МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М. В. Ломоносова

На правах рукописи

УДК 512.554

Чеповский Александр Андреевич

Примитивные элементы алгебр шрайеровых многообразий.

Специальность 01.01.06 — математическая логика, алгебра и теория чисел

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва
2011

Работа выполнена на кафедре Высшей алгебры Механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова.

Научные руководители:	доктор физико-математических наук, профессор Михалёв Александр Васильевич доктор физико-математических наук, профессор Михалёв Александр Александрович
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, профессор Туганбаев Аскар Аканович доктор физико-математических наук, профессор Кожухов Игорь Борисович
Ведущая организация:	Тульский государственный педагогический университет имени Л.Н.Толстого

Защита диссертации состоится 25 ноября 2011 года в 16 часов 45 минут на заседании диссертационного совета Д.501.001.84 при Московском государственном университете имени М. В. Ломоносова по адресу: Р.Ф., 119991, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д. 1, МГУ, Механико-математический факультет, аудитория 14-08.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Механико-математического факультета МГУ (Главное здание, 14 этаж).

Автореферат разослан 25 октября 2011 года.

Ученый секретарь диссертационного
совета Д.501.001.84 при МГУ,
доктор физико-математических
наук, профессор А. О. Иванов

Общая характеристика работы

Актуальность темы.

Многообразие линейных алгебр над полем определяется как класс алгебр, замкнутых относительно взятия подалгебр, гомоморфных образов и прямых произведений. Многообразие алгебр называется шрайеровым, если любая подалгебра свободной алгебры этого многообразия является свободной (в том же многообразии алгебр). Понятие шрайерова многообразия возникло в теории групп: в 1920 - х годах Нильсен[1] и Шрайер[2] доказали, что любая подгруппа свободной группы свободна. А. Г. Курош[3] доказал, что подалгебры свободных неассоциативных алгебр свободны. А. И. Ширшов[4] показал, что многообразие всех алгебр Ли является шрайеровым (этот результат был получен и Виттом[5], где также было доказано, что многообразие всех $p-$ алгебр Ли является шрайеровым).

А. И. Ширшов[6] показал, что подалгебры свободных неассоциативных коммутативных и свободных неассоциативных антикоммутативных алгебр свободны. Таким образом, многообразие всех коммутативных алгебр (всех антикоммутативных алгебр) является шрайеровым. А. А. Михалёв[7] и А. С. Штерн[8] показали, что многообразие супералгебр Ли является шрайеровым. А. А. Михалёв[9] получил этот результат для цветных $p-$ супералгебр Ли. А. И. Корепанов[10] доказал, что подалгебры свободных суперкоммутативных неассоциативных алгебр свободны. В. К. Харченко[11] получил обобщение теоремы Ширшова – Витта о подалгебрах свободных алгебр Ли для алгебр Хопфа над полем нулевой характеристики с косым копроизведением. У. У. Умирбаев и И. П. Шестаков[12] доказали, что подалгебры свободных алгебр Акивиса свободны.

---

[1] Nielsen J., *Die Isomorphismengruppe der freien Gruppe.* Math. Ann., B. 91, S. 169—209, (1924).

[2] Schreier O., *Die Untergruppen der freien Gruppen* Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg., B. 5. S. 161—183, (1927).

[3] Курош А. Г., *Неассоциативные свободные алгебры и свободные произведения алгебр.* Мат. Сб., 20, С. 239–262, (1947).

[4] Ширшов А. И., *Подалгебры свободных лиевых алгебр.* . Мат. сб., Т. 33, №2, С. 441–452, (1953).

[5] Witt E. *Die Unterringe der freien Lieschen Ringe.* Math. Z., B. 64., S. 195—216, (1956).

[6] Ширшов А. И., *Подалгебры свободных коммутативных и свободных антикоммутативных алгебр* . Мат. Сб., 34, С. 81–88, (1954).

