Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова

На правах рукописи

Синицын Дмитрий Олегович

Применение методов интегральной геометрии к задачам редукции гамильтоновых систем

01.01.04 - геометрия и топология

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва 2011

Работа выполнена на кафедре дифференциальной геометрии и приложений Механико–математического факультета Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова.

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, профессор
Голо Войслав Любомирович

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук, профессор
Мантуров Василий Олегович

доктор физико-математических наук, профессор
Радкевич Евгений Владимирович

Ведущая организация: Московский государственный институт электроники и математики (технический университет).

Защита диссертации состоится «16» декабря 2011 года в 16 часов 45 минут на заседании диссертационного совета Д 501.001.84 при МГУ имени М.В. Ломоносова по адресу: РФ, 119991, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д. 1, МГУ, Механико-математический факультет, аудитория 14-08.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Механико-математического факультета (Главное здание, 14 этаж).

Автореферат разослан «16» ноября 2011 года.

Ученый секретарь диссертационного
совета Д 501.001.84 при МГУ,
доктор физико-математических наук,
профессор А.О. Иванов

Актуальность темы

Изучение геодезических линий на римановых многообразиях является классической проблемой дифференциальной геометрии, активно исследуемой и в настоящее время по нескольким основным направлениям.

Ряд исследований посвящен интегрированию уравнений геодезических для конкретных видов поверхностей, например, классический результат Якоби о геодезических на эллипсоиде[1], описание метрик на сфере с геодезическим потоком, имеющим квадратичный по скоростям интеграл, полученное В.Н. Колокольцовым[2], работа А.В. Болсинова, В.В. Козлова, А.Т. Фоменко, в которой с помощью принципа Мопертюи найдены метрики на сфере, геодезические потоки которых возникают из интегрируемых случаев динамики твердого тела[3].

Другое направление исследований посвящено замкнутым геодезическим[4]. Одной из первых работ в этом направлении была статья Пуанкаре[5], посвященная нахождению замкнутых геодезических на выпуклых поверхностях, гомеоморфных сфере. Развитие вариационного подхода к этим вопросам привело к оценкам числа замкнутых геодезических, в том числе замечательному результату Люстерника–Шнирельмана о существовании на поверхности, гомеоморфной сфере, трех замкнутых геодезических без самопересечений. Также были обнаружены классы римановых многообразий, на которых все геодезические являются замкнутыми без самопересечений. Их свойства активно исследуются[6].

Также большой интерес привлекают вопросы о проявлениях хаотической динамики в системах, описывающих геодезические. Рассматриваются различные свойства динамики, такие как эргодичность, лиувиллева энтропия, топологическая энтропия и другие. В частности, V. Donnay в работе[7] построил пример метрики на сфере, имеющей эргодический геодезический поток. Монография Д.В. Аносова[8] посвящена свойствам геодезических потоков на замкнутых ри-

[1] C.G.J. Jacoby, Vorlesungen über Dynamik, Reiner, Berlin (1884).

[2] В.Н. Колокольцов, Геодезические потоки на двумерных многообразиях с дополнительным полиномиальным по скоростям первым интегралом, Известия АН СССР. Сер. матем. 1982, т. 46, № 5, с. 994-1010.

[3] А.В. Болсинов, В.В. Козлов, А.Т. Фоменко, Принцип Мопертюи и геодезические потоки на сфере, возникающие из интегрируемых случаев динамики твердого тела, УМН, 1995, 50:3(303), 3–32.

[4] В. Клингенберг, Лекции о замкнутых геодезических, М.: Мир, 1982.

[5] H. Poincaré, Sur les lignes geodesique des surfaces convexes, Trans. Amer. Math. Soc. 6 (1905), 237-274.

[6] А. Бессе, Многообразия с замкнутыми геодезическими, М.: Мир, 1981.

[7] V. Donnay, Geodesic flow on the two-sphere, Part I: positive measure entropy, Ergod. Th. & Dynam. Sys. 8 (1989) 531–553.

[8] Д.В. Аносов, Геодезические потоки на замкнутых римановых многообразиях отрицательной кривизны, Тр. МИАН СССР, 90, ред. И. Г. Петровский, 1967.

мановых многообразиях отрицательной кривизны, в том числе эргодичности.

