МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ имени М. В. ЛОМОНОСОВА

Механико-математический факультет

На правах рукописи

УДК 517.938.5

ИЗОСИМОВ Антон Михайлович

ФОКУСНЫЕ ОСОБЕННОСТИ ИНТЕГРИРУЕМЫХ ГАМИЛЬТОНОВЫХ СИСТЕМ

Специальность 01.01.04 – геометрия и топология

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва 2011

Работа выполнена на кафедре дифференциальной геометрии и приложений Механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова

Научные руководители:	доктор физико-математических наук, профессор Болсинов Алексей Викторович
	кандидат физико-математических наук, доцент Ошемков Андрей Александрович
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, профессор Панов Тарас Евгеньевич
	кандидат физико-математических наук, Москвин Андрей Юрьевич
Ведущая организация:	Нижегородский государственный университет имени Н. И. Лобачевского

Защита диссертации состоится 16 декабря 2011 г. в 16:45 на заседании диссертационного совета Д 501.001.84 при Московском государственном университете имени М. В. Ломоносова по адресу: Российская Федерация, 119991, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д. 1, МГУ имени М. В. Ломоносова, механико-математический факультет, аудитория 14-08.
С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке механико-математического факультета МГУ имени М. В. Ломоносова (Главное здание, 14 этаж).

Автореферат разослан 16 ноября 2011 г.

Ученый секретарь диссертационного
совета Д 501.001.84 при МГУ,
доктор физико-математических наук,
профессор

А.О.Иванов

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Представленная работа является исследованием в области топологии интегрируемых систем.

Классическая теорема Лиувилля утверждает, что гамильтонова система с n степенями свободы, допускающая n независимых интегралов в инволюции (такие системы называются вполне интегрируемыми по Лиувиллю, или просто интегрируемыми), интегрируется в квадратурах (см. книги В. И. Арнольда[1] и А. В. Болсинова, А. Т. Фоменко[2]). Другими словами, такую систему можно "явно" решить. Однако, явные выражения для решений, как правило, достаточно сложны и не позволяют увидеть качественной картины динамики. Вследствие этого, достаточно важны качественные, топологические методы исследования интегрируемых гамильтоновых систем.

Основная идея качественного анализа интегрируемой системы состоит в том, чтобы вместо уравнений движения рассматривать слоение фазового пространства на связные компоненты совместных поверхностей уровня интегралов — слоение Лиувилля. Слои слоения Лиувилля являются интегральными поверхностями, поэтому топология этого слоения во многом определяет поведение системы.

Согласно теореме Лиувилля, все компактные неособые слои лиувиллева слоения являются n-мерными торами, и динамика на этих торах условно-периодична. В окрестности неособого слоя слоение Лиувилля представлет собой тривиальное слоение на торы, поэтому глобальная структура системы определяется, главным образом, топологией лиувиллева слоения в окрестности особых слоев.

Теория качественного анализа интегрируемых гамильтоновых систем на основе исследования множества их особенностей была создана в ра-

[1] Арнольд В.И., Математические методы классической механики, М.: Наука, 1989.

[2] Болсинов А.В., Фоменко А.Т. , Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия, топология, классификация, т. 1, 2, Ижевск: Издательский дом "Удмуртский университет", 1999.

ботах А. Т. Фоменко [3,4,5], М. П. Харламова [6], а также Л. М. Лермана и Я. Л. Уманского [7].

Современное состояние теории особенностей интегрируемых систем достаточно полно отображает обзор [8].

Локальная классификация невырожденных особенностей для интегрируемых гамильтоновых систем хорошо известна (теорема Элиассона[9]). А именно, особенность с точностью до послойного симплектоморфизма определяется количеством ее гиперболических, эллиптических и фокусных компонент. Однако для описания топологии конкретной интегрируемой системы необходимо исследовать структуру особенности не в малой окрестности особой точки, а в окрестности всего особого слоя, содержащего эту точку. Иногда такое исследование особенности называют полулокальным.

Согласно теореме Нгуена Тьен Зунга[10], всякая невырожденная особенность, удовлетворяющая так называемому условию нерасщепляемости, полулокально топологически эквивалентна почти прямому произведению некоторого количества простейших особенностей — эллиптических, гиперболических и фокусных. Эта теорема позволяет дать полный список особенностей, однако не полностью решает задачу классификации, поскольку среди особенностей из этого списка есть эквивалентные. Кроме того, как показано в настоящей работе, теорема Зунга не верна в гладкой категории.

