МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА

На правах рукописи
УДК 512.743

ШАРОЙКО ЕЛЕНА ВИКТОРОВНА

О модальности замыканий орбит аффинных алгебраических групп

01.01.06 — математическая логика, алгебра и теория чисел.

Автореферат

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва — 2011

Работа выполнена на кафедре высшей алгебры Механико-математического факультета Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова.

Научный руководитель	— доктор физико-математических наук, доцент Аржанцев Иван Владимирович.
Официальные оппоненты	— доктор физико-математических наук, профессор Панов Александр Николаевич
	— кандидат физико-математических наук, доцент Фейгин Евгений Борисович
Ведущая организация	— Омский филиал Института математики имени С. Л. Соболева Сибирского отделения РАН (ОФ ИМ СО РАН)

Защита диссертации состоится “16 ” декабря 2011 г. в 16 ч. 45 мин. на заседании диссертационного совета Д.501.001.84 при Московском государственном университете имени М.В. Ломоносова по адресу: РФ, 119991, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д.1, Главное здание, Механико-математический факультет, аудитория 14-08.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Механико-математического факультета МГУ (Главное здание, 14 этаж).

Автореферат разослан “16 ” ноября 2011 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
Д.501.001.84 при МГУ
доктор физико-математических наук,
профессор А. О. Иванов

Общая характеристика работы

Актуальность темы

В теории инвариантов важную роль играют действия алгебраических групп с конечным числом орбит. Классическим примером является действие полной линейной группы $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ над алгебраически замкнутым полем $\mathbb{K}$ характеристики нуль на пространстве квадратичных форм от n переменных. Хорошо известно, что формы фиксированного ранга $r \le n$ образуют одну орбиту O_r, причем $O_r \subset \overline{O_{r+1}}$. Итак, при описанном действии число орбит конечно на всем пространстве, а значит, и в любом инвариантном подмногообразии. Еще один классический пример линейного действия — это присоединенное представление группы $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ в пространстве матриц порядка n. Как известно, представителями орбит такого действия будут всевозможные жордановы матрицы. Все жордановы матрицы, лежащие в замыкании одной орбиты, имеют одинаковую диагональ, а значит, число орбит во всем пространстве бесконечно, однако замыкание каждой орбиты содержит лишь конечное число $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$-орбит. Можно несколько обобщить этот пример, рассмотрев присоединенное представление произвольной полупростой группы. Как известно, при этом в замыкании каждой орбиты также лежит лишь конечное число орбит, но во всем пространстве число орбит бесконечно. С другой стороны, нетрудно привести пример действия с открытой орбитой, число орбит которого бесконечно. Например, можно рассмотреть действие группы $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ на пространстве матриц $\mathrm{Mat}_{n\times n}$ левыми умножениями.

Для некоторых классов действий редуктивных групп конечность числа орбит известна a priori. Напомним, что торическим многообразием называется нормальное неприводимое алгебраическое многообразие, на котором задано регулярное действие алгебраического тора T с открытой орбитой. Структура и свойства торических многообразий подробно описаны в работах [Da][1] и [Fu][2]. Обобщая это понятие и заменяя тор на произвольную связную редуктивную алгебраическую группу G, Д. Луна и Т. Вуст [LV][3] ввели определение сложности однородных пространств, позднее распространенное Э. Б. Винбергом [V][4] на произвольные нормальные G-многообразия. Сложность действия

[1][Da] В. И. Данилов, Геометрия торических многообразий. Успехи математических наук, **33**:2 (1978), 85—134.

[2][Fu] W. Fulton, Introduction to toric varieties. Annals of Math. Studies, **131**, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1993.

[3][LV] D. Luna, Th. Vust, Plongements d'espaces homogènes. Commentarii Mathematici Helvetici, **58**:2 (1983), 186–245.

[4][V] Э. Б. Винберг, Сложность действий редуктивных групп. Функциональный анализ и его приложения, **20**:1 (1986), 1–13.

$G : X$ определяется как коразмерность типичной орбиты борелевской подгруппы B на многообразии X и обозначается $c(X)$. G-многообразия нулевой сложности называются *сферическими.* Известно, что орбиты на торических (сферических) многообразиях биективно отвечают (цветным) конусам рациональных полиэдральных (цветных) вееров. Отсюда вытекает, что любое торическое (соот. сферическое) многообразие содержит лишь конечное число орбит. Результаты статей Ф. Дж. Серведио [Ser][5], Д. Луны и Т. Вуста [LV] и Д. Н. Ахиезера [Akh1][6] позволяют заключить, что однородное пространство G/H сферично (по отношению к естественному действию группы G) тогда и только тогда, когда при любом вложении G/H в качестве плотной орбиты в неприводимое G-многообразие X это многообразие имеет лишь конечное число G-орбит. А именно, Ф. Дж. Серведио показал, что любое аффинное сферическое G-многообразие содержит конечное число G-орбит, Д. Луна, Т. Вуст и Д. Н. Ахиезер обобщили этот результат на произвольные сферические многообразия, и наконец, Д. Н. Ахиезер построил пример проективного вложения с бесконечным числом орбит для каждого однородного пространства положительной сложности. Э. Б. Винберг [V] и М. Брион [Br][7] независимо доказали, что на сферическом G-многообразии конечно число не только G-орбит, но и B-орбит. Отношение примыкания между B-орбитами здесь описывается разнообразными комбинаторными конструкциями, обобщающими порядок Брюа на группе Вейля.

