Московский государственный университет
имени М.В. Ломоносова
механико-математический факультет

На правах рукописи

Рахмонов Фируз Заруллоевич

Асимптотическая формула в проблеме Варинга–Гольдбаха со сдвинутыми простыми числами

01.01.06 - математическая логика, алгебра и теория чисел

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва – 2011

Работа выполнена на кафедре математического анализа механико-математического факультета Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова.

Научный руководитель:	доктор физико–математических наук, профессор Чубариков Владимир Николаевич
Официальные оппоненты:	доктор физико–математических наук, профессор Гриценко Сергей Александрович
	кандидат физико–математических наук, доцент Постникова Людмила Петровна
Ведущая организация:	Тульский государственный педагогический университет им. Л.Н. Толстого

Защита диссертации состоится 16 декабря 2011 г. в 16 ч. 45 мин. на заседании диссертационного совета Д 501.001.84 при Московском государственном университете имени М.В. Ломоносова по адресу: Российская Федерация, 119991, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, дом 1, МГУ, механико-математический факультет, аудитория 14-08.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке механико-математического факультета МГУ (Главное здание МГУ, 14 этаж).

Автореферат разослан 14 ноября 2011 г.

Ученый секретарь диссертационного
совета Д 501.001.84 при МГУ
доктор физико-математических наук,
профессор А.О.Иванов

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Настоящая диссертация является исследованием в аналитической теории чисел, относящаяся к области аддитивной теории чисел. В аддитивной теории чисел изучаются вопросы о представлении некоторой последовательности натуральных чисел суммой ограниченного количества слагаемых заданного вида, и исторически первыми примерами подобных задач стали:

- тернарная проблема Гольдбаха (1742 г.) о представлении нечетных чисел суммой трех простых слагаемых;
- проблема Эйлера (1742 г.)(или бинарная проблема Гольдбаха) о представлении четных чисел в виде суммы двух простых;
- теорема Лагранжа о представлении натуральных чисел суммой не более четырех квадратов натуральных чисел;
- проблема Варинга[1] (1770 г.) являющаяся обобщением теоремы Лагранжа, которая утверждает, что последовательность, образованная фиксированной степенью n чисел натурального ряда, образует в нем базис конечного порядка $G(n)$, т.е. что каждое достаточно большое натуральное число N может быть представлено в виде

$$x_1^n + x_2^n + \ldots + x_r^n = N,$$

  где $x_1, x_2, \ldots, x_r$ — натуральные числа и количество слагаемых r не превосходит фиксированной величины $G(n)$, называемой порядком базиса последовательности $\{x^n\}$, или функцией Харди;
- поставленная в начале 19-го века проблема о том, что фиксированная степень n простых чисел p при любом натуральном n образует базис конечного порядка $V(n)$ в натуральном ряде. Вновь постановка этой проблемы появилась в работе П. Эрдёша[2]. Другими словами, предполагалось, что каждое достаточно большое натуральное N может быть представлено в виде

$$N = p_1^n + p_2^n + \cdots + p_k^n,$$

  где $p_1, p_2, \ldots, p_k$ — простые числа и $k \le V(n)$. Данная задача называется проблемой Гольдбаха – Варинга, поскольку обобщает, с одной стороны, проблему Гольдбаха о представлении числа суммой простых чисел, а с другой стороны — проблему Варинга о представлении числа суммой степеней натуральных чисел.

---

[1] Waring E. Meditationes algebraicae. Cambridge. 1770.

[2] Erdösh P. On the easier Waring problem for powers of primes. I. // Proc. of the Cambridge Phil. Soc., January 1937, V. XXXIII, Part I, p. 6–12.

- теорема Эстермана [3] о представлении натурального числа $N > N_0$ в виде $p_1 + p_2 + m^2 = N$, p_1 и p_2–простые числа, m–целое число.

