Московский государственный университет
имени М.В. Ломоносова
Механико-математический факультет

На правах рукописи
УДК 511.34

Снурницын Павел Владимирович

Базисные свойства функции Рамануджана

01.01.06 — математическая логика, алгебра и теория чисел

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва — 2011

Работа выполнена на кафедре математического анализа Механико-математического факультета Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова.

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук, профессор Архипов Геннадий Иванович
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, профессор Добровольский Николай Михайлович
	кандидат физико-математических наук, доцент Авдеев Иван Фёдорович
Ведущая организация:	Московский педагогический государственный университет

Защита диссертации состоится 25 ноября 2011 г. в 16 ч. 45 м. на заседании диссертационного совета Д.501.001.84 при Московском государственном университете имени М.В. Ломоносова по адресу: 119991, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д.1, МГУ, Механико-математический факультет, аудитория 14-08.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Механико-математического факультета МГУ (Главное здание, 14 этаж)

Автореферат разослан 25 октября 2011 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
Д.501.001.84 при МГУ
доктор физико-математических наук,
профессор

А.О. Иванов

Общая характеристика работы

Актуальность темы

Диссертация является исследованием в области аналитической теории чисел. С помощью модификации кругового метода в форме Виноградова получены результаты относительно базисных свойств множества значений функции Рамануджана.

Задачи изучения базисных свойств множеств арифметической природы относятся к области аддитивной теории чисел. Пусть $A \subset \mathbb{Z}$. Будем говорить, что множество A является базисом порядка не более чем k множества $\mathbb{Z}$, если каждое число $N \in \mathbb{Z}$ можно представить в виде суммы не более чем k слагаемых из множества A. Множество A будем называть базисом порядка не более чем k для достаточно больших чисел, если существует такое N_0, что каждое число $N \in \mathbb{Z}$ такое, что $|N| > N_0$, представляется в виде суммы не более чем k слагаемых из A. Аналогично определяется порядок базиса для множества $\mathbb{N}$. В тех случаях, когда не удается установить точный порядок базиса, ставится вопрос об установлении верхней границы для порядка базиса. В задачах о базисных свойствах конкретных множеств играет важную роль вопрос о связи аддитивной и мультипликативной структурах натурального ряда.

Классическими примерами аддитивных задач являются проблема Гольдбаха, проблема Варинга и проблема Варинга–Гольдбаха.

В 1742 г. К. Гольдбах выдвинул предположение о представимости целых чисел в виде суммы простых чисел. В современной постановке гипотеза Гольдбаха может быть сформулирована следующим образом: каждое достаточно большое четное число N представимо в виде суммы двух простых чисел, каждое достаточно большое нечетное число N представимо в виде суммы трех простых чисел. Эти утверждения принято называть бинарной и тернарной проблемами Гольдбаха соответственно. В 1923 г. Г.Х. Харди и Дж.И. Литтлвуд[1,2], используя круговой метод, доказали в предположении обобщенной гипотезы Римана, что каждое достаточно большое нечетное число представимо в виде суммы трех простых чисел. В 1937 г. И.М. Виноградов [3] дал новое безусловное решение тернарной проблемы Гольдбаха.

[1] G.H. Hardy, J.E. Littlewood, *"Some problems of "Partitio Numerorum". III. On the expression of a number as a sum of primes"*, Acta Math., **44** (1923), 1–70.

[2] G.H. Hardy, J.E. Littlewood, *"Some problems of "Partitio Numerorum". V. A further contribution to the study of Goldbach's problem"*, Proc. London Math. Soc. (2), **22** (1923), 46–56.

[3] И.М. Виноградов, *"Представление нечетного числа суммой трех простых чисел"*, Докл. АН СССР., **15**:6 (1937), 291–294.

Отметим, что для числа представлений N в виде суммы трех простых слагаемых справедлива асимптотическая формула

$$I(N) \sim \frac{N^2}{2(\log N)^3}\mathfrak{S}(N),$$

где $\mathfrak{S}(N)$ — особый ряд проблемы Гольдбаха, при этом $\mathfrak{S}(N) > 0$.