[7] Михалёв А. А., *Подалгебры свободных цветных супералгебр Ли.* Мат. заметки, Т. 37, №5, С. 653–661, (1985).

[8] Штерн А. С., *Свободные супералгебры Ли* . Сиб. мат. журн., Т. 27, №1, С. 170–174, (1986).

[9] Михалёв А. А., *Подалгебры свободных $p-$ супералгебр Ли* . Мат. заметки, Т. 43, №2, С. 178–191, (1988).

[10] Корепанов А. И., *Свободные неассоциативные суперкоммутативные алгебры.* Фундамент.и прикл. мат., Т. 9, №3, С. 103–109, (2003).

[11] Kharchenko V. K., *Braided version of Shirshov-Witt theorem.*, J.Algebra, vol. 294, №1, P. 196–225, (2005).

[12] Shestakov I. P., Umirbaev U. U., *Free Akivis algebras, primitive elements, and hyperalgebras.* J. Algebra, vol 250, P. 533–548, (2002).

У. У. Умирбаев[13,14] получил необходимые и достаточные условия для того, чтобы многообразие алгебр было шрайеровым, и построил новые примеры шрайеровых многообразий. Подалгебры свободных алгебр многообразий линейных $\Omega-$ алгебр рассматривались в различных работах[15,16,17], шрайеровы многообразия $n-$ лиевых алгебр описаны Ю. А. Кашиной[18], шрайеровы многообразия тернарных алгебр изучались А. Д Уадиловой.[19]

Группы автоморфизмов конечного ранга свободных алгебр порождены элементарными автоморфизмами (для алгебр Ли этот результат был получен П. Коном[20], а для свободных алгебр шрайеровых многообразий конечного ранга любых однородных шрайеровых многообразий — Ж. Левином[21]). У. У. Умирбаев[22] получил описание группы автоморфизмов свободной алгебры конечного ранга шрайерова многообразия алгебр в терминах образующих и определяющих соотношений.

Подмножество M ненулевых элементов свободной алгебры A шрайерового многообразия называется примитивной системой элементов, если существует множество свободных образующих алгебры A, содержащее подмножество M. Критерии распознавания примитивных систем элементов для свободных $p-$ супералгебр Ли были получены А. А. Золотых и А. А Михалёвым[23,24], для свободных неассоциативных алгебр — А. А Михалёвым, У. У. Умирбаевым и J.-T. Yu[25].

[13]Umirbaev U. U. *Universal derivations and subalgebras of free algebras.* Algebra (Krasnoyarsk, 1993). Berlin: Walter de Gruyter, P. 255—271, (1996).

[14]Умирбаев У. У., *О шрейреровых многообразиях алгебр* . Алгебра и Логика, 33, №3, С. 317–340, (1994).

[15]Баранович Т. М., Бургин М. С., *Линейные $\Omega-$ алгебры.* Успехи мат. наук., Т. 30, №4, С. 61–106, (1975).

[16]Бургин М. С., *Шрайеровы многоообразия линейных $\Omega-$ алгебр.* Мат. сб., Т. 93(135), №4, С. 554–572, (1974).

[17]Артамонов В. А., Бургин М. С., *Некоторые свойства подалгебр в многообразиях линейных $\Omega-$ алгебр.* Мат. сб., Т. 87, №1, С. 67–82, (1972).

[18]Кашина Ю. А., *Шрайеровы многообразия $n-$ лиевых алгебр.* Сиб. мат. журн., Т. 32, №2, С. 197–199, (1991).

[19]Уадилова А. Д., *Перечисление тернарных алгебр и деревьев: Автореферат. канд. физ-мат. наук.* УлГУ, (2008).

[20]Cohn P. M. *Subalgebras of free associative algebras* Proc. London Math. Soc. (3)., Vol. 14. P. 618— 632, (1964).

[21]Lewin J., *On Schreier varieties of linear algebras.* Trans. Amer. Math. Soc., Vol. 132., P. 553—562, (1968).