Еще одно направление исследований возникло из применения к системам, задающим геодезические, топологических методов исследования гамильтоновых систем. Систематическая теория классификации гамильтоновых систем с точностью до естественных топологических изоморфизмов была развита А.Т. Фоменко. В работах[9,10,11,12,13,14,15] построены инварианты интегрируемых систем с двумя степенями свободы с точностью до лиувиллевой эквивалентности, т.е. до гомеоморфизма фазовых пространств, переводящего слои лиувиллева слоения одной системы в слои другой. В результате была осуществлена топологическая классификация многочисленных интегрируемых гамильтоновых систем, в том числе геодезических потоков[16]. Были обнаружены новые изоморфизмы гамильтоновых систем – в смысле топологической классификации. Например, было показано, что задача о геодезических на двумерном эллипсоиде топологически траекторно эквивалентна случаю Эйлера в динамике твердого тела[17].

Помимо интегрируемых случаев, представляет интерес также изучение систем, являющихся слабыми возмущениями известных точно решаемых задач. Это объясняется, с одной стороны, распространенностью таких ситуаций в приложениях, когда одни эффекты оказывают малое влияние на систему по сравнению с другими, и с другой стороны, теми дополнительными возможностями для исследования, которые имеются применительно к возмущениям решенных задач. Этот подход, основанный на теории возмущений, является классическим в аналитической механике и применялся со времен Лагранжа и Лапласа.

[9]Фоменко А.Т., Теория Морса интегрируемых гамильтоновых систем, Доклады АН СССР, 1986, т.287, No.5, с.1071-1075.

[10]Фоменко А.Т., Топология поверхностей постоянной энергии интегрируемых гамильтоновых систем и препятствия к интегрируемости, Известия АН СССР. Серия матем. 1986, т.50, No.6, с.1276-1307.

[11]Фоменко А.Т., Цишанг Х., О топологии трехмерных многообразий, возникающих в гамильтоновой механике, Доклады АН СССР, 1987, т.294, No.2, с.283-287.

[12]Фоменко А.Т., Топологические инварианты гамильтоновых систем, интегрируемых по Лиувиллю, Функц. анализ и его приложения. 1988, т.22, вып.4, с.38-51.

[13]Фоменко А.Т., Симплектическая топология вполне интегрируемых гамильтоновых систем, Успехи математических наук, 1989, т.44, вып.1 (265), с.145-173.

[14]Фоменко А.Т., Цишанг Х., Топологический инвариант и критерий эквивалентности интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы, Известия АН СССР. 1990, т.54, No.3, с.546-575.

[15]Фоменко А.Т., Топологический инвариант, грубо классифицирующий интегрируемые строго невырожденные гамильтонианы на четырехмерных симплектических многообразиях, Функц. анализ и его приложения. 1991, т.25, вып.4, с.23-35.

[16]А.В. Болсинов, А.Т. Фоменко, Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия, топология, классификация, ТТ. 1, 2. Ижевск: Издательский дом «Удмуртский университет», 1999, 444 с. и 448 с.

[17]А.В.Болсинов, А.Т.Фоменко, Геодезический поток эллипсоида траекторно эквивалентен интегрируемому случаю Эйлера в динамике твердого тела, Доклады РАН, 1994, т.339, No.3, с.293-296.

На современном этапе возникает возможность совместить классические методы теории возмущений с топологическим анализом гамильтоновых систем. Одним из первых шагов в этом направлении стала упомянутая работа Пуанкаре[18]. Рассматривая слабое возмущение стандартной сферы и комбинируя метод усреднения с топологическими соображениями, Пуанкаре получает следствия о числе замкнутых геодезических.

В настоящей работе мы следуем методу Пуанкаре и рассматриваем геодезические на поверхности, являющейся возмущением стандартной $(n-1)$-мерной сферы в n-мерном евклидовом пространстве. С помощью стандартного метода усреднения теории возмущений в аналитической механике[19] строится асимптотическая редукция системы, описывающей геодезические на этой поверхности, к гамильтоновой системе меньшей размерности, дающей возможность делать выводы о всей совокупности геодезических на поверхности, не обязательно замкнутых.

Процедура редукции формулируется в терминах преобразований интегральной геометрии – раздела, начавшегося с работ Минковского[20], Функа[21], Радона[22], Йона[23] и получившего впоследствии существенное развитие, в чем важную роль сыграли труды И.М. Гельфанда и М.И. Граева[24].

Получаемые в результате редукции системы являются гамильтоновыми системами на алгебре Ли-Пуассона $so(n)$. Данный класс систем активно изучается (обзор см., например, в книге[25]). Ввиду этого представляет интерес изучение изоморфизмов между редуцированными системами для геодезических на деформированных сферах и системами на $so(n)$. В частности, в настоящей работе получен изоморфизм редуцированной системы для $(n-1)$-мерного эллипсоида

[18] H. Poincaré, Sur les lignes geodesique des surfaces convexes, Trans. Amer. Math. Soc. 6 (1905), 237-274.