В 1770 г. Э. Варинг выдвинул гипотезу, являющуюся обобщением теоремы Лагранжа о четырех квадратах. Проблема Варинга может быть сформулирована следующим образом: каждое достаточно большое натуральное число N может быть представлено в виде

$$N = x_1^n + x_2^n + \cdots + x_r^n,$$

где $x_1, x_2, \ldots, x_r \in \mathbb{N}$ и $r \leqslant G(n)$, то есть множество n-ых степеней образует базис для достаточно больших чисел порядка не более чем $G(n)$. В такой постановке важным является вопрос об установлении верхней оценки величины $G(n)$ как функции от n. В 1909 г. Д. Гильберт [4] доказал существование $G(n)$ в проблеме Варинга. Используя круговой метод, Г.Х. Харди и Дж.И. Литтлвуд получили следующую асимптотическую формулу для числа представлений N в виде суммы n-ых степеней

$$I(N) \sim \frac{\Gamma\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^r}{\Gamma\left(\dfrac{r}{n}\right)}\mathfrak{S}(N)N^{\frac{r}{n}-1},$$

где $r > (n-2)2^{n-1} + 5$, $\mathfrak{S}(N)$ — особый ряд проблемы Варинга, причем $\mathfrak{S}(N) > 0$. Отсюда также следует оценка для $G(n)$:

$$G(n) \leqslant (n-2)2^{n-1} + 5.$$

В 1934–1935 гг. И.М. Виноградов [5,6] получил значительные улучшения в асимптотической формуле и оценке $G(n)$, в частности, имеет место оценка вида

$$G(n) \leqslant cn\log n + \mathcal{O}(\log\log n).$$

[4] D. Hilbert, *"Beweis für die Darstellbarkeit der ganzen Zahlen durch eine feste Anzahl n-ter Potenzen (Waringsche Problem)"*, Math. Ann., **67** (1909), 281–300.

[5] И.М. Виноградов, *"О верхней границе $G(n)$ в проблеме Варинга"*, Изв. АН СССР. VII серия. Отделение математических и естественных наук, **10** (1934), 1455–1469.

[6] И.М. Виноградов, *"Новый вариант вывода теоремы Варинга"*, Тр. Матем. ин-та им. В. А. Стеклова, **9**, Изд-во АН СССР, М.–Л., 1935, 5–15.

Отметим, что И.М. Виноградов посвятил серию работ улучшению константы c [7,8].

Современная постановка проблемы Варинга–Гольдбаха состоит в том, что каждое достаточно большое натуральное число N может быть представлено в виде суммы ограниченного числа простых степеней, то есть уравнение

$$N = p_1^n + p_2^n + \cdots + p_r^n,$$

разрешимо в простых числах $p_1, p_2, \ldots, p_r$ и $r \leqslant V(n)$.

В работах И.М. Виноградова[9] и Хуа Ло-кена [10,11] были получены результаты, которые могут быть сформулированы в следующем виде: для числа решений уравнения

$$N = p_1^n + p_2^n + \cdots + p_r^n$$

в простых числах $p_1, p_2, \ldots, p_r$ справедлива следующая асимптотическая формула

$$I(N) \sim \frac{\Gamma\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^r}{\Gamma\left(\dfrac{r}{n}\right)} \mathfrak{S}(N) \frac{N^{\frac{r}{n}-1}}{(\log N)^r},$$

при

$$r \geqslant \begin{cases} 2^n + 1, & \text{если } 1 \leqslant n \leqslant 5, \\ \dfrac{7}{8} 2^n + 1, & \text{если } 6 \leqslant n \leqslant 8, \\ n^2(\log n + \log\log n + \mathcal{O}(1)), & \text{если } n > 8; \end{cases}$$

где $\mathfrak{S}(N)$ — особый ряд проблемы Варинга–Гольдбаха. При этом, если $r \geqslant 3n+1$ и $r \equiv N \pmod{p^\gamma}$ для таких p что $(p-1)|n$ (число γ определяется так, что $p^{\gamma-1} \parallel n$, $p \neq 2$ и $2^{\gamma-2} \parallel n$), то $\mathfrak{S}(N) > 0$.