[22]Umirbaev U. U., *Defining relations for automorphism groups of free algebras.*, J. Algebra, vol. 314, №1, P. 209–225, (2007).

[23]Золотых А. А., Михалёв А. А., *Ранг элемента свободной цветной ($p-$)супералгебры Ли.* Доклады Академии Наук, 334, №6, С. 690–693, (1994).

[24]Mikhalev A. A. and Zolotykh A. A., *Rank and primitivity of elements of free colour Lie (p-)superalgebras* . Intern. J. Algebra Comput., 4, P. 617–656, (1994).

[25]Mikhalev A. A., Umirbaev U. U., and J.-T. Yu, *Automorphic orbits of elements of free non-associative algebras* . J. Algebra, 243, P. 198–223, (2001).

Цель работы

Целью работы является построение и реализация алгоритмов распознавания и дополнения примитивных систем элементов свободных алгебр основных типов шрайеровых многообразий, а также подсчет числа примитивных элементов данной степени в свободных алгебрах основных типов шрайеровых многообразий над конечными полями.

Научная новизна

Основные результаты диссертации:

1. Обоснованы, построены и реализованы усовершенствованные алгоритм реализации ранга однородного элемента свободной неассоциативной алгебры, алгоритм реализации ранга элемента свободной неассоциативной алгебры, алгоритм реализации ранга системы элементов свободной неассоциативной алгебры.

2. Построен и реализован алгоритм дополнения системы примитивных элементов свободной неассоциативной алгебры. Доказана правильность работы построенного алгоритма.

3. Обоснованы, построены и реализованы усовершенствованные алгоритм реализации ранга однородных элементов свободной коммутативной неассоциативной алгебры и свободной антикоммутативной неассоциативной алгебры, алгоритм реализации ранга элементов свободной коммутативной неассоциативной алгебры и свободной антикоммутативной неассоциативной алгебры, алгоритм реализации ранга системы элементов свободной коммутативной неассоциативной алгебры и свободной антикоммутативной неассоциативной алгебры.

4. Построен и реализован алгоритм дополнения систем примитивных элементов свободной коммутативной неассоциативной алгебры и свободной антикоммутативной неассоциативной алгебры. Доказана правильность работы построенного алгоритма.

5. Найдено число примитивных элементов степеней 1, 2 и 3 для свободных неассоциативных алгебр над конечным полем. Получена оценка для этих величин через число автоморфизмов.

Методы исследования

В работе применяется техника свободного дифференциального исчисления, методы теории неассоциативных алгебр, методы компьютерной алгебры, используются методы работы с примитивными системами элементов.

Теоретическая и практическая ценность работы

Диссертация имеет как теоретический, так и прикладной характер. Результаты работы позволяют алгоритмически решать задачи реализации ранга и поиска дополнения к системам примитивных элементов в свободных неассоциативных и свободных (анти)коммутативных неассоциативных алгебрах.

Апробация работы

Результаты диссертации докладывались:

- на научно-исследовательском семинаре кафедры Высшей алгебры МГУ;
- на семинаре «Избранные вопросы алгебры» кафедры Высшей алгебры МГУ;
- на V всероссийской конференции студентов, аспирантов и молодых ученых «Технологии Microsoft в теории и практике программирования», Москва, 2008г.;
- на международной алгебраической конференции, посвященной 100-летию со дня рождения А. Г. Куроша, МГУ, 2008г.;
- на Мальцевских чтениях в г. Новосибирск, 2009г.;
- на международном алгебраическом симпозиуме, посвященном 80-летию кафедры высшей алгебры механико-математического факультета МГУ и 70-летию профессора А. В. Михалева, МГУ, 2010г.;

Публикации

Результаты автора по теме диссертации опубликованы в 4 работах, список которых приводится в конце библиографии.

Структура и объем диссертации

Диссертационная работа состоит из 4 глав (первая из которых является вводной), заключения и библиографии (38 наименований). Общий объем диссертации составляет 65 страниц. Структура работы отражена в оглавлении.

