Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова
механико-математический факультет

На правах рукописи

УДК 517.926.223

Романов Игорь Викторович

О задачах управления колебаниями мембран и пластин с помощью граничных сил

Специальность
01.01.02 — дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва 2011

Работа выполнена на кафедре дифференциальных уравнений механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова.

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук,
профессор Шамаев Алексей Станиславович

Официальные оппоненты:
доктор физико-математических наук,
профессор Болотник Николай Николаевич

кандидат физико-математических наук
Сурначёв Михаил Дмитриевич

Ведущая организация:
Московский государственный университет путей сообщения (МИИТ)

Защита диссертации состоится «16» декабря 2011 года в 16 часов 40 минут на заседании диссертационного совета Д 501.001.85 при Московском государственном университете им. М. В. Ломоносова по адресу: 119991, Москва, ГСП-1, Ленинские Горы, д.1, Главное здание МГУ, механико-математический факультет, ауд. 16-24.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке механико-математического факультета (Главное здание, 14 этаж).

Автореферат разослан «15» ноября 2011 года

Ученый секретарь
диссертационного совета Д 501.001.85, Сорокин В. Н.
доктор физико-математических наук,
профессор

I. Общая характеристика работы

Диссертационная работа посвящена вопросам приближенного и точного управления колебаниями двумерных мембран и пластин в случае ограниченного по абсолютной величине управляющего воздействия, сосредоточенного на границах рассматриваемых объектов.

Актуальность темы. Ранее вопрос об управлении колебаниями двумерных мембран и пластин с помощью граничных сил рассматривался многими авторами (например, обзорная статья Ж. Л. Лионса [1] и приведенная в ней литература).

В монографии А. Г. Бутковского [2] рассматривается задача об остановке колебаний ограниченной струны с помощью граничного управления и доказывается, что возможно за конечное время полностью остановить колебания струны при ограничении на абсолютную величину управляющего воздействия. Дается оценка времени, необходимого для полной остановки колебаний. Для исследования данной задачи применяется метод моментов. Суть этого метода состоит в том, что вопрос разрешимости исходной задачи сводится к вопросу существования решения счетной системы интегральных уравнений. Данный метод находит широкое применение в различных задачах теории управления, он применяется также и в представленной диссертационной работе.

В монографии Ж. Л. Лионса[3] рассматриваются задачи оптимального управления системами с распределенными параметрами и формулируются условия оптимальности, аналогичные принципу максимума Л. С. Понтрягина для систем с конечным числом степеней свободы. При этом указанные условия далеко не всегда приводят к конструктивному способу построения оптимального управления.

В упомянутой выше обзорной работе[1] рассматриваются задачи о полной остановке движения мембраны и пластины, доказывается существование граничного управления, приводящего систему в покой, и оценивается время, необходимое для полной остановки колебаний. Здесь авторы во многих постановках задач отказываются от требований оптимальности

[1] *Lions J. L. Exact controllability. Stabilization and perturbations for distributed systems // SIAM Review. — 1988. — V. 30, № 1. — P. 1-68.*

[2] *Бутковский А. Г. Теория оптимального управления системами с распределенными параметрами. — М.: Физматлит, 1965.*

[3] *Лионс Ж. Л. Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. — М.: Мир, 1972.*

управления и рассматривают только проблему управляемости, что существенно облегчает исследование; в работе не рассматриваются задачи с ограничением на абсолютную величину управляющих сил, а также не приводится явных выражений для управляющих воздействий, а только доказываются теоремы существования.

В работе Л. Д. Акуленко[4] приводится явная формула для граничного управления прямоугольной мембраной с ограничениями на управляющее воздействие по абсолютной величине, но при этом конечное состояние считается малой окрестностью состояния покоя.

В работе В. А. Ильина и Е. И. Моисеева[5] проводится оптимизация граничных управлений для различных задач по приведению струны в заданное состояние. Для этих задач оптимальные граничные управления предъявляются в явном аналитическом виде.

Возможность полной остановки за конечное время в случае распределенного по всей поверхности мембраны или пластины управления исследуется в монографии Ф. Л. Черноусько, И. М. Ананьевского, С. А. Решмина[6]. Там же дана оценка сверху для оптимального времени управления.

Таким образом, методы управления, используемые в упомянутых выше работах можно условно разделить на два класса.

Первый класс связан с управляющим воздействием, распределенным по всей поверхности рассматриваемой системы. Второй класс основан на граничном управлении. В данной диссертации рассмотрены только такие задачи, в которых управление распределено по границе. Существенным отличием от других работ является то, что на управляющее воздействие наложено ограничение на максимум абсолютной величины, что существенно усложняет задачу. При этом функция управления приложена ко всей границе, во всех рассматриваемых случаях не ставится вопрос об оптимальности процесса управления. Явный вид предложенных управляющих воздействий позволяет использовать результаты диссертации при решении ряда прикладных задач.

Целью работы является исследование задач граничного управления колебаниями двумерных мембран и пластин.