В случае чисто гиперболических особенностей ранга 0 задача класси-

---

[3] Фоменко А.Т., Теория Морса интегрируемых гамильтоновых систем, Доклады АН СССР. 1986. **287**, №5. 1071–1075.

[4] Фоменко А. Т., Топология поверхностей постоянной энергии интегрируемых гамильтоновых систем и препятствия к интегрируемости. Изв. АН СССР. Сер. матем.1986. **50**, № 6. 1276—1307.

[5] Фоменко А. Т. , Симплектическая топология вполне интегрируемых гамильтоновых систем", УМН, 44:1(265) (1989), 145–173.

[6] Харламов М.П., Топологический анализ интегрируемых задач динамики твердого тела, Л.: Издательство Ленинградского университета, 1988.

[7] Lerman L. M. and Umanski Ya. L., Structure of the Poisson action of $\mathbb{R}^2$ on a four-dimensional symplectic manifold. I, II. Selecta Math. Sov., 6 : 365–396, 1987; 7 : 39–48, 1988.

[8] Bolsinov A.V., Oshemkov A.A., Singularities of integrable hamiltonian systems, Topological Methods in the Theory of Integrable Systems, Cambridge Scientific Publ., 2006, pp. 1-67.

[9] L. H. Eliasson, Normal forms for Hamiltonian systems with Poisson commuting integrals — elliptic case, Comm. Math. Helv., 65, (1990), 4–35.

[10] Nguyen Tien Zung, Symplectic topology of integrable hamiltonian systems, I: Arnold-Liouville with singularities, Compositio Mathematica, 101(1996), 179-215.

фикации полностью решена А. А. Ошемковым[11] (см. также более ранние работы [12,7,13], где эта задача решается в важных частных случаях). В настоящей работе эта задача решается, напротив, для чисто фокусных особенностей.

Научная новизна. Результаты диссертации являются новыми.

В диссертации получены следующие основные результаты:

1. Дана гладкая классификация фокусных особенностей интегрируемых систем с двумя степенями свободы.

2. Получена топологическая классификация многомерных фокусных особенностей.

3. Вычислены операторы монодромии многомерных фокусных особенностей.

Методы исследования. В работе используются различные методы дифференциальной геометрии и топологии, в частности, методы теории топологической классификации интегрируемых систем[2], теории Морса, алгебраической топологии, симплектической геометрии. При решении задачи топологической классификации используется теорема Зунга[10] о разложении особенности в почти прямое произведение. При решении задачи гладкой классификации важную роль играет теорема Элиассона[9] о локальной нормальной форме отображения момента.

Теоретическая и практическая ценность. Диссертация имеет теоретический характер. Ее результаты и методы могут найти применение в теории топологической классификации интегрируемых систем, геометрии, механике.

---

[11] Ошемков А.А., Классификация гиперболических особенностей ранга нуль интегрируемых гамильтоновых систем, Матем. сб., 201:8 (2010), 63–102.

[12] Болсинов А.В., Матвеев С.В., Фоменко А.Т, Топологическая классификация интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы. Список систем малой сложности // Успехи математических наук. 1990. Т. 45. № 2. С. 49-77.

[13] A. V. Bolsinov, “Methods of calculation of the Fomenko–Zieschang invariant” , In book: “Topological classification of integrable Hamiltonian systems”, Adv. Soviet Math., vol. 6, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1991, p. 147–183.

Апробация диссертации. Результаты диссертации докладывались:

• Неоднократно (2006-2011 гг.) на семинаре "Современные геометрические методы" Механико–математического факультета МГУ;

• На конференции "Александровские чтения", Москва, в 2007 г.;

• На семинаре "Mathematical physics", Loughborough (Великобритания), в 2008 г.;

• На конференции для аспирантов "MAGIC", Manchester (Великобритания), в 2009 г.;

• На международной конференции "Monodromy and geometric phases", Leiden (Нидерланды), в 2009 г.;

• На семинаре "Алгебраическая топология и ее приложения" (семинар имени М.М.Постникова) Механико–математического факультета МГУ в 2011 г.

Публикации. Результаты диссертации опубликованы в двух статьях в научных журналах, входящих в перечень ВАК. Список работ приведен в конце автореферата [1–2].

Структура диссертации. Диссертация состоит из введения и четырех глав. Текст дисертации изложен на 98 страницах. Список литературы содержит 34 наименования.