Естественной числовой характеристикой, описывающей количество орбит данного действия, является его модальность $\mathrm{mod}(G, X)$. Так называют максимальное число параметров в непрерывном семействе G-орбит. В частности, условие $\mathrm{mod}(G, X) = 0$ равносильно конечности числа G-орбит в X. Понятие модальности впервые появилось в работах В. И. Арнольда по теории особенностей (подробно этот вопрос освещен в [AVG][8]). Дадим строгое определение.

Пусть G – аффинная алгебраическая группа, регулярно действующая на неприводимом алгебраическом многообразии X. Хорошо известно, что для точек x непустого открытого подмножества $W \subseteq X$ размерность орбиты $G \cdot x$ постоянна и принимает наибольшее возможное значение среди размерностей G-орбит на X. Определим число $d(G, X)$ как коразмерность в X G-орбиты точки $x \in W$. Согласно теореме Розенлихта, значение $d(G, X)$ совпадает со степенью трансцендентности поля $\mathbb{K}(X)^G$ рациональных инвариантов на

[5][Ser] F. J. Servedio, Prehomogeneous vector spaces and varieties. Transactions of the American Mathematical Society, **176** (1973), 421—444.

[6][Akh1] Д. Н. Ахиезер, О действиях с конечным числом орбит. Функциональный анализ и его приложения, **19**:1 (1985), 1–5.

[7][Br] M. Brion, Quelques propriétés des espaces homogènes sphériques. Manuscripta Mathematica, **55**:2 (1986), 191–194.

[8][AVG] В. И. Арнольд, А. Н. Варченко, С. М. Гусейн-Заде, Особенности дифференцируемых отображений, т. 1. М.: Наука, 1982.

многообразии X. Отметим, что условие $d(G, X) = 0$ означает, что действие $G : X$ обладает открытой орбитой, а сложность действия $c(X)$ совпадает с величиной $d(B, X)$. *Модальностью* $\mathrm{mod}(G, X)$ действия группы G на многообразии X называют максимальное значение $d(G, Y)$, где Y пробегает неприводимые G-инвариантные подмногообразия $Y \subseteq X$.

Понятие сложности действия связной редуктивной алгебраической группы на неприводимом алгебраическом G-многообразии X тесно связано с понятием его модальности. В работе Э. Б. Винберга [V] доказана формула $\mathrm{mod}(B, X) = c(X)$. Таким образом, модальность действия редуктивной группы не превосходит его сложности. В статье Д. Н. Ахиезера [Akh2][9] показано, что сложность действия в точности равна максимальной модальности в классе действий, бирационально изоморфных данному. В работах И. В. Аржанцева и Д. А. Тимашева [AT1][10] и И. В. Аржанцева [Ar1][11] изучаются аффинные вложения однородных пространств, то есть вложения G/H в качестве плотной орбиты в аффинные G-многообразия. В первой из этих статей описаны все аффинные однородные пространства, любое аффинное вложение которых содержит лишь конечное число орбит; во второй работе для аффинных однородных пространств найдено максимальное значение модальности по всем аффинным вложениям.

Ряд интересных результатов о конечности числа орбит получен в работе И. В. Аржанцева и Д. А. Тимашева [AT2][12]. Здесь рассматриваются канонические вложения однородных пространств вида G/P_u в качестве открытых орбит в многообразия $\mathrm{Spec}\,\mathbb{K}[G/P_u]$, где группа G связна и редуктивна, а P_u — унипотентный радикал некоторой параболической подгруппы в G. Показано, что действие группы G на указанном многообразии обладает бесконечным числом орбит во всех нетривиальных случаях и явно вычислено значение модальности.

Одной из проблем, рассмотренных в данной диссертации, является изучение замыканий орбит связной редуктивной группы G полупростого ранга один в векторных и проективных пространствах. В 1973 году В. Л. Попов [Po1] [13] классифицировал нормальные аффинные квазиоднородные многообразия относительно действия группы $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$. Нетрудно показать, что каждое такое многообразие содержит конечное число

[9] [Akh2] Д. Н. Ахиезер, О модальности и сложности действий редуктивных групп. Успехи математических наук, **43**:2 (1988), 129–130.

[10] [AT1] I. V. Arzhantsev, D. A. Timashev, Affine embeddings with a finite number of orbits, Transformation Groups, **6**:2 (2001), 101–110.

[11] [Ar] И. В. Аржанцев, О модальности и сложности аффинных вложений. Математический сборник, **192**:8 (2001), 47–52.

[12] [AT2] I. V. Arzhantsev, D. A. Timashev, On the canonical embeddings of certain homogeneous spaces. Lie Groups and Invariant Theory: A.L. Onishchik's jubilee volume, AMS Translations, Series 2, vol. 213 (2005), 63–83.

[13] [Po1] В. Л. Попов, Квазиоднородные аффинные алгебраические многообразия группы SL(2). Изв. АН СССР. Сер. матем., **37**:4 (1973), 792—832.

орбит. В работе [Po2] [14] В. Л. Попов получил явное описание структуры замыкания орбиты данного вектора в произвольном конечномерном рациональном SL_2-модуле. Поскольку такой модуль можно реализовать как прямую сумму векторных пространств бинарных форм фиксированных степеней, рассматриваемый вектор представляется набором бинарных форм, и замыкание орбиты описано в терминах этого набора. В работе Ф. Пауэра [Pa] [15] в аналогичных терминах описаны замыкания SL_2-орбит в проективизациях конечномерных рациональных SL_2-модулей. Здесь число орбит в замыкании данной орбиты не всегда конечно, и в работе [Pa] получен эффективный критерий конечности.