[19] В.И. Арнольд, В.В. Козлов, А.И. Нейштадт, Математические аспекты классической и небесной механики, изд. 2, УРСС, М., 2009.

[20] Г. Минковский, О телах постоянной ширины, Матем. сб., 1905, т. 25, № 3, стр. 505–508.

[21] P.G. Funk, Uber Flächen mit lauter geschlossenen geodätischen Linien, Mathematische Annalen, Band 74, 1913, p. 278-300.

[22] J. Radon, Über die Bestimmung von Funktionen durch ihre Integralwerte längs gewisser Mannigfaltigkeiten, Berichte über die Verhandlungen der Sächsische Akademie der Wissenschaften, (69): 262–277, 1917.

[23] F. John, The ultrahyperbolic differential equation with four independent variables, Duke Mathematical Journal 4 (2): 300–322 (1938).

[24] И.М. Гельфанд, М.И. Граев, Геометрия однородных пространств, представления групп в однородных пространствах и связанные с ними вопросы интегральной геометрии, I, Труды Моск. матем. о-ва 8 (1959), 321—390.

[25] Борисов А.В., Мамаев И.С., Современные методы теории интегрируемых систем, Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003.

и частного случая интегрируемой системы Шоттки-Манакова[26,27] на $so(n)$.

Значительный интерес представляет изучение геодезических на алгебраических поверхностях, см., например, работы В.В. Козлова[28], где доказывается неинтегрируемость задач о геодезических на определенных классах алгебраических поверхностей, и работу[29], где сформулированы общие нерешенные проблемы из этой области. Интерес к этой тематике связан, с одной стороны, с тем, что такие задачи возникают в приложениях; в частности, в работе Римана[30] обнаружена связь уравнений динамики жидкого эллипсоида с геодезическими на кубической поверхности $xyz = const$. С другой стороны, представляет интерес исследование связи конфигураций геодезических на алгебраических поверхностях со свойствами этих многообразий, изучаемыми алгебраической геометрией.

В настоящей работе для содержательного класса алгебраических поверхностей, задаваемых уравнением 4-й степени и являющихся малой деформацией двумерной сферы, производится топологическая классификация слоений Лиувилля гамильтоновых систем, получаемых с помощью асимптотической редукции, путем вычисления для них топологических инвариантов А.Т. Фоменко. При этом прослеживается связь свойств полинома, определяющего алгебраическую поверхность, с топологией слоения Лиувилля редуцированной системы.

Кроме того, исследуется гамильтонова система, описывающая динамику двух классических спинов в постоянном магнитном поле. Эта система используется для описания намагниченности в магнетиках[31,32]. Используя симметрию задачи, мы осуществляем ее редукцию к системе с двумя фазовыми переменными, допускающей топологическое описание в терминах фазового портрета.

Цель работы

Основная цель диссертации состоит в исследовании свойств геодезических на слабо деформированных сферах методами теории возмущений. В рамках этой цели рассматриваются следующие задачи: описание процедуры редукции

[26] F. Schottky, Über das analytische Problem der Rotation eines starren Körpers in Raume von vier Dimensionen, Sitzungsber. Konig. Preuss. Akad. Wiss. Berlin, 1891, Bd. XIII, S. 227-232.

[27] С.В. Манаков, Замечание об интегрировании уравнений Эйлера динамики n-мерного твердого тела, Функц. анализ и его прил., 1976, т. 10, вып. 4, стр. 93–94.

[28] В. В. Козлов, Топология вещественных алгебраических кривых и интегрируемость геодезических потоков на алгебраических поверхностях, Функц. анализ и его прил., 2008, т. 42, вып. 2, стр. 23–27.

[29] V.V. Kozlov, Several problems on dynamical systems and mechanics, Nonlinearity, 21, (2008), T149–T155.

[30] Б. Риман, О движении жидкого однородного эллипсоида, в кн.: Сочинения, ОГИЗ, М., Л., 1948, 339–366.

[31] Е.М. Лифшиц, Л.П. Питаевский, Статистическая физика, часть 2, Физматлит, Москва (2002).

[32] Е.С. Боровик, В.В. Еременко, А.С. Мильнер, Лекции по магнетизму, Физматлит, Москва (2005).

по методу усреднения для уравнений геодезических на деформированных сферах; изучение свойств получаемых редуцированных систем; исследование топологии слоений Лиувилля конкретных примеров редуцированных систем для геодезических на алгебраических поверхностях, близких к сфере. Также ставится задача редукции гамильтоновой двухспиновой системы во внешнем поле к системе меньшей размерности.

Научная новизна

Результаты диссертации являются новыми. Основные результаты диссертации следующие:

1. Разработана методика применения преобразований интегральной геометрии для редукции уравнений геодезических на деформированных сферах.