Краткое содержание работы

В **первой главе**, которая является вводной, даётся краткий исторический обзор и формулируются основные результаты диссертации.

Во **второй главе** приводятся необходимые понятия и обозначения. Пусть F — поле, причем $char(F) \neq 2$, $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ — множество свободных порождающих, $\Gamma(X)$ — свободный группоид неассоциативных одночленов без едининичного элемента в алфавите X: $X \subset \Gamma(X)$; если $u, v \in \Gamma(X)$, то $u \cdot v \in \Gamma(X)$, где $u \cdot v$ — формальное умножение неассоциативных одночленов.

Рассмотрим линейное пространство $F(X)$ над F с базисом, состоящим из 1 и элементов множества $\Gamma(X)$, где задано умножение

$$(\alpha a) \cdot (\beta b) = (\alpha\beta)(a \cdot b)$$

$\alpha, \beta \in F, a, b \in \Gamma(X)$. Тогда $F(X)$ — свободная неассоциативная алгебра. А. Г. Курош[26] доказал, что подалгебры свободных неассоциативных алгебр свободны.

Пусть $W_0 = \Gamma(X)$, $A = F(X)$. Тогда $U(A)$, универсальная мультипликативная обёртывающая алгебра алгебры A, — свободная ассоциативная алгебра с множеством свободных порождающих $S_0 = \{r_w, l_w | w \in W_0\}$, где l_w и r_w — универсальные операторы умножения слева и справа соответственно:

$$b \cdot l_a = ab,\ b \cdot r_a = ba$$

Рассмотрим I — двусторонний идеал свободной неассоциативной алгебры $F(X)$, порожденный множеством $\{ab - ba | a, b \in F(X)\}$. Тогда факторалгебра $A = F(X)/I$ — свободная коммутативная неассоциативная алгебра с множеством свободных порождающих X.

Считаем, что группоид $\Gamma(X)$ вполне упорядочен так, что $a > b$ для $a, b \in \Gamma(X)$, если степень элемента a больше степени элемента b. Построим индуктивно множество W_1 всех коммутативных правильных неассоциативных одночленов без единичного элемента в алфавите X. А именно: $X \subset W_1$ и $w \in W_1$, если $w = uv$ (где u и v — коммутативные правильные одночлены) и выполнено, что $u \leqslant v$.

Тогда смежные классы с представителями из множества W_1 образуют линейный базис факторалгебры $A = F(X)/I$, а $U(A)$, универсальная мультипликативная обёртывающая алгебра алгебры A, — свободная ассоциативная алгебра с множеством свободных порождающих $S_1 = \{r_w | w \in W_1\}$. А. И. Ширшов[27] доказал, что подалгебры свободных коммутативных неассоциативных алгебр свободны.

Рассмотрим J — двусторонний идеал свободной неассоциативной алгебры $F^+(X)$ без единицы, порожденный множеством $\{aa | a \in F(X)\}$. Тогда факторалгебра $A = F^+(X)/J$ — свободная антикоммутативная неассоциативная алгебра с множеством X свободных порождающих.

[26]Курош А. Г., *Неассоциативные свободные алгебры и свободные произведения алгебр.* Мат. Сб., 20, С. 239–262, (1947).

[27]Ширшов А. И., *Подалгебры свободных коммутативных и свободных антикоммутативных алгебр* . Мат. Сб., 34, С. 81–88, (1954).

Строим индуктивно множество W_2 всех антикоммутативных правильных неассоциативных одночленов без единичного элемента в алфавите X: $X \subset W_2$ и $w \in W_2$, если $w = uv$ (где u и v — антикоммутативные правильные одночлены) и выполнено, $u < v$.

Тогда смежные классы с представителями из множества W_2 образуют линейный базис факторалгебры $A = F^+(X)/J$, а $U(A)$, универсальная мультипликативная обёртывающая алгебра алгебры A, является свободной ассоциативной алгеброй с множеством свободных порождающих $S_2 = \{r_w | w \in W_2\}$. А. И. Ширшов [28] доказал, что подалгебры свободных антикоммутативных неассоциативных алгебр свободны.