В более сложных случаях, нежели торические и сферические многообразия, нет общего описания структуры замыкания орбиты. Тем не менее, все еще имеет смысл вопрос о модальности таких действий, или по крайней мере о построении критериев конечности числа орбит в замыкании данной орбиты. Редуктивность основной группы дает исследователю мощные инструменты, такие как морфизм факторизации и теория представлений со старшим весом. Однако часть задач, поставленных в данной диссертации, предполагает изучение действий коммутативной унипотентной группы $\mathbb{G}_a^n = \underbrace{\mathbb{G}_a \times \ldots \times \mathbb{G}_a}_{n}$, где $\mathbb{G}_a$ — аддитивная группа основного поля $\mathbb{K}$. Как известно, при действии унипотентной группы на аффинном многообразии все орбиты замкнуты, поэтому вопрос о структуре замыканий орбит имеет смысл лишь в проективном случае. На первый взгляд эта группа кажется похожей на тор, однако, в отличие от торического случая, число орбит в замыканиях может быть бесконечно. Кроме того, теоремы, верные для редуктивных групп, теперь неприменимы, и необходимы новые методы исследования. Такой метод был предложен Б. Хассеттом и Ю. Чинкелем в работе [HT][16]. Им удалось построить взаимно однозначное соответствие между рациональными линейными циклическими представлениями группы $\mathbb{G}_a^n$ и локальными коммутативными конечномерными алгебрами с фиксированной системой порождающих. Эти данные определяют локально транзитивное $\mathbb{G}_a^n$-действие на замыкании орбиты прямой, порожденной циклическим вектором, в проективизации $\mathbb{P}(V)$ пространства V. Обратно, каждое локально транзитивное $\mathbb{G}_a^n$-действие на нормальном проективном многообразии реализуется таким образом.

Эффективность действия влечет $m \geq n$. В работе Б. Хассетта и Ю. Чинкеля подробно рассмотрен случай $m = n$ и построено взаимно

[14] [Po2] В. Л. Попов, Структура замыканий орбит в пространствах конечномерных линейных представлений группы SL_2. Математические заметки, **16** (1974), 1159–1162.

[15] [Pa] F. Pauer, Closure of $SL_2(\mathbb{C})$-orbits in projective spaces. Manuscripta Mathematica, **87** (1995), 295–309.

[16] [HT] B. Hassett, Yu. Tschinkel, Geometry of equivariant compactifications of $\mathbb{G}_a^n$. International Mathematics Research Notices, **20** (1999), 1211–1230.

однозначное соответствие между локально транзитивными действиями $\mathbb{G}_a^n : \mathbb{P}^n$ и локальными $\mathbb{K}$-алгебрами размерности $n+1$. Кроме того, показано, что для каждого n существует всего одно такое действие с конечным числом орбит.

Представив проективное пространство $\mathbb{P}^n$ как однородное пространство SL_{n+1}/P_1, можно связать локально транзитивные действия коммутативной унипотентной группы на других пространствах флагов с тематикой работы Б. Хассетта и Ю. Чинкеля. В связи с этим упомянем работы [Fe1][17], [Fe2][18] и [FF][19], в которых построено и исследовано плоское вырождение многообразия флагов G/P к многообразию с локально транзитивным $\mathbb{G}_a^n$-действием. Получено явное задание такого вырождения, на нем определена клеточная структура, изучены его особенности, найдены замечательные интерпретации геометрических свойств вырожденных многообразий флагов в теории представлений и комбинаторике.

Одна из основных целей данной диссертации — исследовать возможные значения модальности замыканий орбит для действий как редуктивных, так и унипотентных алгебраических групп на аффинных и проективных многообразиях. Также получен ряд классификационных и структурных результатов о таких действиях. В первую очередь отметим, что в диссертации решена задача, поставленная в работе Б. Хассетта и Ю. Чинкеля [HT, Question 3.1.3]: построить взаимно однозначное соответствие между локально транзитивными действиями группы $\mathbb{G}_a^n$ на невырожденной квадрике $Q_n \subset \mathbb{P}^{n+1}$ и некоторым классом алгебр соответствующей размерности. Показана единственность такого действия, что a priori неожиданно. В диссертации также продолжено исследование локально транзитивных действий группы $\mathbb{G}_a^n$ на проективном пространстве, в частности, изучается их модальность, и рассматриваются локально транзитивные действия на гиперповерхностях. Кроме того, получен критерий конечности, вычислена модальность и описана структура квазиоднородных многообразий для редуктивной группы $(\mathbb{C}^*)^k \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$.

В качестве основного поля $\mathbb{K}$ принимается произвольное алгебраически замкнутое поле характеристики нуль. Однако в первой главе мы ограничиваемся полем комплексных чисел $\mathbb{C}$, чтобы иметь возможность использовать аналитические методы.

Методы исследования

В работе применяются методы алгебраической геометрии, теории

[17][Fe1] E. Feigin, G_a^M-degeneration of flag varieties. arXiv 1007.0646 [math.AG] (2010) 24 pp.

[18][Fe2] E. Feigin. Degenerate flag varieties and the median Genocchi numbers. arXiv 1101.1898 [math.AG] (2011) 18 pp.

[19][FF] E. Feigin, M. Finkelberg. Degenerate flag varieties of type A: Frobenius splitting and BWB theorem. arXiv 1101.1491 [math.AG] (2011) 25 pp.

алгебраических групп преобразований, коммутативной алгебры и теории представлений редуктивных алгебраических групп.

Цель работы

Цель работы состоит в изучении модальности замыканий орбит при действиях редуктивных групп полупростого ранга один в конечномерных рациональных модулях и их проективизациях, а также при локально транзитивных действиях коммутативных унипотентных групп на проективных пространствах и проективных гиперповерхностях.

Научная новизна

Результаты диссертации являются новыми. Основные результаты работы следующие.