Содержание работы

В первой главе проводится гладкая классифкация особенностей типа фокус–фокус систем с двумя степенями свободы. Известно, что полным топологическим инвариантом в этом случае является число особых точек на слое (см. работы Л. М. Лермана и Я. Л. Уманского[14], В. С. Матвеева [15], Нгуена Тьен Зунга[16]). Однако, как замечено в книге А. В. Болсинова,

[14]Л. М. Лерман, Я. Л. Уманский, Классификация четырехмерных гамильтоновых систем и пуассоновских действий $\mathbb{R}^2$ в расширенных окрестностях простых особых точек. I; II; III , Матем. сборник, 183, № 12, (1992), 141–176; 184, № 4, (1993), 103–138; 186, № 10, (1995), 89–102.

[15]Матвеев В.С., Интегрируемые гамильтоновы системы с двумя степенями свободы. Топологическое строение насыщенных окрестностей точек типа фокус–фокус и седло–седло, Матем. сб., 187:4 (1996), 29–58.

[16]Nguyen Tien Zung, A note on focus-focus singularities, Differential geomerty and applications, 7: 123-130, 1997.

А. Т. Фоменко[2], в гладкой категории это уже не так, если число особых точек на слое больше единицы.

В разделе 1.1 приводятся различные (в основном известные) предварительные результаты о фокусных особенностях. Доказательства основных теорем главы приводятся в разделе 1.2.

Теоремы о гладкой классификации фокусных особенностей приведены в разделах 1.2.3 (случай двух точек на слое) и 1.2.6 (случай произвольного числа точек на слое). Условия гладкой эквивалентности двух особенностей достаточно сложны, однако если нас интересует лишь C^1-эквивалентность, то инвариант можно задать явной формулой.

Пусть x — особая точка типа фокус–фокус. Собственные значения линеаризации гамильтонова векторного поля $v = \omega^{-1}\mathrm{d}H$ в точке x имеют вид $\lambda, \overline{\lambda}, -\lambda, -\overline{\lambda}$.

Теорема. *(см. раздел 1.2.4) Пусть F — особенность типа фокус–фокус с двумя особыми точками x_1, x_2. Тогда существует естественный способ согласованно выбрать собственное значение λ_1 линеаризации поля v в точке x_1 и собственное значение λ_2 линеаризации поля v в точке x_2 так, что*

$$\mu(F) = \frac{|\lambda_1 - \lambda_2|}{|\lambda_1 + \overline{\lambda}_2|}.$$

является полным C^1-инвариантом особенности.

В разделе 1.2.5 показано, что $\mu(F)$ может принимать произвольное значение $\mu \in [0, 1)$. Следовательно, гладкие инварианты фокусных особенностей нетривиальны.

Аналогичный результат для случая большего числа точек на слое приводится в разделе 1.2.6.

Перейдем теперь к главе 2. Основной результат главы — топологическая классификация многомерных нерасщепляемых фокусных особенностей ранга ноль. Этот результат излагается в разделе 2.2.

Оказывается, в окрестности особого слоя фокусной особенности ранга нуль системы с $2n$ степенями свободы существует единственное гамильтоново свободное почти всюду действие тора T^n. Фактор особого слоя особенности по этому действию будем называть редуцированным особым слоем фокусной особенности.

Образы особых точек различного ранга определяют на редуцированном особом слое структуру клеточного комплекса. Как устроен этот комплекс?

Разбиение n-мерного тора на кубы будем называть правильным кубическим разбиением, если его можно получить факторизацией стандартного кубического разбиения $\mathbb{R}^n$ по некоторой подгруппе G в группе $\mathbb{Z}^n$ трансляций этого разбиения.

Теорема. *(см. раздел 2.2.2)*

1. *Редуцированный особый слой нерасщепляемой фокусной особенности ранга нуль системы с $2n$ степенями свободы является правильным кубическим разбиением n-мерного тора.*

2. *Отображение, сопоставляющее фокусной особенности ее редуцированный особый слой, является взаимно-однозначным соответствием между классами топологически эквивалентных нерасщепляемых фокусных особенностей ранга нуль и правильными кубическими разбиениями тора.*

Таким образом, мы поставили в соответствие нерасщепляемой фокусной особенности некоторый комбинаторный объект, и задачу классификации можно считать полностью решенной.

В разделе 2.2.6. теорема о классификации фокусных особенностей ранга ноль используется для классификации особенностей без гиперболических компонент произвольного ранга.

Раздел 2.1 носит технический характер, в то время как в разделе 2.3 обсуждаются особенности, не удовлетворяющие условию нерасщепляемости. Выявлены связи таких особенностей с торической топологией.

