известного односвязного строго неприводимого превосходного аффинного сферического однородного пространства найти все локально изоморфные ему однородные пространства, являющиеся превосходными.

Пусть G/H_0 — односвязное строго неприводимое превосходное аффинное сферическое однородное пространство. Без ограничения общности можно считать, что группа G односвязна, а подгруппа H_0 связна. Чтобы найти все превосходные аффинные сферические однородные пространства, локально изоморфные G/H_0, требуется решить следующие две подзадачи:

1) описать все конечные расширения подгруппы H_0 в G (т. е. такие подгруппы $H \subset G$, что $H^0 = H_0$;

2) среди всех конечных расширений подгруппы H_0 выбрать те, которые являются превосходными подгруппами в G.

В **§ 3.3** приводятся некоторые общие методы, позволяющие решить описанные выше подзадачи. Соответствующие вычисления для каждого односвязного строго неприводимого превосходного аффинного сферического однородного пространства осуществлены в **§ 3.4**.

Полный список неодносвязных строго неприводимых аффинных сферических однородных пространств приведён в таблице 1.4 диссертации. Среди этих пространств локально симметрическими являются пространства G/H следующего вида:

1) $G = \mathrm{SO}_8$, H — конечное расширение индекса 2 подгруппы $\mathrm{GL}_4 \subset G$;

2) $G = \mathrm{SO}_{n+m}$, $H = \mathrm{S}(\mathrm{O}_n \times \mathrm{O}_m)$, $n > m \geqslant 1$;

3) $G = \mathrm{Sp}_8$, H — конечное расширение индекса 2 подгруппы $\mathrm{Sp}_4 \times \mathrm{Sp}_4 \subset G$;

4) $G = \mathrm{SO}_{2n+1} \times \mathrm{SO}_{2n+1}$, $H = \operatorname{diag} \mathrm{SO}_{2n+1}$, $n \geqslant 1$.

Четвёртая глава посвящена обращению теоремы 2 и следствия 1 в случае аффинных сферических однородных пространств. Основным результатом главы является

ТЕОРЕМА 6. *Пусть G/H — аффинное сферическое однородное про-*

странство. Тогда:

(а) *если морфизм* π_U *равноразмерен, то* G/H *почти превосходно;*

(б) *если морфизм* π_U *равноразмерен и* $Y \simeq \mathbb{C}^r$ *для некоторого* r, *то* G/H *превосходно.*

Таким образом, гипотеза 1 оказывается верна не только для квазиаффинных орисферических однородных пространств (см. теорему 2(б)), но также и для аффинных сферических однородных пространств.

Из теоремы 2(а), следствия 1(а) и теоремы 6 вытекает следующая геометрическая характеризация превосходных и почти превосходных аффинных сферических однородных пространств.

СЛЕДСТВИЕ 2. *Пусть* G/H *— аффинное сферическое однородное пространство. Тогда:*

(а) G/H *почти превосходно тогда и только тогда, когда морфизм* π_U *равноразмерен;*

(б) G/H *превосходно тогда и только тогда, когда морфизм* π_U *равноразмерен и* $Y \simeq \mathbb{C}^r$ *для некоторого* r.

В **§ 4.1** доказательство теоремы 6 сводится к доказательству следующей теоремы.

ТЕОРЕМА 7. *Пусть* G/H *— односвязное аффинное сферическое однородное пространство, для которого морфизм* π_U *равноразмерен. Тогда* G/H *превосходно.*

В **§ 4.2** формулируются и доказываются вспомогательные результаты, необходимые для доказательства теоремы 7. А именно, сначала доказывается, что при некоторых ограничениях на однородное пространство G/H нулевой слой морфизма π_U непуст. Затем рассматриваются симметричные линейные действия торов и устанавливаются некоторые их свойства.

Наконец, **§ 4.3** посвящён доказательству теоремы 7, которое осуществляется в два этапа. На первом этапе доказательство сводится к случаю строго неприводимых пространств. На втором этапе перебираются все односвязные строго неприводимые аффинные сферические однородные пространства, не являющиеся превосходными, и для каждого из них проверяется, что морфизм π_U не равноразмерен.

Благодарности

Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю профессору Э. Б. Винбергу за постановку задач, многочисленные обсуждения и постоянное внимание к работе. Автор благодарит также весь коллектив кафедры высшей алгебры механико-математического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова за творческую атмосферу, способствовавшую научной работе.

Публикации автора по теме диссертации

[1] Авдеев Р. С., *Расширенные полугруппы старших весов аффинных сферических однородных пространств непростых полупростых алгебраических групп*, Изв. РАН. Сер. матем., **74**:6 (2010), 3–26.

[2] Авдеев Р. С., *Превосходные аффинные сферические однородные пространства полупростых алгебраических групп*, Труды Моск. матем. общ-ва, **71** (2010), 235–269.

[3] Авдеев Р. С., *Превосходные аффинные сферические однородные пространства полупростых алгебраических групп*, Летняя школа-конференция "Алгебры Ли, алгебраические группы и теория инвариантов". Самара, Россия, 8–15 июня 2009 г. Тезисы докладов. Самара: Изд-во "Универс групп", 2009, 3–4.

[4] Авдеев Р. С., *Геометрическая характеризация превосходности аффинного сферического однородного пространства*, Вторая школа-конференция "Алгебры Ли, алгебраические группы и теория инвариантов". Москва, Россия, 31 января – 5 февраля 2011 г. Тезисы докладов. Москва: Изд-во "Ол Би Принт", 2011, 5–6.