1. Решена задача описания локально транзитивных действий коммутативной унипотентной группы на невырожденной проективной квадрике, поставленная Б. Хассеттом и Ю. Чинкелем в 1999 г.

2. Получен критерий конечности числа орбит в замыканиях орбит редуктивных групп полупростого ранга один в конечномерных рациональных модулях и их проективизациях.

3. Дана полная классификация конечномерных локальных алгебр модальности один.

Теоретическая и практическая ценность

Работа имеет теоретический характер. Полученные в ней результаты могут найти примененение в алгебраической геометрии, теории алгебраических групп преобразований, коммутативной алгебре и теории представлений редуктивных алгебраических групп.

Апробация работы

Результаты диссертации докладывались на следующих конференциях и научно-исследовательских семинарах.

1. Семинар "Группы Ли и теория инвариантов"под руководством Э. Б. Винберга и А. Л. Онищика, мех-мат МГУ, апрель 2008 г.

2. Семинар "Algebraic Geometry"под руководством проф. Квака, Корея, Тэджон, KAIST, апрель 2009.

3. Научно-исследовательский семинар по алгебре, мех-мат МГУ, февраль 2011 г.

Публикации

Основные результаты диссертации опубликованы в трех работах автора [1-3], список которых приведен в конце автореферата.

Структура и объем работы

Диссертация состоит из введения и трех глав. Текст диссертации изложен на 68 страницах. Список литературы содержит 43 наименования.

Обзор работы

Во введении приводится исторический обзор результатов, связанных с темой диссертации, формулируются основные цели работы и кратко описывается ее содержание.

Первая глава

Первая глава посвящена изучению замыканий орбит связной редуктивной группы $G = (\mathbb{C}^*)^k \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ полупростого ранга один в векторных и проективных пространствах.

В первом разделе вводятся необходимые определения и обозначения. Каждое линейное представление группы G раскладывается в прямую сумму пространств бинарных форм фиксированной степени n_i, на каждом из которых тор $(\mathbb{C}^*)^k$ действует умножением на характер χ_i. Введя координаты в решетке характеров, мы отмечаем точки (n_i, χ_i) в "верхнем" полупространстве $\mathbb{Z}^k \times \mathbb{Z}_+$. По полученному набору в аффинном случае строится конус K — выпуклая оболочка лучей, соединяющих точки набора с началом координат, а в проективном — выпуклая оболочка C самого набора. Гранью набора называется его пересечение с некоторой гранью множества K в аффинном и C в проективном случае. Грань называется допустимой, если все множество K (или, соответственно, C) лежит "ниже" некоторой гиперплоскости, содержащей эту грань. При этом для каждой допустимой грани существует ортогональный ей и не ортогональный содержащим ее граням вектор $R = (r_1, \ldots, r_k, p)$, где $p < 0$. В проективном случае вектор R также должен быть направлен внутрь многогранника C. Допустимая грань, отвечающая вектору R, обозначается $I(R)$ в аффинном и $J(R)$ в проективном случае. Кроме того, любая бинарная форма представима в виде произведения линейных сомножителей, что позволяет сопоставить вектору v, замыкание орбиты которого мы изучаем, набор отображений кратности $e_i : \mathbb{C} \cup \{\infty\} \to \mathbb{Z}_+$, где значение отображения e_i в точке $a \in \mathbb{C}$ равно кратности множителя $ax + y$ в i-ой компоненте v_i вектора v, а $e_i(\infty) := \sum_{a \in \mathbb{C}} e_i(a)$. Для удобства мы будем обозначать через $(u_i)_{i \in I}$, $I \subset \{1, \ldots, s\}$

вектор $u \in V$, i-ая компонента которого равна 0 при $i \notin I$ и u_i при $i \in I$.

Во втором разделе главы вводятся инструменты, которые будут использованы в дальнейшем. Леммы 1.1 и 1.2 обобщают метод из работы [Pa], посвященной проективным представлениям группы $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$.

Построим в группе G борелевскую подгруппу B, являющуюся прямым произведением тора $(\mathbb{C}^*)^k$ и подгруппы верхнетреугольных матриц в группе $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$. Пусть $\gamma : \mathbb{C}^* \to B$ — кривая в B. Следующая лемма показывает, что любая B-орбита в $\overline{Bv}$ содержит точку $\lim\limits_{t\to 0} \gamma(t)v$ для кривой $\gamma(t)$ определенного вида.

Лемма 1.1. *Пусть $v \in V$ и $w \in \overline{Bv}$. Тогда существуют $p, q, r_1, \dots r_k \in \mathbb{Z}$ с $q < -p$, $c \in \mathbb{C}$ и многочлен $h(t) \in \mathbb{C}[t], h(0) = -1$, $\deg h < -p - q$ такие, что*

$$\lim_{t\to 0}(t^{r_1}, \dots t^{r_k}, \begin{pmatrix} t^p & ch(t)t^q \\ 0 & t^{-p} \end{pmatrix})v \in Bw.$$

Далее доказывается, что почти в каждой (кроме конечного числа) B-орбите из $\overline{Bv}$ содержится вектор стандартного вида $v(d, R)$, i-ая компонента которого равна $p_i(d)x^{n_i}$ при $i \in I(R)$ и 0 иначе. Здесь $p_i(d) = \prod\limits_{a\in\mathbb{C}, a\neq d} (a-d)^{e_i(a)}$ при $d \in \mathbb{C}$, а $p_i(\infty) = 1$.