2. С помощью данной методики решена задача определения топологии редуцированных систем для содержательного класса алгебраических поверхностей, близких к стандартной сфере.

Методы исследования

В работе применяются: метод усреднения для осуществления асимптотической гамильтоновой редукции в задаче о геодезических на деформированных сферах, методы интегральной геометрии для описания редукции и установления свойств усредненных систем, топологические методы исследования гамильтоновых систем. В работе существенно используются методы аналитической механики.

Теоретическая и практическая ценность

Диссертация имеет теоретический характер. Полученные результаты могут быть использованы для дальнейшего изучения геодезических с помощью теории возмущений, в том числе на алгебраических поверхностях, а также для установления изоморфизмов редуцированных систем для этих задач с системами на алгебрах Ли.

Апробация результатов работы

Результаты диссертации докладывались:

- на семинаре кафедры дифференциальной геометрии и приложений Механико-математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова (руководитель академик А.Т. Фоменко, неоднократно, 2004, 2010 г.);

- на семинаре «Современные геометрические методы» Механико-математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова (руководители академик А.Т.Фоменко, д.ф.-м.н. А.В.Болсинов, д.ф.-м.н. А.С.Мищенко, к.ф.-м.н. А.А.Ошемков, к.ф.-м.н. Е.А.Кудрявцева, к.ф.-м.н. И.М.Никонов, 2011 г.);
- на семинаре «Узлы и теория представлений» Механико-математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова (руководители д.ф.-м.н. В.О. Мантуров, к.ф.-м.н. Д.П. Ильютко, к.ф.-м.н. И.М. Никонов, 2011 г.);
- на учебно-научном семинаре для студентов и аспирантов «Геометрия и топология» Механико-математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова (руководители д.ф.-м.н. Т.Е. Панов, к.ф.-м.н. А.В. Пенской, 2011 г.);
- на семинаре лаборатории механики природных катастроф Института проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН (руководитель д.ф.-м.н. С.Ю. Доброхотов, 2010 г.);
- на семинаре "Oberseminar Differentialgeometrie" университетов Бохума и Дортмунда, Германия (руководители Prof. Dr. Uwe Abresch, Prof. Dr. Gerhard Knieper, Prof. Dr. Lorenz Schwachhöfer, Prof. Dr. Karl Friedrich Siburg, 2010 г.);
- на семинаре "Discrete Differential Geometry" Технического университета Берлина, Германия (руководитель Prof. A.I. Bobenko, 2010 г.);
- на Международной конференции «Математика. Компьютер. Образование», Пущино, 2005 г.;
- на Международной конференции "Mathematical Modelling and Computational Physics", High Tatra Mountains, Slovakia, 2006 г.

Публикации

Результаты диссертации опубликованы в пяти работах автора, список которых приведен в конце автореферата [1-5].

Структура и объем диссертации

Диссертация состоит из введения, трех глав и списка литературы, насчитывающего 59 наименований. Общий объем диссертации составляет 81 страницу.

Содержание диссертации

Во **введении** рассказывается об основных направлениях исследований геодезических линий, теории топологической классификации гамильтоновых систем, методах интегральной геометрии, а также о схемах редукции гамильтоновых систем. Обсуждается место данной работы на стыке этих направлений и приводится перечень основных результатов.

В **главе 1** исследуется связь процедуры асимптотической гамильтоновой редукции для геодезических на деформированных сферах с помощью метода усреднения теории возмущений[33] с преобразованиями интегральной геометрии. Мы рассматриваем геодезические линии на $(n-1)$-мерных гиперповерхностях в n-мерном евклидовом пространстве, получаемых малой деформацией стандартной сферы и задаваемых уравнением вида:

$$\varphi \;\equiv\; x_1^2 \,+\, x_2^2 \,+\, \ldots \,+\, x_n^2 \,-1 \,+\, \varepsilon\,\psi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \qquad (1)$$

где ε – малый параметр и $\psi(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in C^2(\mathbb{R}^n)$ – функция, задающая деформацию. Параметризация такой поверхности, вообще говоря, затруднена, поэтому геодезические описываются уравнениями Лагранжа 1-го рода.