В 2009 г. Ф.С. Авдеев, Г.И. Архипов, В.Н. Чубариков [12] дали полное решение проблемы Варинга–Гольдбаха.

Функция τ впервые была рассмотрена С. Рамануджаном[13] и может быть

---

[7] И.М. Виноградов, *"О верхней границе $G(n)$ в проблеме Варинга"*, Изв. АН СССР. VII серия. Отделение математических и естественных наук, **10** (1934), 1455–1469.

[8] И.М. Виноградов, *"К вопросу о верхней границе для $G(n)$"*, Изв. АН СССР. Сер. матем., **23**:5 (1959), 637–642.

[9] I. Vinogradow, *"Some theorems concerning the theory of primes"*, Матем. сб., **2(44)**:2 (1937), 179–195.

[10] L.K. Hua, *"Some results in the additive prime number theory"*, Quart. J. Math. Oxford, **9** (1938), 68–80.

[11] Хуа Ло-Кен, *"Аддитивная теория простых чисел"*, Тр. Матем. ин-та им. В. А. Стеклова, **22**, Изд-во АН СССР, М.–Л., 1947, 3–179.

[12] Ф.С. Авдеев, Г.И. Архипов, В.Н. Чубариков, *"О проблеме Варинга-Гольдбаха"*, Современные проблемы математики и механики **3**:1 Изд-во. Моск. ун-та, М., 2009.

[13] S. Ramanujan, *"On certain arithmetical functions"*, Trans. Cambridge Philos. Soc., **22**:9 (1916), 159–184.

определена как коэффициент разложения

$$q\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)^{24}=\sum_{n=1}^{\infty}\tau(n)q^n.$$

Первым результатом, связанным с базисными свойствами функции Рамануджана, можно считать следующий результат Ж.-П. Серра [14].

Теорема 1. *Если $l\neq 2,3,5,7,23,691$ — простое, x — достаточно большое то*

$$|\{\tau(n) \pmod l : n\leqslant x\}|=l.$$

Таким образом, для достаточно большого x каждый класс вычетов по модулю l может быть записан в виде $\tau(n) \pmod l$ для некоторого $n\leqslant x$.

В 2005 г. И.Е. Шпарлинский[15] доказал следующее свойство множества значений τ-функции.

Теорема 2. *Справедливы оценки*

$$|\{\tau(n) : n\leqslant x\}|\geqslant x^{\frac{1}{3}+\varepsilon},$$

$$|\{\tau(n) \pmod l : n\leqslant x\}|\geqslant \min(l^{\frac{1}{2}+\varepsilon}x^{\frac{1}{4}+\varepsilon}),$$

где $\varepsilon>0$.

В той же работе было доказано, что множество значений функции Рамануджана образует конечный аддитивный базис по модулю простого числа l.

Теорема 3. *Существует целое число s такое, что для любого целого a сравнение*

$$\sum_{i=1}^{s}\tau(n_i)\equiv a \pmod l$$

разрешимо в натуральных числах $n_1,\dots n_s\leqslant l^4$.

В 2008 г. М.З. Гараев, В.С. Гарсиа, С.В. Конягин [16] доказали, что множество значений функции Рамануджана образует конечный аддитивный базис множества целых чисел порядка 74000. Именно, справедливо следующее утверждение.

[14] J.-P. Serre, *“Congruences et formes modulaires [d’aprés H.P.F. Swinnerton-Dyer]”*, Séminaire Bourbaki, 24e année (1971/1972), Exp. No. 416, Lecture Notes in Math., **317**, Springer, Berlin, 1973, 319–338

[15] I.E. Shparlinski, *“On the value set of the Ramanujan function”*, Arch. Math., **85**:6 (2005), 508–513.