Лемма 1.2. *Все векторы вида $v(d, R)$, где $e_i(d) = 0$ для всех $i \in I(R)$ и $R = (r_1, \dots, r_k, p)$, $p < 0$, лежат в $\overline{Bv}$ и попадают почти во все орбиты из $\overline{Bv}$.*

Эти технические леммы позволяют перейти от группы G к ее борелевской подгруппе B.

Лемма 1.3. *Число G-орбит в $\overline{Gv}$ конечно тогда и только тогда, когда конечно число B-орбит в $\overline{Bv}$.*

Неравенство из следующего предложения вытекает из работы [V].

Предложение 1.1. *При действии G на V для любого $v \in V$ выполнено* $\mathrm{mod}(\overline{Gv}, G) = \mathrm{mod}(\overline{Bv}, B) \le 1$.

Таким образом, модальность действия G на $\overline{Gv}$ не превосходит единицы, и задача вычисления модальности сводится к построению критерия конечности. Кроме того, при доказательстве лемм 1.1 и 1.2 в явном виде перечисляются представители всех, кроме конечного числа, G-орбит в $\overline{Gv}$, что позволяет описать структуру замыкания орбиты.

Третий раздел посвященкритерию конечности для линейных представлений. При этом используется следующий факт.

Предложение 1.2. *Пусть* $V = \mathbb{C}^m$ *и* k*-мерный тор* T *действует на* V *умножением* i*-ой координаты на характер* χ_i. *Тогда две точки* $x = (x_1, \dots x_m)$ *и* $y = (y_1, \dots y_m)$ *такие, что* $x_1 \dots x_m y_1 \dots y_m \neq 0$, *находятся в одной* T*-орбите тогда и только тогда, когда для любого* $\beta = (\beta_1, \dots \beta_m) \in \mathbb{Z}^m$ *такого, что* $\beta_1\chi_1 + \ldots + \beta_m\chi_m = 0$, *выполнено равенство* $x_1^{\beta_1} \dots x_m^{\beta_m} = y_1^{\beta_1} \dots y_m^{\beta_m}$.

Сам критерий конечности сформулирован в следующей теореме.

Теорема 1.1. *Число* G*-орбит в замыкании* G*-орбиты вектора*

$$v = (x^{n_i - e_i(\infty)} \prod_{a \in \mathbb{C}} (ax + y)^{e_i(a)})_{i=1}^s \in V$$

конечно тогда и только тогда, когда для любой допустимой грани $I(R)$ *максимальной размерности и любого* $\beta = (\beta_i)_{i \in I(R)}$ *такого, что* $\sum\limits_{i \in I(R)} \beta_i \chi_i = 0$, *выполнены условия*

$$\sum_{i \in I(R)} e_i(a)\beta_i = 0 \text{ для каждого } a \in \mathbb{C}.$$

Следствие 1.1 описывает все линейные представления, для которых замыкание любой орбиты содержит лишь конечное число орбит.

Следствие 1.1. *Пусть группа* G *регулярно действует в пространстве* V. *Тогда все замыкания* G*-орбит содержат лишь конечное число орбит тогда и только тогда, когда для любой допустимой грани* $I(R)$ *конуса* K *характеры* χ_i $(i \in I(R), n_i \neq 0)$ *линейно независимы над* $\mathbb{Q}$. *В частности, это верно, если конус* K *не содержит допустимых граней.*

В четвертом разделе рассматриваются проективные представления группы G.

Теорема 1.4. *Число* G*-орбит в замыкании* G*-орбиты точки*

$$\langle v \rangle = \langle (x^{n_i - e_i(\infty)} \prod_{a \in \mathbb{C}} (ax + y)^{e_i(a)})_{i=1}^s \rangle \in \mathbb{P}(V)$$

конечно тогда и только тогда, когда для любой допустимой грани $J(R)$ *максимальной размерности многогранника* C *и любого целочисленного вектора* $\beta = (\beta_i)_{i \in J(R)}$ *такого, что* $\sum\limits_{i \in J(R)} \beta_i \chi_i = 0$ *и* $\sum\limits_{i \in J(R)} \beta_i = 0$, *выполнены условия*

$$\sum_{i \in J(R)} e_i(a)\beta_i = 0 \text{ для каждого } a \in \mathbb{C}. \tag{2}$$

Следствие 1.2 описывает все проективные представления, для которых замыкание любой орбиты содержит лишь конечное число орбит.

Следствие 1.2. *Пусть группа G регулярно действует в пространстве $\mathbb{P}(V)$. Тогда все замыкания G-орбит содержат лишь конечное число орбит тогда и только тогда, когда для любой допустимой грани $J(R)$ многогранника C характеры $\hat{\chi}_i$ ($i \in J(R)$, $n_i \neq 0$) линейно независимы над $\mathbb{Q}$.*

Вторая глава

Во второй главе изучаются локально транзитивные действия коммутативной унипотентной группы $\mathbb{G}_a^n$ на проективном пространстве $\mathbb{P}^n$. Первый и второй разделы главы содержат результаты и методы Б. Хассетта и Ю. Чинкеля, которые активно используются далее. Именно, в первом разделе описывается взаимно однозначное соответствие между рациональными линейными циклическими представлениями группы $\mathbb{G}_a^n$ и локальными коммутативными конечномерными алгебрами с фиксированной системой порождающих.