И.М.Виноградов[4,5] в 1937 г. создал метод оценок тригонометрических сумм с простыми числами. Он обнаружил, что суммы по простым числам могут быть составлены путем только сложений и вычитаний из сравнительно небольшого числа других сумм (решето Виноградова), хорошие оценки которых могут быть получены с помощью метода оценок двойных сумм и средств, не имеющих какого–либо отношения к теории функции $\zeta(s)$ или L–рядов (метод сглаживания двойных сумм). Пользуясь этим методом, он впервые получил нетривиальную оценку линейной тригонометрической суммы

$$S(\alpha, x) = \sum_{p \leq x} e(\alpha p).$$

Полученная оценка для $S(\alpha, x)$ в соединении с теоремами о распределении простых чисел в арифметических прогрессиях, позволила вывести асимптотическую формулу для числа представлений нечетного N в виде

$$N = p_1 + p_2 + p_3,$$

следствием которого является *тернарная проблема Гольдбаха о представлении нечетного натурального числа как суммы трех простых чисел.*

В том же 1937 г. И.М.Виноградов с помощью указанного соображения с последующим применением метода Г.Вейля получил оценку суммы

$$S'(f) = \sum_{p \leq x} e\left(f(p)\right), \qquad f(t) = \alpha_m t^m + \alpha_{m-1} t^{m-1} + \ldots + \alpha_l t,$$

Ю.В.Линник[6] с помощью идей Г.Харди и Д.Литтлвуда, применявшихся ранее в проблеме Гольдбаха и плотностых теоремах для нулей $L-$рядов Дирихле, дал новый вариант нетривиальной оценки тригонометрической суммы $S(\alpha, x)$. Тем самым Ю.В.Линником было дано новое доказательство теоремы И.М.Виноградова о трех простых числах (проблема Гольдбаха). Н.Г.Чудаков[7] также предложил подобный метод исследования тригонометрических сумм $S(\alpha, x)$ с помощью оценки средних значений функций Чебышева, получение которой в свою очередь основывается на распределении нулей L–рядов Дирихле в критической полосе.

[3] Estermann T. Proof that every large integer is the sum of two primes and square // Proc. London math.Soc., 11(1937), pp. 501-516.

[4] Виноградов И.М. Избранные труды. — М.: Изд-во АН СССР, 1952.

[5] Виноградов И.М. Особые варианты методов тригонометрических сумм. — М.: Наука, 1976.

[6] Линник Ю.В. Новое доказательство теоремы Гольдбаха-Виноградова // Мат. сборник, 1946, т. 19, вып. 1, стр. 3-8.

[7] Чудаков Н.Г. On Goldbach-Vinogradof′s theorem // Ann of Math.,1947, 48, p.515-545.

Бинарная проблема Гольдбаха до сих пор не решена. Лучший современный результат, наиболее близко подходящий к доказательству этой проблемы, принадлежит Дж.Р.Чену[8]. В этой знаменитой работе он доказал, что каждое четное число N представимо в виде

$$p + P_2 = N,$$

где P_2-простое число или произведение двух простых чисел.

В XIX веке *проблема Варинга* была доказана для отдельных значений n, но реального прогресса на пути к решению проблемы удалось достичь только в XX веке. В 1909 г. эту проблему решил Д.Гильберт[9], тем самым он установил существование функции $G(n)$.

В 1938 г. Хуа Ло Ген[10], пользуясь оценкой И.М.Виноградова для тригонометрических сумм с простыми числами, доказал асимптотическую формулу для числа представлений достаточно большого натурального числа N в виде суммы пяти квадратов простых чисел и показал, что особый ряд этой формулы больше абсолютной положительной постоянной при $N \equiv 5(mod 24)$. Тем самым Хуа Ло Ген доказал, что всякое достаточно большое натуральное число $N \equiv 5(mod 24)$ является суммой пяти простых квадратов.

А в 1948 –1956 гг. И.М.Виноградов, используя вместо метода Г.Вейля свой метод тригонометрических сумм, доказал общую теорему об оценке суммы $S'(f)$. С помощью этой теоремы и упрощенной верхней границы в теореме о среднем нашел асимптотическую формулу в проблеме Гольдбаха – Варинга, о том, что каждое достаточно большое натуральное N может быть представлено в виде

$$N = p_1^n + p_2^n + \cdots + p_k^n,$$

где $p_1, p_2, \ldots, p_k$ — простые числа.

В асимптотической формуле И.М. Виноградова вопрос о положительности особого ряда $\sigma = \sigma(k; N)$, то есть вопрос о существовании функции $V(n)$ и ее верхней оценки в зависимости только от значения параметра n до 2009 г. оставался открытым и, следовательно, проблема Гольдбаха – Варинга в полном объеме до самого последнего времени оставалась нерешенной.

---

[8]Chen J.R. On the representation of a large even integer as the sum of a prime and the product of at most two primes // Kexue Tongbao, 1966, v.17, p.385-Ч386.