[16] М.З. Гараев, В.С. Гарсиа, С.В. Конягин, *“Проблема Варинга с τ-функцией Рамануджана”*, Изв. РАН. Сер. матем., **72**:1 (2008) , 39–50.

Теорема 4. *Для любого целого числа N диофантово уравнение*

$$\sum_{i=1}^{74000} \tau(n_i) = N$$

разрешимо в натуральных числах $n_1, \ldots n_{74000}$, удовлетворяющих условию

$$\max_{1\leqslant i\leqslant 74000} n_i \ll |N|^{\frac{2}{11}}.$$

В той же работе были получены результаты для кольца вычетов по модулю простого числа l.

Теорема 5. *Для любого целого a сравнение*

$$\sum_{i=1}^{16} \tau(n_i) - \sum_{i=17}^{32} \tau(n_i) \equiv a \pmod l$$

имеет место для некоторых натуральных чисел $n_1, \ldots, n_{32}$, удовлетворяющих условиям

$$\max_{1\leqslant i\leqslant 32} n_i \ll l^2(\log l)^4, \quad (n_i n_{16+i}, 23!) = 1.$$

Теорема 6. *Для любого целого a сравнение*

$$\sum_{i=1}^{96} \tau(n_i) \equiv a \pmod l$$

разрешимо в натуральных числах $n_1, \ldots n_{96}$, удовлетворяющих условиям

$$\max_{1\leqslant i\leqslant 96} n_i \ll l^2(\log l)^4.$$

Таким образом для некоторой положительной константы C множество

$$\{\tau(n) \pmod l : n \leqslant Cl^2(\log l)^4\}$$

образует конечный аддитивный базис порядка не более 96 кольца вычетов $\mathbb{Z}/l\mathbb{Z}$.

Теорема 7. *Для любого целого a и любого $\varepsilon > 0$ сравнение*

$$\sum_{i=1}^{16} \tau(n_i) \equiv a \pmod l$$

разрешимо в натуральных числах $n_1, \ldots n_{16}$, удовлетворяющих условиям

$$\max_{1\leqslant i\leqslant 16} n_i \ll l^{3+\varepsilon}.$$

В 2009 г. М.З. Гараев, В.С. Гарсиа, С.В. Конягин [17] получили следующий результат.

Теорема 8. *Для любого целого числа N уравнение*

$$\sum_{i=1}^{148000} \tau(n_i) = N$$

разрешимо в натуральных числах $n_1, \dots n_{148000}$, причем

$$\max_{1 \leqslant i \leqslant 148000} n_i \ll |N|^{\frac{2}{11}} e^{-c\frac{\log|N|}{\log\log|N|}},$$

где $c > 0$ — абсолютная постоянная.

Цель работы

- Доказательство разрешимости уравнения типа Варинга–Гольдбаха с малым числом слагаемых в простых числах специального вида.
- Получение нового значения порядка базиса в аддитивной задаче с функцией Рамануджана.

Научная новизна

В диссертации решены следующие новые задачи.

1. Найдена асимптотическая формула для количества представлений натуральных чисел малым числом слагаемых, являющихся степенями простых чисел с ограничениями порядкового типа («телескопическая система слагаемых»).
2. Получены точные верхние и нижние оценки для количества представлений в данной «телескопической системе».
3. С помощью указанных оценок получено новое значение порядка базиса в аддитивной задаче о представимости целых чисел значениями функции Рамануджана равное 7544.

[17] M.Z. Garaev, V.C. Garcia, S.V. Konyagin, *"The Waring problem with the Ramanujan τ-function. II"*, Canad. Math. Bull, **52**:2 (2009), 195–199.