Теорема 2.2. *Существует взаимно однозначное соответствие между:*

1. *классами изоморфизмов точных циклических рациональных представлений $\rho : \mathbb{G}_a^n \to \mathrm{GL}_{m+1}(\mathbb{K})$;*
2. *классами изоморфизма пар (R, U), где R — локальная алгебра размерности $m+1$ над $\mathbb{K}$ с максимальным идеалом $\mathfrak{m}$, и $U \subset \mathfrak{m}$ — подпространство размерности n, порождающее алгебру R.*

Во втором разделе описано применение этой теоремы для исследования локально транзитивных действий группы $\mathbb{G}_a^n$ на проективном пространстве $\mathbb{P}^n$. Теорема 1.2. позволяет определить локально транзитивное $\mathbb{G}_a^n$-действие на замыкании орбиты прямой, порожденной циклическим вектором, в проективизации $\mathbb{P}(V)$ пространства V, что при $m = n$ приводит к взаимно однозначному соответствию из следующей теоремы.

Теорема 2.3. [Proposition 2.15, H-T]. *Имеется взаимно однозначное соответствие между:*

1. *локально транзитивными действиями группы $\mathbb{G}_a^n$ на $\mathbb{P}^n$;*
2. *локальными алгебрами $\mathbb{K}$-размерности $n+1$.*

Также в этом разделе явно перечислены все локальные алгебры, размерность которых не превосходит пяти, и отвечающие им действия. Число алгебр размерности 6 также конечно, а алгебры фиксированной размерности ≥ 7 уже образуют бесконечные семейства. Отметим также единственность действия нулевой модальности в каждой размерности.

Предложение 2.1. [Proposition 3.7, H-T] *Для любого натурального числа n на проективном пространстве $\mathbb{P}^n$ существует единственное локально транзитивное действие группы $\mathbb{G}_a^n$ с конечным числом орбит. Ему отвечает алгебра*

$$R_n = \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]/(x_1^i - x_i, x_j x_k \| i = 1, \ldots, n, j + k > n).$$

Последующие разделы главы содержат результаты, полученные автором диссертации. В третьем разделе модальность действия группы $\mathbb{G}_a^n$ на проективном пространстве $\mathbb{P}^m$ интерпретируется алгебраически, что позволяет построить общие оценки значения модальности локально транзитивного действия $\mathbb{G}_a^n : \mathbb{P}^n$. Соответствие Хассетта-Чинкеля позволяет корректно определить модальность $\mathrm{mod}(R)$ алгебры R. Итак, построив локальную алгебру R с единственным максимальным идеалом $\mathfrak{m}$, отвечающую этому действию, можно утверждать, что

1. $0 \leq \mathrm{mod}(\mathbb{G}_a^n, \mathbb{P}^n) \leq n - 1$, причем оба крайних значения достигаются;
2. $\mathrm{mod}(R) \geq \dim \mathfrak{m}^i / \mathfrak{m}^{i+1} - 1$ для всех i (предложение 2.4);
3. если $\mathrm{mod}(R) = l$, то R порождается $l+1$ элементом, и $\dim \mathrm{zoc}(\mathfrak{m}) \leq l+1$, где $\mathrm{zoc}(\mathfrak{m})$ — это цоколь идеала $\mathfrak{m}$ (следствие 2.1);
4. Если I — идеал в алгебре R, то $\mathrm{mod}(R/I) \leq \mathrm{mod}(R)$(предложение 2.5).

В этом же разделе вычисляется модальность всех алгебр, размерность которых не превосходит пяти.

В четвертом разделе классифицируются алгебры модальности 1. Выясняется, что такие алгебры образуют два двухпараметрических и четыре однопараметрических семейства, и кроме того, существует две исключительные алгебры модальности 1.

Теорема 2.4. *Локальные конечномерные алгебры модальности один исчерпываются следующим списком:*

$A_{a,b} = \mathbb{K}[x, y]/(x^{a+1}, y^{b+1}, xy),\ a \geq b \geq 1; B_{a,b} = \mathbb{K}[x, y]/(xy, x^a - y^b),\ a \geq b \geq 2;$

$$C_a = \mathbb{K}[x,y]/(x^{a+1}, y^2 - x^3),\ a \geq 3; \quad C_a^1 = \mathbb{K}[x,y]/(x^{a+1}, y^2 - x^3, x^a y),\ a \geq 3;$$

$$C_a^2 = \mathbb{K}[x,y]/(x^{a+1}, y^2 - x^3, x^{a-1} y),\ a \geq 3; \quad C_a^3 = \mathbb{K}[x,y]/(y^2 - x^3, x^{a-2} y),\ a \geq 4;$$

$$D = \mathbb{K}[x,y]/(x^3, y^2); \quad E = \mathbb{K}[x,y]/(x^3, y^2, x^2 y).$$

Указанные в этом списке алгебры попарно неизоморфны.

Следствие 2.4. *При $n \geq 5$ существует ровно $n+1$ неизоморфных алгебр модальности 1, при $n = 1$ таких алгебр нет, при $n = 2$ она единственна, при $n = 3$ их две, а при $n = 4$ — четыре. В частности, для каждого натурального n имеется лишь конечное число классов изоморфизма локально транзитивных $\mathbb{G}_a^n$-действий на $\mathbb{P}^n$ модальности один.*

Из теоремы 2.4 вытекает конечность числа алгебр модальности 1 в каждой размерности. Для алгебр модальности 2 это уже неверно: можно построить бесконечное семейство семимерных алгебр модальности 2, что проделано в замечании 2.4.

В пятом разделе показана единственность алгебры максимальной модальности $n-1$ в каждой размерности.

Предложение 2.6. *Для любого n существует единственная алгебра размерности $n+1$ и модальности $n-1$. Это алгебра $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]/(x_1, \ldots, x_n)^2$.*

Также в этом разделе рассматриваются некоторые комбинаторные аспекты понятия модальности в случае, когда алгебра R имеет вид $\mathbb{K}[x,y]/I$, где I — мономиальный идеал.