[9]Гильберт Д. Избранные труды. Т.1. Теория инвариантов. Теория чисел. Алгебра. Геометрия. Основания математики. –М.: Изд-во "Факториал 1998. – 575с.

[10]Hua L.K. Some results in the additive prime number theory // Quart J Math (Oxford), 1938, 9: 68–80

В.Н.Чубариков[11, 12, 13, 14] создал теорию кратных тригонометрических сумм с простыми числами, являющуюся дальнейшим развитием метода оценок тригонометрических сумм с простыми числами И.М.Виноградова, и решил проблему Гильберта – Камке в простых числах. В.Н. Чубариков указал арифметические условия, позволяющие свести эту проблему к исследованию разрешимости в p – адических числах при всех $p < 2n$ некоторой системы уравнений варинговского типа. Использование подобных арифметических условий разрешимости позволили ему полностью решить и проблему Гольдбаха – Варинга. Он доказал:

Теорема (В.Н. Чубариков[15]). *Пусть $n \geq 2$ — фиксированное натуральное число, $p_1, p_2, \dots, p_k$ — пробегают значения простых чисел, превосходящих $2n$. Тогда существует функция $V(n)$ такая, что при $k \leq V(n)$ для всех достаточно больших N имеет место представление*

$$N = p_1^n + p_2^n + \dots + p_k^n.$$

Более того, справедливы неравенства

$$n + M(n) < V(n) \leq M(n) + G_1(n) - 1,$$
$$G_1(n) \leq 4n \ln n + 16 \ln\ln n + 8n,$$
$$M(n) = \begin{cases} 2 \prod\limits_{p \leq 2n} p^{\alpha+1}, & \textit{если } n \textit{ – четное;} \\ 0, & \textit{если } n \textit{ – нечетное,} \end{cases}$$

где функция $\alpha = \alpha(n, p)$ определяется из соотношения $p^\alpha \| n$, $(p-1) \mid n$.

Цель работы. Целью работы является изучение поведения тригонометрических сумм с простыми числами, точное вычисление и оценка снизу особого ряда, а также их приложение в асимптотической формуле для количества представлений натурального числа в виде суммы пяти квадратов сдвинутых простых чисел.

Методика исследований. В работе используются методы аналитической теории чисел, в том числе

- методы L – рядов Дирихле, методы Ю.В. Линника и Н.Г.Чудакова, основанные на плотности нулей L – рядов Дирихле в критической полосе;

---

[11] Чубариков В.Н. Кратные тригонометрические суммы с простыми числами // ДАН СССР, 1984, т.278, №2, с.302-304.

[12] Чубариков В.Н. Оценки кратных тригонометрических сумм с простыми числами // Изв. АН СССР, сер. мат., 1985, т.49, №5. с. 1031-1067.

[13] Чубариков В.Н. Об одновременном представлении натуральных чисел суммами степеней простых чисел // ДАН СССР. 1986, т.286, №4. С.828-831.

[14] Чубариков В.Н. Многомерная аддитивная задача с простыми числами // ДАН СССР. 1986, т.290, №4, с.805-808.

[15] Чубариков В.Н. К проблеме Варинга-Гольдбаха В. Н. Чубариков // Доклады Академии наук. – 2009. – Т.427, №1, с. 24-27

- метод оценок тригонометрических сумм с простыми числами И.М.Виноградова;
- метод Ван дер Корпута об оценке специальных тригонометрических сумм и интегралов;
- круговой метод Г.Харди, Д.Литтлвуда и С.Рамануджана в форме тригонометрических сумм И.М.Виноградова.

Научная новизна. Основные результаты диссертации являются новыми и состоят в следующем:

- изучено поведение тригонометрической суммы с простыми числами

$$S_m(\alpha; x, k) = \sum_{n\le x} \Lambda(n) e(\alpha(n+k)^m),$$

  когда α приближается рациональным числом с маленьким знаменателем и устанавлена ее связь с плотностными теоремами для нулей L–рядов Дирихле в коротких прямоугольниках критической полосы;
- получена оценка сверху для модуля квадратичной тригонометрической суммы с простыми числами $S_2(\alpha; x, 1)$, когда α приближается рациональным числом с большим знаменателем;
- исследован особый ряд

$$\mathfrak{S}(N) = \sum_{q=1}^{\infty} \frac{1}{\varphi^5(q)} \sum_{\substack{a=0\\(a,q)=1}}^{q} \left(\sum_{\substack{n=1\\(n,q)=1}}^{q} e\left(\frac{a(n+1)^2}{q}\right)\right)^5 e\left(-\frac{aN}{q}\right),$$