Для исследования этой системы используется стандартный метод усреднения[33]. Его применение основывается на том, что, поскольку поверхность близка к сфере, то малые участки геодезических близки к участкам большого круга. Ввиду этого выделяется набор медленных переменных задачи:

$$l_{ij} = x_i\,\dot{x}_j - x_j\,\dot{x}_i,\;\; i,j = 1\ldots n. \qquad (2)$$

Это компоненты матрицы n-мерного углового момента – обобщения момента в трехмерном пространстве. Существенно, что они совпадают с плюккеровыми координатами двумерной плоскости $\langle \vec{x}, \dot{\vec{x}} \rangle$ как элемента многообразия Грассмана $G(2,n)$, что позволяет использовать соответствующие результаты алгебраической геометрии и в дальнейшем установить связь процедуры редукции с преобразованиями интегральной геометрии. Для невозмущенной сферы величины l_{ij} постоянны. Согласно принципу усреднения[33] динамика медленных переменных может быть разделена на малые колебания и медленную эволюцию («вековые изменения»). Для нахождения этой эволюции рассматривается

[33]В.И. Арнольд, В.В. Козлов, А.И. Нейштадт, Математические аспекты классической и небесной механики, изд. 2, УРСС, М., 2009.

усредненная система, получаемая из выражений для производных медленных переменных с помощью усреднения их по периоду точного решения невозмущенной системы. В нашем случае это равномерное движение по большому кругу $\vec{x}_{\hat{l}}(t) = \cos t\ \vec{e}_1(\hat{l}) + \sin t\ \vec{e}_2(\hat{l})$, где $\vec{e}_1(\hat{l}), \vec{e}_2(\hat{l})$ – ортонормированный базис в плоскости движения с матрицей момента $\hat{l}$. Среднее значение функции $f(\vec{x})$ по периоду этого решения выражается формулой:

$$\langle f(\vec{x}) \rangle_{\vec{x}_{\hat{l}}(t)} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\vec{x}_{\hat{l}}(t))\, dt. \tag{3}$$

Результат зависит только от матрицы углового момента $\hat{l}$, поэтому усредненная система замкнута относительно медленных переменных.

Важный факт состоит в том, что процедура (3) эквивалентна *лучевому преобразованию* J, рассматриваемому в *интегральной геометрии*[34], сопоставляющему функции $f(\vec{x})$ на стандартной сфере функцию на грассманиане $G(2,n)$, значение которой на данной двумерной плоскости есть интеграл от $f(\vec{x})$ по соответствующему большому кругу:

$$(Jf)(\hat{p}) = \int_0^{2\pi} f\left(\cos t\ \vec{e}_1(\hat{p}) + \sin t\ \vec{e}_2(\hat{p})\right)\, dt. \tag{4}$$

Здесь $\hat{p}$ – матрица плюккеровых координат двумерной плоскости; $\vec{e}_1(\hat{p}), \vec{e}_2(\hat{p})$ – ортонормированный базис в ней. Отсюда вытекают следующие утверждения.

Лемма 1. Усреднение (3) по геодезической на невозмущенной сфере выражается через лучевое преобразование по формуле:

$$\langle f(\vec{x}) \rangle_{\vec{x}_{\hat{l}}(t)} = \frac{1}{2\pi}(Jf)(\hat{l}).$$

Теорема 2. Усредненная система для углового момента имеет вид:

$$\dot{l}_{ij} = -\frac{\varepsilon}{2\pi}\ (J \circ m_{ij}\ \psi)\ (\hat{l}), \tag{5}$$

Здесь $\psi(\vec{x})$ – функция, определяющая деформацию сферы, (1); $m_{ij} = x_i \frac{\partial}{\partial x_j} - x_j \frac{\partial}{\partial x_i}$; J – лучевое преобразование, определенное в (4).

С использованием свойств лучевого преобразования устанавливается гамильтонова структура усредненной системы. Скобки Пуассона для углового момента определяются алгеброй Ли $so(n)$ и имеют вид:

$$\{l_{ij}, l_{pq}\} = \delta_{ip} l_{jq} + \delta_{jp} l_{qi} + \delta_{iq} l_{pj} + \delta_{jq} l_{ip}. \tag{6}$$

[34] Гельфанд И.М., Гиндикин С.Г., Граев М.И., Избранные задачи интегральной геометрии, Добросвет, М. 2000.

Теорема 3. Усредненная система (5) для углового момента является гамильтоновой со скобками Пуассона (6) и гамильтонианом:

$$H(\hat{l}) = \frac{\varepsilon}{2\pi} J\psi, \tag{7}$$

который получается применением лучевого преобразования J, (4), к функции $\psi(\vec{x})$, определяющей деформацию сферы, (1).

Тем самым осуществлена асимптотическая гамильтонова редукция исходной системы для геодезических с фазовой размерностью $2n-2$ к усредненной системе уравнений для момента, определенной на грассманиане $G(2,n)$ и имеющей фазовую размерность $2n-4$.

Результаты классической теории возмущений и теории КАМ[35,36] приводят к трем утверждениям о связи решений точной системы уравнений геодезических и усредненной системы для углового момента при различных условиях.