Основные методы исследования

В работе используются следующие методы исследования: модулярные формы, круговой метод в форме И.М Виноградова, метод вложений И.М Виноградова, метод оценок тригонометрических сумм И.М Виноградова с простыми числами, оценки тригонометрических сумм Г.Вейля, комбинаторные методы работы М.З. Гараева, В.С. Гарсиа, С.В. Конягина [18].

Теоретическая и практическая ценность работы

Диссертация имеет теоретический характер. Предложенные в диссертации методы и полученные результаты представляют интерес для специалистов аналитической теории чисел.

Апробация работы

Результаты диссертации докладывались на следующих научно-исследовательских семинарах и научных конференциях:

- Семинар «Аналитическая теория чисел» (д.ф.-м.н., проф. В.Н. Чубариков, д.ф.-м.н., проф. Г.И. Архипов), МГУ, неоднократно в 2010–2011 гг.
- Семинар «Теория чисел» (д.ф.-м.н., проф. В.Г. Чирский), МПГУ, 2011 г.
- Международная научно-практическая конференция «Математика и ее приложения. Экономическое прогнозирование: модели и методы» (Орел, Орловский государственный университет, 20–21 мая 2011 г.).
- Международная научная конференция «Комплексный анализ и его приложения к дифференциальным уравнениям и теории чисел» (Белгород, Белгородский государственный университет, 17–21 октября 2011 г.).

Публикации

Результаты автора по теме диссертации опубликованы в 3 работах, список которых приводится в конце автореферата [1], [2], [3].

[18] M.Z. Garaev, V.C. Garcia, S.V. Konyagin, *“The Waring problem with the Ramanujan τ-function. II”*, Canad. Math. Bull, **52**:2 (2009), 195–199.

Структура и объем диссертации

Диссертационная работа состоит из введения, трех глав и библиографии (32 наименования). Общий объем диссертации составляет 70 страниц.

Краткое содержание работы

Во введении к диссертации излагается история рассматриваемых вопросов, показана актуальность темы и сформулированы основные результаты. Приведены формулировки известных ранее результатов в рассматриваемых областях, снабженные подробными ссылками.

Содержание главы 1

В главе 1 приводятся необходимые свойства функции Рамануджана. Доказаны простейшие свойства множества значений функции Рамануджана. Приведены доказательство вспомогательных утверждений и необходимые результаты работы М.З. Гараева, В.С. Гарсиа, С.В. Конягина [19].

Содержание главы 2

В главе 2 доказаны асимптотические формулы и оценки, связанные с проблемами Варинга–Гольдбаха и Варинга. Именно, пусть

$$[0;1] = \mathfrak{M} \cup \mathfrak{m}$$

— разбиение единичного интервала на множества точек первого и второго классов в проблеме Варинга–Гольдбаха,

$$S(\alpha) = \sum_{p \leqslant M^{\frac{1}{11}}} e(\alpha p^{11}), \quad J(M, r) = \int\limits_{\mathfrak{M}} S(\alpha)^r e(-\alpha M) d\alpha.$$

тогда справедливы следующие результаты.

Теорема 9. *При $r \geqslant 23$ имеет место асимптотическая формула*

$$J(M.r) = \frac{\Gamma\left(\frac{12}{11}\right)^r}{\Gamma\left(\frac{1}{11}r\right)} \mathfrak{S}(M, r) \frac{M^{\frac{1}{11}r-1}}{(\log M)^r} + \mathcal{O}\left(\frac{M^{\frac{1}{11}r-1}}{(\log M)^r} \frac{\log\log M}{\log M}\right),$$

где $\mathfrak{S}(M, r)$ — особый ряд проблемы.

[19] М.З. Гараев, В.С. Гарсиа, С.В. Конягин, *"Проблема Варинга с τ-функцией Рамануджана"*, Изв. РАН. Сер. матем., **72**:1 (2008) , 39–50.