  асимптотической формулы для количества представлений достаточно большого натурального числа N в виде суммы пяти квадратов сдвинутых простых чисел вида $p+1$ и найдено арифметическое условие, при выполнении которого этот особый ряд больше абсолютной положительной постоянной, зависящей только от N;
- доказана асимптотическая формула для количества представлений достаточно большого натурального числа N в виде суммы пяти квадратов сдвинутых простых чисел вида $p+1$.

Практическая и теоретическая ценность работы. Работа носит теоретический характер. Результаты диссертации и методика их получения могут быть применены при решении задач теории чисел, в том числе аддитивных проблем.

Апробация работы. Результаты диссертации докладывались на научных семинарах по аналитической теории чисел под руководством Г.И.Архипова и В.Н.Чубарикова на механико–математическом факультете МГУ им. М.В.Ломоносова, на VIII Международной конференции "Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения", посвященная 190-летию П.Л.Чебышева и 120-летию И.М.Виноградова в Саратове, 12-17 сентября 2011 г.

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в двух научных работах, список которых приведен в конце автореферата.

Структура и объём работы. Диссертация состоит из оглавления, списка обозначений, введения, трех глав и списка литературы, включающего 38 наименований. Объём диссертации составляет 95 страниц компьютерной вёрстки в редакторе математических формул LaTeX.

Содержание диссертации

Во введении излагается история вопроса и приводится краткий обзор результатов, связанных с темой диссертации. Также во введении формулируются основные результаты диссертации и кратко описывается ее содержание.

Первая глава диссертации состоит из трех параграфов и посвящена исследованию поведения тригонометрических сумм с простыми числами вида

$$S_m(\alpha; x, k) = \sum_{n \le x} \Lambda(n) e(\alpha(n+k)^m),$$

$$\alpha = \frac{a}{q} + \lambda, \quad (a,q) = 1, \quad |\lambda| \le \frac{1}{q\tau}, \quad 1 \le q \le \tau,$$

$m-$фиксированное натуральное число.

Первый параграф носит вспомогательный характер, в нем приведены известные результаты, которые используются в последующих параграфах.

Во втором параграфе этой главы изучается поведение тригонометрических сумм с простыми числами $S_m(\alpha; x, k)$, когда α приближается рациональным числом с маленьким знаменателем и устанавливается его связь с плотностными теоремами для нулей $L-$рядов Дирихле в коротких прямоугольниках критической полосы.

Определение. *Пусть* $c \ge 2$, $\theta < 1$ *и* $B \ge 1$ *абсолютные постоянные,* $T \ge T_0 > 0$, $H \ge T^\theta$, *тогда оценка вида*

$$\sum_{\chi} [N(\alpha, T+H, \chi) - N(\alpha, T, \chi)] \ll (qT)^{c(1-\alpha)} (\ln qT)^B \qquad (1)$$

называется плотностной теоремой в коротких прямоугольниках критической полосы для нулей L – рядов Дирихле по модулю q.

Теорема 1.1. *Пусть* $x \geq x_0$, $\tau \geq x^{m-\frac{1}{c}}\exp(\ln^{0,76} x)$, $q \leq x^{\frac{2}{3c}}\exp\left(-\ln^{0,76} x\right)$, $b > (B+3)(m+1)$ *– произвольное фиксированное число, k – фиксированное натуральное число,*

$$F(q,x) = \begin{cases} \exp(-\ln^4 \ln x), & \text{если } q \leq (\ln x)^b, \\ (\ln x)^{B+3}, & \text{если } q > (\ln x)^b. \end{cases}$$

Тогда справедливо равенство:

$$S_m(\alpha; x, k) = \frac{T_m(a,q)}{\varphi(q)} \int\limits_2^x e(\lambda(u+k)^m)du + R_m(q,x).$$

$$R_m(q,x) \ll xF(q,x) \max_{\chi mod q} \frac{|C_m(\chi,q)|}{\varphi(q)}.$$

Доказательство теоремы 1.1 основывается на дальнейшем развитии методов работы Ю.В.Линника[6] и Н.Г.Чудакова[16], в которых, соответственно, исследуются тригонометрические суммы с простыми числами и попадание простых чисел в короткие интервалы.