Далее под A понимается одна из рассмотренных выше алгебр $F(X)$, $F(X)/I$, $F^+(X)/J$. А под линейным базисом алгебры A и множеством свободных порождающих алгебры $U(A)$ понимаются соответственно W_i и S_i.

Пусть I_A — свободный правый $U(A)$-модуль с базисом $y_1, \ldots, y_n$,

$$I_A = y_1 U(A) \oplus \ldots \oplus y_n U(A).$$

Линейное отображение $\mathcal{D} : A \to I_A$, заданное формулами

$$\begin{aligned} &\mathcal{D}(x_i) = y_i, \quad i = 1, \ldots, n, \\ &\mathcal{D}(ab) = \mathcal{D}(a) r_b + \mathcal{D}(b) l_a, \end{aligned}$$

где $a, b \in A$, является универсальным дифференцированием алгебры A. Частные прроизводные $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ элемента $f \in A$ однозначно определяются соотношением

$$\mathcal{D}(f) = \sum_{i=1}^{n} y_i \frac{\partial f}{\partial x_i}.$$

Система элементов алгебры A называется примитивной, если она является подмножеством некоторой системы свободных порождающих в A. Рангом множества $H \subset A$ (обозначение: $\mathrm{rank}(H)$) называется минимальное число порождающих из X, от которого может зависеть образ $\varphi(H)$ при автоморфизме $\varphi \in Aut(A)$.

Далее сформулированы и доказаны:

Алгоритм реализации ранга однородного элемента (Алгоритм А). Пусть μ — функционал и a — μ-однородный элемент алгебры A. Строится такой μ-однородный автоморфизм φ алгебры A, что элемент $\varphi(a)$ зависит от $k = \mathrm{rank}(a)$ порождающих из X.

[28] Ширшов А. И., *Подалгебры свободных коммутативных и свободных антикоммутативных алгебр* . Мат. Сб., 34, С. 81–88, (1954).

Алгоритм реализации ранга элемента (Алгоритм Б) Пусть $a \in A$. Строится такой автоморфизм φ алгебры A, что элемент $\varphi(a)$ зависит от $k =\mathrm{rank}(a)$ порождающих из X.

Алгоритм реализации ранга системы элементов (Алгоритм В) Пусть $a_1, \dots, a_r \in A$. Строится такой автоморфизм φ алгебры A, что система элементов $\{\varphi(a_1), \dots, \varphi(a_r)\}$ зависит от $k =\mathrm{rank}(\{a_1, \dots, a_r\})$ порождающих из X.

Алгоритм дополнения примитивной системы элементов до множества свободных образующих (Алгоритм Д). Пусть $\{a_1, \dots, a_r\}$ — примитивная система элементов алгебры A. Строится такой рекурсивный автоморфизм φ алгебры A, что $\varphi(a_i) \in X,\ i = 1, \dots, r$, предполагая, что у нас есть такой автоморфизм для любой примитивной системы, состоящей менее чем из r элементов.

Третья глава посвящена конструктивным алгоритмам, основанным на алгоритмах из второй главы, описаны некоторые особенности реализации данных алгоритмов. Описаны:

Алгоритм проверки примитивности элемента (Алгоритм 1), основанный на виде канонического базиса левого идеала.

Вспомогательный алгоритм для ω-однородного элемента (Алгоритм 2), основанный на алгоритме Б.

Алгоритм поиска дополнения (Алгоритм 3). Каждый шаг этого алгоритма заключается в выделении старшей однородной (по текущему линейному функционалу) компоненты и построении такого автоморфизма алгебры A, что данная компонента зависит от меньшего числа канонических образующих x_i. Затем, происходит изменение линейного функционала с целью выделения новой старшей однородной компоненты и построения нового автоморфизма. В итоге, композиция данных автоморфизмов переводит исходный элемент в один из канонических образующих. Применив к остальным каноническим образующим алгебры A автоморфизм, обратный к этой композиции, находится дополнение исходного элемента до множества свободных порождающих.