В **главе 2** исследуются свойства усредненной системы и рассматриваются конкретные примеры. В случае двумерных сфер в трехмерном пространстве грассманиан $G(2,3)$ сводится к проективной плоскости, что приводит к следующему утверждению.

Утверждение 1. Для двумерных деформированных сфер в трехмерном пространстве редуцированная система есть интегрируемая гамильтонова система с одной степенью свободы, определенная на фазовом пространстве $\mathbb{RP}^2$.

Компоненты момента в этом случае обычно записывают в виде вектора $\vec{L} = (L_1, L_2, L_3) = (l_{23}, -l_{13}, l_{12})$. Траекториями системы являются линии уровня гамильтониана $H = const$ на $\mathbb{RP}^2$ (или на сфере, задаваемой фиксированием значения функции Казимира $\vec{L}^2 = 1$). Топология слоения, порождаемого этой функцией, характеризуется инвариантами А.Т. Фоменко[37], называемыми молекулами, с точностью до так называемой послойной эквивалентности.

Определение[38]. Функции Морса f и g на поверхностях X^2 и Y^2 называются

[35] В.И. Арнольд, В.В. Козлов, А.И. Нейштадт, Математические аспекты классической и небесной механики, изд. 2, УРСС, М., 2009.

[36] В.И. Арнольд, Малые знаменатели и проблемы устойчивости движения в классической и небесной механике, УМН, 1963, т. 18, вып. 6 (114), стр. 91–192.

[37] Фоменко А.Т., Топологические инварианты гамильтоновых систем, интегрируемых по Лиувиллю, Функц. анализ и его приложения. 1988, т.22, вып.4, с.38-51.

[38] Фоменко А.Т., Цишанг Х., Топологический инвариант и критерий эквивалентности интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы, Известия АН СССР. 1990, т.54, No.3, с.546-575.

послойно эквивалентными, если существует диффеоморфизм

$$\lambda : X^2 \to Y^2,$$

переводящий связные компоненты линий уровня функции f в связные компоненты линий уровня функции g.

В случае полиномиальных функций деформации двумерной сферы свойства лучевого преобразования (которое для двумерной сферы называется также преобразованием Функа-Минковского)[39] приводят к следующему результату.

Теорема 9. Если функция $\psi(x_1, x_2, x_3)$, задающая деформацию сферы, является четным полиномом, то соответствующий гамильтониан редуцированной системы $H(L_1, L_2, L_3)$ также является четным полиномом той же степени.

В качестве конкретного примера рассматривается класс алгебраических поверхностей, близких к двумерной сфере и задаваемых уравнением вида:

$$\varphi(\vec{x}) \equiv x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1 + \varepsilon\,\psi(\vec{x}) = 0, \quad \varepsilon \ll 1, \quad \psi(\vec{x}) = \varepsilon_1 x_1^4 + \varepsilon_2 x_2^4 + \varepsilon_3 x_3^4. \quad (8)$$

Утверждение 2. Для возмущения сферы четвертыми степенями (8) гамильтониан редуцированной системы имеет вид:

$$H = \frac{3}{8}\,\varepsilon\left[\varepsilon_1\,(L_2^2 + L_3^2)^2 + \varepsilon_2\,(L_1^2 + L_3^2)^2 + \varepsilon_3\,(L_1^2 + L_2^2)^2\right]. \quad (9)$$

Мы вычисляем инварианты А.Т. Фоменко для всех возможных здесь случаев, когда гамильтониан является функцией Морса.

Теорема 10. Редуцированная система для алгебраической поверхности, заданной как деформация двумерной сферы четвертыми степенями (8), при условии невырожденности всех критических точек, характеризуется, в зависимости от параметров ε_i, одной из восьми указанных молекул (молекулы приведены на рис. 2.15 в диссертации).

Тем самым осуществлена топологическая классификация слоений Лиувилля для усредненной системы в классе деформаций сферы, задаваемых полиномом четвертой степени вида (8). При этом указаны условия на коэффициенты полинома, при которых усредненная система имеет тот или иной тип.

В случае трехмерных деформированных сфер в четырехмерном пространстве угловой момент имеет шесть существенных компонент, при этом есть две

[39] Гельфанд И.М., Гиндикин С.Г., Граев М.И., Избранные задачи интегральной геометрии, Добросвет, М. 2000.

функции Казимира, поэтому редуцированная система имеет две степени свободы.

Связь процедуры усреднения с интегральной геометрией позволяет установить следующее важное свойство усредненной системы.