Zhan Tao[17] доказал, что соотношение (1) имеет место при $c \leq 8/3$, $\theta \leq 1/3$ и $B \leq 216$. Поэтому из теоремы 1.1 получим следующие безусловные результаты:

Следствие 1.1.1. *Пусть* $\tau \geq x^{m-\frac{3}{8}}\exp(\ln^{0,76} x)$, $q \leq x^{\frac{1}{4}}\exp\left(-\ln^{0,76} x\right)$, $b \geq 220(m+1)$, *тогда для остаточного члена теоремы 1.1 справедлива оценка:*

$$R_m(q,x) \ll \frac{xF(q,x)}{\varphi(q)} q^{\frac{m}{m+1}}.$$

Следствие 1.1.2. *Пусть* $q > (\ln x)^b$ *тогда при выполнении условий следствия 1.1.1 справедлива оценка:*

$$|S_m(\alpha; x, k)| \ll xq^{-\frac{1}{m+1}}(\ln x)^{B+4}.$$

В третьем параграфе первой главы получена оценка сверху для модуля квадратичной тригонометрической суммы с простыми числами

[16] Chudakov N.G. On the difference between two neighboring prime numbers // Mat. Sb., 1, 1936, 799 – 814.

[17] Zhan Tao, On the mean square of Dirichlet L–functions // Acta Math Sinica, 8(1992), No 2, pp.204–224.

$S_m(\alpha;x,k)$, $m=2$, $k=1$, когда α приближается рациональным числом с большим знаменателем.

Теорема 1.2. *Пусть* $x\ge x_0>0$, α *–вещественное число,* $\alpha=\frac{a}{q}+\frac{\theta}{q^2}$, $(a,q)=1$, $q\ge 1$, $|\theta|\le 1$, *тогда*

$$S_2(\alpha;x,1)=\sum_{n\le x}\Lambda(n)e(\alpha(n+1)^2)\ll\left(xq^{-\frac{1}{8}}+x^{\frac{15}{16}}+x^{\frac{3}{4}}q^{\frac{1}{8}}\right)L^8,\qquad L=\ln qx,$$

Доказательство теоремы проводится методом оценок тригонометрических сумм с простыми числами И.М.Виноградова, и ее основу составляют леммы 1.15 и 1.16 об оценке двойных тригонометрических сумм от квадратичного многочлена.

Лемма 1.15. *Пусть* $M\ge 1$ *и* $N\ge 1$ *произвольные положительные числа,* $M\le N$, $MN\le x$, a_m *и* b_n *функции натурального аргумента такие, что*

$$\sum_{M<m\le 2M}|a_m|^2\ll ML^{c_a},\qquad \sum_{N<n\le 2N}|b_n|^2\ll NL^{c_b},\quad c_1=\frac{4c_a+4c_b+9}{8}.$$

Тогда справедлива оценка

$$\sum_{M<m\le 2M}a_m\sum_{\substack{N<n\le 2N\\ mn\le x}}b_ne(\alpha(mn+1)^2)\ll MN\left(q^{-\frac{1}{8}}+N^{-\frac{1}{8}}+M^{-\frac{1}{4}}+q^{\frac{1}{8}}(MN)^{-\frac{1}{4}}\right)L^{c_1}.$$

Лемма 1.16. *Пусть* $M\ge 1$ *и* $N\ge 1$ *произвольные положительные числа,* $M\le N$, $MN\le x$, a_m *функция натурального аргумента,* $|a_m|\le \ln m$. *Тогда для суммы*

$$W=\sum_{M<m\le 2M}a_m\sum_{\substack{N<n\le 2N\\ mn\le x}}e(\alpha(mn+1)^2)$$

справедлива оценка

$$W\ll\left((MN)q^{-\frac{1}{4}}+(MN)^{\frac{3}{4}}M^{\frac{1}{2}}+\sqrt{MN}q^{\frac{1}{4}}\right)L^{5,5}.$$

Теоремы 1.1 и 1.2 являются уточнением соответствующего результата И.М.Виноградова для тригонометрической суммы $S'(f)$ соответственно для многочленов вида $f(n)=(n+k)^m$ и $f(n)=(n+1)^2$.