Третья глава

В Главе 3 рассматриваются действия группы $\mathbb{G}_a^n$ в пространстве $\mathbb{P}^{n+1}$. При этом замыканием орбиты прямой, порожденной циклическим вектором, будет некоторая гиперповерхность, изучению которой и посвящена глава. Каждому такому действию отвечает пара (R, U), где n-мерное подпространство U максимального идеала $\mathfrak{m}$ локальной $(n+2)$-мерной алгебры R порождает эту алгебру.

В первом и втором разделах решается задача, поставленная в работе [HT]: описать все локально транзитивные действия группы $\mathbb{G}_a^n$ на невырожденной проективной квадрике $Q_n \subset \mathbb{P}^{n+1}$, сопоставив каждому из них локальную алгебру размерности $n+2$.

В первом разделе эта задача переформулируется. Показано, как она связана с соответствием Хассетта-Чинкеля и каким требованиям должны удовлетворять локальные алгебры, отвечающие действиям на невырожденной квадрике.

Предложение 3.1. *Группа автоморфизмов невырожденной квадрики имеет вид* $\operatorname{Aut} Q_n = \operatorname{PSO}(n+2)$.

Следствие 3.1. *Любое действие группы $\mathbb{G}_a^n$ на квадрике $Q_n \subset \mathbb{P}^{n+1}$ поднимается до ортогонального представления группы $\mathbb{G}_a^n$ в пространстве $\mathbb{K}^{n+2}$.*

Указанное поднятие действия позволяет воспользоваться соответствием Хассетта-Чинкеля и сопоставить каждому действию на проективной квадрике некоторую локальную алгебру. Теперь надо выделить среди локальных алгебр соответствующей размерности те, которым отвечает некоторое действие на квадрике.

Будем называть *n-фактором* факторалгебру R алгебры многочленов $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$, в которой образы элементов $x_1, \ldots, x_n$ линейно независимы. Заметим, что алгебра является n-фактором, если ее можно породить n линейно независимыми элементами. Рассмотрим пару (ρ, v), где ρ — точное представление группы $\mathbb{G}_a^n$ в пространстве $V = \mathbb{K}^{n+2}$, а v — циклический вектор этого представления. Соответствие Хассетта-Чинкеля сопоставляет этой паре локальную $(n+2)$-мерную алгебру R, которая является n-фактором.

Базис $\{\mu_1, \ldots, \mu_{n+2}\}$ n-фактора R как векторного пространства называется *правильным*, если $\mu_1 = 1$, вектор μ_{n+2} выражается в виде многочлена от остальных базисных векторов, и любая степень максимального идеала $\mathfrak{m}$ является линейной оболочкой некоторых векторов этого базиса. Несложно понять, что такой базис существует в любой локальной конечномерной алгебре; в дальнейшем мы будем считать, что в алгебре введен именно такой базис.

Лемма 3.1. *Среди локальных алгебр R размерности $n+2$ с носителем в нуле n-факторами являются все, кроме*

$$R_1 = \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_{n+1}]/(x_i x_j | i, j = 1, \ldots, n+1).$$

Лемма 3.2. *Пусть локальная алгебра R размерности $n+2$ является n-фактором. Замыкание $\mathbb{G}_a^n$-орбиты точки $\langle 1 \rangle \in \mathbb{P}(R)$ будет невырожденной* *квадрикой тогда и только тогда, когда найдется невырожденная квадратичная форма q на R, относительно которой представление ρ ортогонально, а вектор* 1 *изотропен.*

Будем считать базисные векторы μ_i, $i = 2, \ldots, n+1$, образами порождающих элементов x_i алгебры $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$. Можно изменить набор $\{x_i\}$ так, что получившийся базис алгебры R будет правильным.

Лемма 3.3. *Представление ρ ортогонально тогда и только тогда, когда билинейная форма B, отвечающая квадратичной форме q, кососимметрична относительно операторов умножения на μ_i в алгебре R, то есть*

$$B(\mu_i x, y) + B(x, \mu_i y) = 0 \text{ при } i = 2, \ldots, n+1, x, y \in R.$$

Итак, для изучения локально транзитивных действий на невырожденной проективной квадрике нужно вводить в соответствующей алгебре симметричную билинейную $\mathbb{G}_a^n$-инвариантную форму. Во втором разделе при помощи этой идеи показано, что на каждой невырожденной квадрике Q_n существует единственное локально транзитивное действие группы $\mathbb{G}_a^n$.

Пусть $(n+2)$-мерная алгебра R является n-фактором, и в ней задан правильный базис $\{\mu_i\}$. Заметим, что если $\dim \mathfrak{m}^2 = 1$ и $\mathfrak{m}^2 = \langle \mu_{n+2} \rangle$, то в пространстве R можно определить следующую билинейную форму B_0:
$B_0(\mu_1, \mu_i) = -\delta_{i,n+2}$;
$B_0(\mu_i, \mu_{n+2}) = -\delta_{i1}$;
$B_0(\mu_i, \mu_j) = a_{ij}$, где $\mu_i \mu_j = a_{ij} \mu_{n+2}$ при $i, j = 2, \ldots, n+1$, а δ_{ij} — символ Кронекера.

Предложение 3.2. *Замыкание орбиты прямой $\langle v \rangle \in \mathbb{P}^{n+1}$, порожденной циклическим вектором v, будет невырожденной квадрикой тогда и только тогда, когда в соответствующей конечномерной алгебре* $\dim \mathfrak{m}^2 = 1$ *и форма B_0 невырождена. При этом замыкание орбиты задается уравнением $B_0(u, u) = 0$.*

Далее доказывается, что если алгебра R является n-фактором, то любая невырожденная билинейная инвариантная форма B, относительно которой единица алгебры изотропна, пропорциональна форме B_0, и $\dim \mathfrak{m}^2$=1. Этот промежуточный результат позволяет проверить, что все алгебры R такого вида попарно изоморфны.