Теорема 11. Гамильтониан редуцированной системы для трехмерной деформированной сферы удовлетворяет следующему ультрагиперболическому уравнению Йона:

$$\frac{\partial^2 H}{\partial l_{12}\partial l_{34}} - \frac{\partial^2 H}{\partial l_{13}\partial l_{24}} + \frac{\partial^2 H}{\partial l_{14}\partial l_{23}} = 0. \tag{10}$$

Это условие, которое задает образ лучевого преобразования среди функций на грассманиане $G(2,4)$, выраженных в плюккеровых координатах[40,41].

В случае осевой симметрии, когда функция деформации имеет вид:

$$\psi(\vec{x}) = f(x_1, x_2, x_3^2 + x_4^2), \tag{11}$$

сохраняется компонента углового момента l_{34} при движении частицы по любой геодезической. Это же свойство переносится и на редуцированную систему.

Теорема 12. Редуцированная система для трехмерной сферы с осесимметричной деформацией (11) является интегрируемой системой с двумя степенями свободы с дополнительным интегралом l_{34}.

Поэтому в данном классе случаев редуцированная система допускает топологическую классификацию в терминах инвариантов А.Т. Фоменко[42].

В случае $(n-1)$-мерного эллипсоида, близкого к сфере:

$$\varphi \equiv x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 - 1 + \varepsilon\,(\alpha_1 x_1^2 + \alpha_2 x_2^2 + \ldots + \alpha_n x_n^2) = 0 \tag{12}$$

редукция приводит к известной системе Шоттки-Манакова.

Теорема 13. Редуцированная система для $(n-1)$-мерного эллипсоида (12) имеет гамильтониан

$$H = \frac{1}{2}\,\varepsilon \sum_{i<j} (\alpha_i + \alpha_j)\, l_{ij}^2 \tag{13}$$

[40] F. John, The ultrahyperbolic differential equation with four independent variables, Duke Mathematical Journal 4 (2): 300–322 (1938).

[41] Гельфанд И.М., Гиндикин С.Г., Граев М.И., Избранные задачи интегральной геометрии, Добросвет, М. 2000.

[42] Фоменко А.Т., Топологические инварианты гамильтоновых систем, интегрируемых по Лиувиллю, Функц. анализ и его приложения. 1988, т.22, вып.4, с.38-51.

и является частным случаем многомерного интегрируемого случая Шоттки-Манакова[43,44] в уравнениях Эйлера на алгебре Ли $so(n)$:

$$H = \sum_{i<j} \frac{a_i - a_j}{b_i - b_j}\, l_{ij}^2 \tag{14}$$

при $a_i = \varepsilon\alpha_i^2$, $b_i = 2\alpha_i$.

В **главе 3** осуществляется редукция уравнений динамики двухспиновой системы в магнитном поле. Данная задача гамильтоновой механики возникает при описании динамики спиновых систем в магнетиках[45,46]. Аналогично предыдущим задачам в этой системе, используя ее структуру, а именно симметрию, мы производим редукцию к системе меньшей размерности, которая допускает исследование более простыми средствами (редукция типа Рауса[47]).

Рассматривается система двух классических спинов — трехмерных векторов $\vec{S}^I$ и $\vec{S}^{II}$, со следующими скобками Пуассона и гамильтонианом:

$$\{S_i^I, S_j^I\} = \varepsilon_{ijk} S_k^I, \quad \{S_i^{II}, S_j^{II}\} = \varepsilon_{ijk} S_k^{II}, \quad \{S_i^I, S_j^{II}\} = 0$$
$$\mathcal{H} = \gamma_1 \vec{H}\cdot\vec{S}^I + \gamma_2 \vec{H}\cdot\vec{S}^{II} + J\,\vec{S}^I\cdot\vec{S}^{II}, \tag{15}$$

где γ_1, γ_2 — гиромагнитные отношения, $\vec{H}$ — постоянное магнитное поле, J — параметр величины взаимодействия.

Используя две функции Казимира $(\vec{S}^I)^2$ и $(\vec{S}^{II})^2$ и интеграл $K = \vec{H}\cdot(\vec{S}^I + \vec{S}^{II})$, возникающий вследствие симметрии относительно вращений вокруг вектора $\vec{H}$, мы заключаем, что эта система является интегрируемой системой с двумя степенями свободы. Основываясь на симметрии, мы осуществляем гамильтонову редукцию данной задачи к системе с одной степенью свободы. Это достигается применением цилиндрической замены координат

$$S_1^I = \sqrt{(S^I)^2 - p_1^2}\,\cos x_1, \quad S_2^I = \sqrt{(S^I)^2 - p_1^2}\,\sin x_1, \quad S_3^I = p_1,$$
$$S_1^{II} = \sqrt{(S^{II})^2 - p_2^2}\,\cos x_2, \quad S_2^{II} = \sqrt{(S^{II})^2 - p_2^2}\,\sin x_2, \quad S_3^{II} = p_2$$