Вторая глава диссертации посвящена исследованию особого ряда

$$\mathfrak{S}(N) = \sum_{q=1}^{\infty} \Phi(q, N),$$

$$\Phi(q, N) = \frac{1}{\varphi^5(q)} \sum_{\substack{a=0 \\ (a,q)=1}}^{q} \left(\sum_{\substack{n=1 \\ (n,q)=1}}^{q} e\left(\frac{a(n+1)^2}{q}\right) \right)^5 e\left(-\frac{aN}{q}\right)$$

Суть этого исследования заключается в следующем:

- показано, что особый ряд $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}(N)$ абсолютно сходится, является вещественным числом и равен бесконечному произведению по простым числам p функций

$$\mathcal{F}(p, N) = 1 + \sum_{\alpha=1}^{\infty} \Phi(p^{\alpha}, N).$$

- найдены точные значения числовых рядов $\mathcal{F}(p, N)$, из которых следует арифметическое условие, при выполнении которого особый ряд $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}(N)$ больше абсолютной положительной постоянной, зависящей только от N.

Теорема 2.1. *Справедливо соотношение*

$$\mathfrak{S}(N) = \prod_{p} \mathcal{F}(p, N) = \begin{cases} c(N), & \text{если } N \equiv 0 (mod\, 4); \\ 0, & \text{если } N \not\equiv 0 (mod\, 4), \end{cases}$$

где $c(N)$ – абсолютная положительная постоянная, зависящая только от N, и

$$c(N) > 2 \prod_{p \geq 7} \left(1 - \frac{10}{\varphi^2(p)}\right).$$

Основу доказательства теоремы 2.1 составляют теорема 2.2 о точном значении ряда $\mathcal{F}(2, N)$, ее следствие 2.2.1 об оценке снизу $\mathcal{F}(2, N)$ при $ord_2(N) \geq 2$ и теорема 2.3 о точном значении ряда $\mathcal{F}(p, N)$ со своими следствиями 2.3.1, 2.3.3, 2.3.5, в которых соответственно получены оценки снизу для $\mathcal{F}(p, N)$ при $p \geq 7$, $\mathcal{F}(3, N)$ и $\mathcal{F}(5, N)$.

Теорема 2.2. *Пусть* $ord_2(N) = \beta$, $ord_2(N \cdot 2^{-\beta} - 5) = \eta$, *тогда справедлива формула*

$$\mathcal{F}(2,N) = \begin{cases} 0, & \text{если } \beta \le 1; \\ \dfrac{26}{7} + \dfrac{15}{28} \cdot 2^{-1.5(\beta-1)+3}, & \text{если } \beta \ge 2 \text{ и } \beta \text{ – четное}, \eta \ne 2; \\ \dfrac{26}{7} - \dfrac{13}{28} \cdot 2^{-1.5(\beta-1)+3}, & \text{если } \beta \ge 2 \text{ и } \beta \text{ – четное}, \eta = 2; \\ \dfrac{26}{7} + \dfrac{15}{28} \cdot 2^{-1.5(\beta-1)+3} & \text{если } \beta \ge 3 \text{ и } \beta \text{ – нечетное}. \end{cases}$$

Следствие 2.2.1. *При* $ord_2(N) \ge 2$, *справедливо неравенство*

$$\mathcal{F}(2,N) \ge \frac{26}{7} - \frac{13\sqrt{2}}{14} \ge \frac{13}{14}(4-\sqrt{2}) > \frac{65}{28}.$$

Теорема 2.3. *Пусть* p *– нечетное простое число,* $ord_p(N) = \beta$, *тогда справедлива формула*

$$\mathcal{F}(p,N) = 1 + \Phi(p,N) + \mathcal{F}_1(p,N),$$

$$\Phi(p,N) = \frac{1}{\varphi^5(p)}\left(-c_p(N-5) - 10\varepsilon_p p c_p(N-3) - \right.$$
$$\left. -5p^2 c_p(N-1) + 5p\delta_p(N-4) + 10\varepsilon_p\delta_p(N-2)p^2 + \delta_p(N)p^3\right),$$

$$\mathcal{F}_1(p,N) = \begin{cases} 0, & \beta = 0; \\ -\dfrac{p}{(p-1)^5} + \dfrac{p^5-p}{(p-1)^5(p^3-1)}\left(1 - \dfrac{1}{p^{1,5(\beta-1)}}\right), & \beta\text{–нечетное}; \\ \dfrac{p^4}{(p-1)^4(p^3-1)}\left(1 - \dfrac{(p+1)^2}{p^{1,5(\beta-2)+4}}\right) + \dfrac{1+\varepsilon_p\delta_p(N)}{(p-1)^5 p^{1,5(\beta-2)}}, & \beta\text{–четное}. \end{cases}$$