Теорема 10. *При $r \geqslant 23$ существует не зависящая от M постоянная $A > 0$ такая, что*
$$\mathfrak{S}(M, r) \geqslant A.$$

Теорема 11. *Для любого $B_0 > 0$ на втором классе выполняется оценка тригонометрической суммы*
$$\max_{\alpha \in \mathfrak{m}} |S(\alpha)| \ll \frac{M^{\frac{1}{11}}}{(\log M)^{B_0}}.$$

Аналогично, пусть
$$[0;1] = \mathfrak{M}' \cup \mathfrak{m}'$$
— разбиение единичного интервала на множества точек первого и второго классов в проблеме Варинга,
$$S_0(\alpha) = \sum_{x \leqslant P_0} e(\alpha x^{11}), \quad J'(M, U, r) = \int\limits_{\mathfrak{M}'} |S_0(\alpha)|^{2r} e(-\alpha U) d\alpha.$$

Теорема 12. *При $r > 11$ имеет место асимптотическая формула*
$$J'(M, U, r) = \Psi_0(M, U, r)\mathfrak{S}_0(U, r) M^{\frac{2}{11}r - 1} + \mathcal{O}\left(M^{\frac{2}{11}r - 1 - \frac{8}{11}}\right),$$
причем величины $\Psi_0(M, U, r)$, $\mathfrak{S}_0(U, r)$ ограничены.

Теорема 13. *На втором классе выполняется оценка тригонометрической суммы*
$$\max_{\alpha \in \mathfrak{m}'} |S_0(\alpha)| \ll M^{\frac{1}{11}(1-\rho)},$$
где $\rho = \dfrac{1}{7657}$.

Содержание главы 3

В главе 3 доказаны основные результаты диссертации. Пусть
$$\mathscr{P} = \{p : p \text{ — простое}, 23 < p \leqslant M^{\frac{1}{11}}\},$$
и $\mathscr{P}'$ — такое подмножество $\mathscr{P}$, что все суммы вида
$$\tau(p_1') + \cdots + \tau(p_6'), \quad p_1' < \cdots < p_6', \quad p_1', \ldots, p_6' \in \mathscr{P}',$$
различны.

На основе результатов глав 1–2 с использованием кругового метода и рассмотрения уравнения содержащего «телескопическую» систему доказано следующее утверждение.

Теорема 14. *Для достаточно большого четного M уравнение*

$$\sum_{i=1}^{204} p_i^{11} = M$$

разрешимо в числах $p_1, \ldots, p_{204} \in \mathscr{P} \setminus \mathscr{P}'$.

При помощи использования этой теоремы, свойств функции Рамануджана и идей работы М.З. Гараева, В.С. Гарсиа, С.В. Конягина [20] доказана следующая теорема.

Теорема 15. *Для любого целого числа N уравнение*

$$\sum_{i=1}^{7544} \tau(n_i) = N$$

разрешимо в натуральных числах $n_1, \ldots, n_{7544}$, причем

$$\max_{1 \leqslant i \leqslant 7544} n_i \ll |N|^{\frac{2}{11}}.$$

Благодарности

Автор выражает благодарность своему научному руководителю доктору физико-математических наук, профессору Архипову Геннадию Ивановичу за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

Автор благодарит весь коллектив кафедры математического анализа Механико-математического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова.

Работы автора по теме диссертации

[1] Снурницын П.В., *"О базисных свойствах τ-функции Рамануджана"*, Матем. заметки, **90**:5 (2011), 736–743.

[2] Снурницын П.В., *"О представимости целых чисел значениями функции Рамануджана"*, Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех., **6** (2011), 49–52.

[3] Снурницын П.В., *"Об одном свойстве функции Рамануджана"*, Материалы международной научно-практической конференции «Математика и ее приложения. Экономическое прогнозирование: модели и методы», Орел, 20–21 мая 2011 г. стр. 83–87 (2011).

[20] М.З. Гараев, В.С. Гарсиа, С.В. Конягин, *"Проблема Варинга с τ-функцией Рамануджана"*, Изв. РАН. Сер. матем., **72**:1 (2008) , 39–50.