Теорема 3.1. *Для любого n существует единственная (с точностью до изоморфизма) пара $(\tilde{\rho}, v)$, где $\tilde{\rho}$ — проективное представление группы $\mathbb{G}_a^n$ в пространстве $\mathbb{P}^{n+1}$, а v — циклический вектор в этом пространстве,* *такая, что замыканием орбиты прямой* $\langle v\rangle$ *является невырожденная квадрика. Ей отвечает алгебра* $A_n = \mathbb{K}[x_1,\dots,x_n]/(x_k^2 - x_l^2, x_i x_j \mid k,l = 1,\dots,n, i\neq j)$.

В третьем разделе каждому локально транзитивному действию группы $\mathbb{G}_a^n$ в проективном пространстве $\mathbb{P}^n$ или на невырожденной квадрике $Q_n \subset \mathbb{P}^{n+2}$ сопоставляется коммутативная унипотентная подгруппа в группе SL_{n+1}, или, соответственно, SO_{n+2}. В предложении 3.3 показано, что эта подгруппа является максимальной в классе унипотентных коммутативных подгрупп соответствующей группы.

Предложение 3.3. *Пусть* X *— неприводимое алгебраическое многообразие, и* $G \subseteq \mathrm{Aut}(X)$ *— конечномерная коммутативная алгебраическая подгруппа, действующая на* X *с открытой орбитой. Тогда* G *— максимальная коммутативная подгруппа в* $\mathrm{Aut}(X)$.

Кроме того, приводится пример максимальной унипотентной коммутативной подгруппы в SO_{n+2}, отвечающее которому действие на квадрике не является локально транзитивным.

В четвертом разделе рассматриваются вырожденные квадрики. Ясно, что любой $(n + 2)$-мерной локальной алгебре, квадрат максимального идеала которой одномерен, можно сопоставить квадрику — замыкание орбиты прямой, порожденной вектором 1. Эта квадрика может оказаться вырожденной. Кроме того, вырожденная квадрика может быть замыканием орбиты и при действии, отвечающем алгебре другого вида. Таким образом, в отличие от невырожденного случая, вырожденная квадрика не определяет локальную алгебру однозначно.

Будем называть *H-парой* пару (R, U) из теоремы 2.2, в которой U является гиперплоскостью в $\mathfrak{m}$. Такая пара отвечает локально транзитивному $\mathbb{G}_a^n$-действию на гиперповерхности в $\mathbb{P}^{n+1}$. Степень соответствующей гиперповерхности назовем *степенью* H-пары (R, U). H-пары степени два будем называть *квадратичными*.

В разделе изучаются свойства квадратичных H-пар. В частности, приводится критерий квадратичности H-пары.

Теорема 3.2. *H-пара* (R, U) *квадратична тогда и только тогда, когда идеал* $\mathfrak{m}^3$ *содержится в* U.

В пятом разделе рассматриваются произвольные гиперповерхности, и теорема 3.2 обобщается до следующего результата.

Теорема 3.3 *Степень H-пары* (R, U) *равна наибольшему значению* d, *для которого идеал* $\mathfrak{m}^d$ *не содержится в подпространстве* U.

Следствие 3.4. *Пусть X — замыкание открытой орбиты эффективного действия группы $\mathbb{G}_a^n$ в пространстве $\mathbb{P}^{n+1}$. Тогда $\deg X \le n+1$.*

Наконец, шестой раздел посвящен вычислению модальности действий на квадриках.

Предложение 3.5. *Модальность локально транзитивного действия группы $\mathbb{G}_a^n$ на Q_n равна $n-2$ при $n \ge 2$ и нулю при $n=1$.*

Следствие 3.5. *Число орбит локально транзитивного действия $\mathbb{G}_a^n$ на Q_n конечно тогда и только тогда, когда $n \le 2$.*

Для вырожденной квадрики $Q(n,k)$, заданной формой ранга k, предлагается следующая оценка модальности всевозможных действий группы $\mathbb{G}_a^n$.

Предложение 3.6. $k-2 \le \operatorname{mod}(\mathbb{G}_a^n, Q(n,k)) \le n-1$.

Автор выражает благодарность своему научному руководителю д. ф.-м. н. И. В. Аржанцеву за постановку задач, полезные обсуждения и советы при подготовке работы, д. ф.-м. н. профессору Ю. Г. Прохорову за обсуждение работы, а также всему коллективу кафедры высшей алгебры механико-математического факультета МГУ, в особенности д. ф.-м. н. профессору Э. Б. Винбергу, к. ф.-м. н. Д. А. Тимашеву и д. ф.-м. н. профессору А. Л. Шмелькину, за все, чему они меня научили.

Публикации автора по теме диссертации

1. Е. В. Шаройко, *О конечности числа орбит на квазиоднородных $(\mathbb{C}^*)^k \times SL_2(\mathbb{C})$-многообразиях*, Мат. заметки **81** (2007), № 5, с. 766–775.

2. Е. В. Шаройко, *Соответствие Хассетта-Чинкеля и автоморфизмы квадрики*, Мат. сборник **200** (2009), № 11, с. 145–160.

3. И. В. Аржанцев, Е. В. Шаройко, *Локальные алгебры и действия унипотентных групп*, Деп. в ВИНИТИ № 624-В2010 от 27.10.10, 12 страниц. (Диссертанту принадлежат результаты, полученные в разделах 1 и 3. Результаты из разделов 2, 4 и 5 получены авторами совместно.)