и затем канонической замены

$$u = x_2 - x_1, \quad v = x_2 + x_1, \quad p_u = \frac{1}{2}(p_2 - p_1), \quad p_v = \frac{1}{2}(p_2 + p_1). \tag{16}$$

[43] F. Schottky, Über das analytische Problem der Rotation eines starren Körpers in Raume von vier Dimensionen, Sitzungsber. Konig. Preuss. Akad. Wiss. Berlin, 1891, Bd. XIII, S. 227-232.

[44] С.В. Манаков, Замечание об интегрировании уравнений Эйлера динамики n-мерного твердого тела, Функц. анализ и его прил., 1976, т. 10, вып. 4, стр. 93–94.

[45] Е.М. Лифшиц, Л.П. Питаевский, Статистическая физика, часть 2, Физматлит, Москва (2002).

[46] Е.С. Боровик, В.В. Еременко, А.С. Мильнер, Лекции по магнетизму, Физматлит, Москва (2005).

[47] E.J.Routh, Dynamics of a System of Rigid Bodies, Ch.10, London - New York, Macmillan (1891-92).

Теорема 13. В канонических переменных (16) гамильтониан (15) имеет вид:

$$\begin{aligned} \mathcal{H} = &\gamma_1 H(p_v - p_u) + \gamma_2 H(p_v + p_u) + \\ &+ J\sqrt{(S^I)^2 - (p_v - p_u)^2}\sqrt{(S^{II})^2 - (p_v + p_u)^2}\cos u + J(p_v - p_u)(p_v + p_u). \end{aligned} \tag{17}$$

В нем переменная v является циклической, $p_v = const$. При фиксировании значения p_v гамильтониан (17) задает систему с одной степенью свободы в фазовых переменных u, p_u.

Таким образом, получена редукция двухспиновой системы к задаче с двумя фазовыми переменными, которая допускает топологическое описание в терминах фазового портрета.

Автор благодарит профессора Войслава Любомировича Голо за постановку задач и научное руководство.

Автор глубоко признателен заведующему кафедрой дифференциальной геометрии и приложений академику РАН Анатолию Тимофеевичу Фоменко за внимание к этой работе и полезные дискуссии, позволившие существенно повысить качество работы.

Автор выражает благодарность профессору С.Ю. Доброхотову, доценту Е.А. Кудрявцевой, профессору А.И. Нейштадту, доценту А.А. Ошемкову, члену-корреспонденту РАН Д.В. Трещеву, профессору А.И. Шафаревичу за полезные дискуссии.

Автор признателен коллективу кафедры дифференциальной геометрии и приложений Механико-математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова за интерес к этой работе.

Работы автора по теме диссертации

1. Д.О. Синицын, Асимптотическая гамильтонова редукция для геодезических на деформированных сферах и преобразование Функа–Минковского, Матем. заметки, т. 90, вып. 3, стр. 474–477 (2011).

2. V. Golo, D. Sinitsyn, Asymptotic Hamiltonian Reduction for the Dynamics of a Particle on a Surface, Physics of Particles and Nuclei Letters, Vol. 5, No. 3, pp. 278-281 (2008). (По результатам Международной конференции "Mathematical Modelling and Computational Physics", High Tatra Mountains, Словакия, 2006 г., посвященной 50-летнему юбилею ОИЯИ (Дубна)).

Автору принадлежит вычисление редуцированной системы и исследование ее фазовых портретов для геодезических на поверхности четвертого порядка.

3. В.Л. Голо, Д.О. Синицын, Гамильтонова двухспиновая система, Сборник научных трудов «Современные проблемы математики и механики», Т.1 «Геометрия и топология» под редакцией А.Т. Фоменко, М.: Изд-во Московского университета, 2008.

Автору принадлежит гамильтонова редукция двухспиновой системы с осевой симметрией, а также расчет стационарных решений.

4. В.Л.Голо, Д.О.Синицын, Визуализация геодезических на слабо деформированной сфере, Математика. Компьютер. Образование: Сборник научных трудов. Том 2 / Под ред. Г.Ю.Ризниченко. – М.–Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика». 2005, стр. 606.

Автору принадлежит построение фазовых портретов усредненных систем.

5. Д.О. Синицын, Асимптотическая гамильтонова редукция для геодезических на деформированных сферах в терминах интегральной геометрии, депонирована в ВИНИТИ РАН, 17.10.2011, №453-В2011, 1-77.