Далее в этой главе приведены примеры применений алгоритмов в конкретных случаях.

Четвертая глава посвящена подсчету количества примитивных элементов в неассоциативных алгебрах над конечным полем. Пусть F_q — конечное поле, $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ — множество свободных порождающих. Пусть $l(u)$ — максимальная длина неассоцииативного одночлена в многочлене $u \in A$. Число примитивных элементов h с $l(h) = l$ в свободной неассоциативной алгебре $A = F(X)$, обозначим через $S_n^q(l)$. С помощью техники свободного дифференциального исчисления получены критерии примитивности элемента свободной неассоциативной алгебры $F_q(X)$ для $n = 2$ и $l = 2, 3$. Доказано, что $S_2^q(2) = (q-1)^2(q^2+q)$ и $S_2^q(3) = q^2(q-1)^2(q+1)^2$. В конце главы, используя вид элементарных автоморфизмов, для случая $l = 3$ получена верхняя оценка $S_2^q(3) \leqslant q^2(q-1)^2(q+1)((q-1)^2+2)$.

Благодарности

Автор благодарит д.ф-м.н., профессора механико-математического факультета МГУ Александра Васильевича Михалёва и д.ф-м.н., профессора механико-математического факультета МГУ Александра Александровича Михалёва за помощь в выборе темы исследования, внимательное руководство в процессе исследовательской деятельности и поддержку.

Работы автора по теме диссертации

[1] Чеповский А. А. *Число примитивных элементов длины 1 и 2 в свободных неассоциативных алгебрах над конечным полем* . Вестник Новосиб. гос. ун-та. Серия: Математика, механика, информатика., Т. 11, вып. 2, стр. 119–122, (2011).

[2] Михалёв А. А., Михалёв А. В., Чеповский А. А. *Примитивные элементы свободных коммутативных и антикоммутативных неассоциативных алгебр*. Вестник Новосиб. гос. ун-та. Серия: Математика, механика, информатика., Т. 10, вып. 4, стр. 62–81, (2010).

В данной работе Чеповскому А.А. принадлежит построение и реализация конструктивного алгоритма реализации ранга примитивных элементов свободной неассоциативной коммутативной и свободной неассоциативной антикоммутативной алгебр, конструктивного алгоритма реализации ранга системы элементов свободной неассоциативной коммутативной и свободной неассоциативной антикоммутативной алгебр, конструктивного алгоритма дополнения примитивной системы элементов свободной неассоциативной коммутативной и свободной неассоциативной антикоммутативной алгебр. В диссертацию вошли результаты, принадлежащие лично автору.

[3] Михалёв А. А., Михалёв А. В., Чеповский А. А., Шампаньер К. *Примитивные элементы свободных неассоциативных алгебр.*. Фундаментальная и Прикладная математика, 13, №5, 171–192, (2007).

В данной работе Чеповскому А.А. принадлежит построение и реализация конструктивного алгоритма реализации ранга примитивного элемента свободной неассоциативной алгебры, конструктивного алгоритма реализации ранга системы элементов свободной неассоциативной алгебры, конструктивного алгоритма дополнения примитивной системы элементов свободной неассоциативной алгебры. В диссертацию вошли результаты, принадлежащие лично автору.

Перевод: Mikhalev A. A., Mikhalev A. V., Chepovskiy A. A., Champagnier K. *Primitive elements of free nonassociative algebras.* Journal of Mathematical Sciences, vol.156 no. 2 (2009), pp. 320–335.

[4] Чеповский А. А. *Алгоритмы дополнения примитивных систем свободных неассоциативных алгебр до свободных порождающих множеств.*. Труды V Всероссийской конференции студентов, аспирантов и молодых ученых «Технологии Microsoft в теории и практике программирования», М.: Вузовская книга, стр. 125–126, (2008).