Перейдем к главе 3. Основной результат главы — вычисление монодромии в окрестности фокусных особенностей. Этот результат излагается в разделе 3.1.

Напомним, что такое монодромия. Если выкинуть из слоения Лиувилля все особые слои, получится локально тривиальное расслоение. Каждому замкнутому пути на базе локально тривиального расслоения соответствует некоторый гомотопический класс отображений слоя в себя. Поскольку слой в нашем случае является тором, гомотопический класс определяется автоморфизмом группы одномерных гомологий. Этот автоморфизм и называется монодромией.

Пусть у нас имеется нерасщепляемая фокусная особенность F ранга нуль системы с $2n$ степенями свободы. Для того, чтобы сформулировать теорему о монодромии, нам понадобится дать определение матрицы разложения базисных циклов особенности. Особенность F задается некоторым правильным кубическим разбиенем тора. Это разбиение получается из стандартой решетки $\mathbb{Z}^n$ факторизацией по некоторой подгруппе. Выберем в этой подгруппе базис. Составим матрицу $A(F)$ из векторов этого базиса, записанных по столбцам. Эту матрицу мы будем называть матрицей разложения базисных циклов особенности (для данного базиса).

Рассмотрим теперь образ отображения момента в окрестности фокусной особенности F. Множество особых значений представляет собой объединение n дисков коразмерности 2, находящихся в общем положении. Множество регулярных значений диффеоморфно $\mathrm{T}^n \times \mathrm{D}^n$ и его фундаментальная группа изоморфна $\mathbb{Z}^n$. Более того, в фундаментальной группе имеется естественный базис $\gamma_1, \dots \gamma_n$, заданный с точностью до перестановки и изменения ориентации циклов. Этот базис определяется тем, что каждый его элемент зацеплен ровно с одним диском множества особых значений.

Теорема. *Существует способ согласованно выбрать порядок и ориентации циклов $\gamma_1, \dots \gamma_n$ и базис в группе одномерных гомологий тора Лиувилля так, что матрицы монодромии будут иметь вид*

$$h_{\gamma_i} = \begin{pmatrix} E & 0 \\ A_i & E \end{pmatrix},$$

где A_i —матрица, полученная из матрицы разложения базисных циклов обнулением всех строк, кроме i-ой.

Это утверждение является непосредственным обобщением формулы монодромии для фокусной особенности системы с двумя степенями свободы (см. работы Л. М. Лермана и Я. Л. Уманского[14], В. С. Матвеева [15], Нгуена Тьен Зунга[16], М. Зу[17]).

Раздел 3.2 посвящен вопросам устойчивости фокусных особенностей при малых интегрируемых возмущениях. Показано, что существуют сколь угодно сложные особенности, устойчивые при возмущениях.

Перейдем к главе 4, посвященной гладким инвариантам многомерных фокусных особенностей. Основной результат главы, изложенный в разделе

[17] M. Zou, Monodromy in two degrees of freedom integrable systems, J. Geom. Phys., 10(1992), 37-45.

4.2, — контрпример к гладкой версии теоремы Зунга о разложении в почти прямое произведение. В работе[10] Нгуен Тьен Зунг предположил, что разложение в почти прямое произведение нерасщепляемой особенности имеет место и в гладкой категории. Как показано в разделе 4.2 это, вообще говоря, неверно.

Однако, как показано в разделе 4.3, разложение в почти прямое произведение всегда имеет место в C^1-категории. Это утверждение позволяет вычислять C^1-инварианты многомерных фокусных особенностей, используя результаты главы 1.

Кроме того, как показано в разделе 4.1, существует большой класс многомерных фокусных особенностей, вообще не имеющих гладких инвариантов. Этот класс удивительным образом совпадает с классом особенностей, для которых в разделе 3.2 доказана устойчивость при интегрируемых возмущениях.

Автор выражает огромную благодарность своим научным руководителям — доктору физико-математических наук профессору Болсинову Алексею Викторовичу и кандидату физико-математических наук доценту Ошемкову Андрею Александровичу за постановку задач, постоянную поддержку и многочисленные обсуждения.

Работы автора по теме диссертации

[1] Изосимов, А. М., Классификация почти торических особенностей лагранжевых слоений, Математический сборник, 2011, Т. 202, № 7., С. 95-116.

[2] Изосимов, А. М., Гладкие инварианты особыенностей типа фокус–фокус, Вестник МГУ. Сер. 1. Матем. Мех., 2011, № 4.