Следствие 2.3.1. *При* $p \ge 7$ *справедливо неравенство*

$$\mathcal{F}(p,N) > 1 - \frac{10}{\varphi^2(p)}.$$

Следствие 2.3.3. *Справедливо неравенство*

$$\mathcal{F}(3,N) \ge 1 - 2^{-4}.$$

Следствие 2.3.5. *Справедливо неравенство*

$$\mathcal{F}(5,N) \geq 1 - \frac{59}{2^{10}}.$$

Доказательства теорем 2.2 и 2.3 в свою очередь опираются на точное значение тригонометрической суммы $\Phi(a, p^\alpha)$, которое найдено соответственно в леммах 2.2, 2.3, 2.4 при $p = 2$ и в леммах 2.7, 2.8, 2.9, 2.10 при $p \geq 3$.

Третья глава диссертации посвящена выводу асимптотической формулы для количества представлений достаточно большого натурального числа N в виде суммы пяти квадратов сдвинутых простых чисел вида $p+1$:

$$N = (p_1+1)^2 + (p_2+1)^2 + (p_3+1)^2 + (p_4+1)^2 + (p_5+1)^2,$$

и нахождению арифметического условия, при выполнении которого особый ряд задачи больше абсолютной положительной постоянной, зависящей только от N.

Теорема 3.1. *Для числа $I_2(N,1)$ представлений N суммою пяти квадратов сдвинутых простых чисел вида $p+1$ справедлива асимптотическая формула:*

$$I_2(N,1) = \frac{4\pi^2 \mathfrak{S}(N) N^{\frac{3}{2}}}{3\ln^5 N} + O\left(\frac{N^{\frac{3}{2}} \ln\ln N}{\ln^6 N}\right). \tag{2}$$

где $\mathfrak{S}(N)$ – особый ряд абсолютно сходится и справедливо соотношение

$$\mathfrak{S}(N) = \begin{cases} c(N), & \text{если } N \equiv 0 (mod\, 4); \\ 0, & \text{если } N \not\equiv 0 (mod\, 4), \end{cases}$$

$$c(N) > 2\prod_{p\geq 7}\left(1 - \frac{10}{\varphi^2(p)}\right).$$

Следствие 3.1.1. *Существует такое N_0, что каждое натуральное число N, $N > N_0$, $N \equiv 0(mod\, 4)$ есть сумма пяти квадратов сдвинутых простых чисел вида $p+1$.*

Доказательство теоремы проводится круговым методом Харди – Литтлвуда – Рамануджана в форме тригонометрических сумм И.М.Виноградова. Основу доказательства составляют теорема 1.1 о поведении суммы

$$S_m(\alpha; x, k) = \sum_{n \leq x} \Lambda(n) e(\alpha(n+k)^m),$$

когда α приближается рациональным числом с маленьким знаменателем, теорема 1.2 об оценке сверху модуля квадратичной тригонометрической суммы с простыми числами $S_2(\alpha; x, 1)$, когда α приближается рациональным числом с большим знаменателем, и теорема 2.1 об арифметическом условии, при выполнении которого особый ряд задачи $\mathfrak{S}(N) > c(N)$, где $c(N)$ – абсолютное положительное постоянное, зависящее только от N.

В заключение автор выражает глубокую благодарность профессору В.Н.Чубарикову за научное руководство, постоянное внимание и помощь в работе.

Публикации по теме диссертации

1. Рахмонов Ф.З. Оценка квадратичных тригонометрических сумм с простыми числами. // Вест. Моск. ун-та. сер.1, математика. механика. 2011 г., №3, стр. 56-60.

2. Рахмонов Ф.З. Исследование особого ряда в проблеме Варинга–Гольдбаха со сдвинутыми простыми числами // Дискретная математика, 2011 г., т.23, №4, стр. 3-23.

3. Рахмонов Ф.З. Асимптотическая формула для проблемы Варинга-Гольдбаха со сдвинутыми простыми числами // "Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения", Тезисы докладов VIII Международной конференции посвященной 190-летию П.Л. Чебышева и 120-летию И.М. Виноградова, Саратов, 12-17 сентября 2011 г., стр. 64-65