---

[4] *Акуленко Л. Д. Приведение упругой системы в заданное состояние посредством силового граничного воздействия. — ПММ. 1981, Т. 45, №6, С. 1095-1103.*

[5] *Ильин В. А., Моисеев Е. И. Оптимизация граничных управлений колебаниями струны. — УМН, 2005, 60: 6(366), 89-114.*

[6] *Черноусько Ф. Л., Ананьевский И. М., Решмин С. А. Методы управления нелинейными механическими системами. — М.: Физматлит, 2006.*

Методы исследований. В работе использованы метод приближения обобщенных решений краевых задач специальными функциональными рядами и метод моментов.

Научная новизна. В диссертации получены новые результаты, основные из них состоят в следующем:

1. Получены новые результаты о приближении решений некоторых краевых задач для волнового уравнения специальными функциональными рядами.

2. Доказывается возможность приведения двумерных мембран и пластин в ε–окрестность состояния покоя за конечное время с помощью ограниченного по абсолютной величине управляющего воздействия сосредоточенного на границах рассматриваемых объектов.

3. Доказано, что колебания квадратной пластины можно привести в покой за конечное время с помощью ограниченного по абсолютной величине управляющего воздействия, сосредоточенного на границе данной пластины (для случая краевых условий определенного вида).

Теоретическая и практическая ценность. Работа носит теоретический характер. Полученные явные формулы для управляющих воздействий, а также представления решений некоторых краевых задач в виде специальных функциональных рядов могут быть использованы для дальнейшего изучения вопросов граничной управляемости двумерных мембран и пластин.

Апробация работы. Результаты диссертации докладывались:

1. в МГУ им. М. В. Ломоносова на заседаниях научного семинара по асимптотическим методам для уравнений в математической физике (руководители проф. В. В. Жиков, проф. А. С. Шамаев, проф. Т. А. Шапошникова), неоднократно в 2007 г.;

2. в ИПМех РАН на заседании научного семинара по вопросам механики сплошной среды (руководители проф. Л. Д. Акуленко, проф. Д. В. Георгиевский, проф. С. В. Нестеров), 2010 г.;

3. в ИПМех РАН на заседании научного семинара по динамике управляемых систем (руководитель акад. Ф. Л. Черноусько), 2010 г.;

4. на 53-й научной конференции МФТИ «Современные проблемы фундаментальных и прикладных наук», Москва-Долгопрудный, декабрь 2010 г.;

5. в МГУ им. М. В. Ломоносова на заседании научного семинара по уравнениям математической физики (руководители проф. Е. В. Радкевич, проф. В. В. Жиков, проф. А. С. Шамаев, проф. Т. А. Шапошникова), 2011 г.;

6. в МЭСИ на заседаниях научного семинара по качественной теории дифференциальных уравнений (руководитель проф. И. В. Асташова), неоднократно в 2010-2011 гг.;

7. в Институте механики МГУ им. М. В. Ломоносова на заседании научного семинара им. А. Ю. Ишлинского, 2011 г.

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в 3 работах, список которых приведен в конце автореферата [1-3]. Работы [1,2] опубликованы в журналах из списка изданий, рекомендованных ВАК.

Структура диссертации. Диссертация изложена на 78 страницах и состоит из четырех глав, где первая глава является вводной. Библиография содержит 51 наименование.

II. Краткое изложение содержания диссертации

В первой главе диссертации, являющейся вводной, содержится обзор литературы по исследуемой теме и основных результатов, сформулированных в последующих главах.

Во второй главе рассматривается задача граничного управления колебаниями плоской мембраны. При этом на управляющее воздействие наложено ограничение на максимум абсолютной величины. Управляющее воздействие представляет собой условие Неймана, т. е. производную по нормали к границе области. Доказывается, что отклонение положения мембраны от состояния покоя в процессе колебания может быть сведено в достаточно малую окрестность нуля за конечное время. Окрестность нуля в данном случае понимается в смысле нормы соболевского пространства H^σ. Главным отличием результатов приведенных в данной главе от рассмотренных ранее является то, что управляющее воздействие сосредоточено на границе мембраны и на него наложено ограничение по абсолютной величине.

Приведем основные результаты данной главы.

Определим, как обычно, пространство С.Л. Соболева $H^s(\Omega)$ (при целом s), как пространство, полученное замыканием множества бесконечно-гладких на $\overline{\Omega}$ функций по норме

$$\|\varphi\|^2_{H^s(\Omega)} = \int\limits_{\Omega} \left(\varphi^2(x) + \sum_{|\alpha|=s} |D^\alpha \varphi(x)|^2 \right) dx.$$

Здесь и далее $\Omega \subset R^2$ — ограниченная область с кусочно-аналитической границей.

При нецелом s, пространство $H^s(R^n)$ определяется как замыкание S (пространство Шварца) по норме

$$\|\varphi\|^2_{H^s(R^n)} = \int\limits_{R^n_\xi} \left(1 + |\xi|^{2s}\right) |\widehat{\varphi}(\xi)|^2 d\xi.$$

Заметим, что под обозначением $\widehat{\varphi}(x)$ понимается преобразование Фурье от функции φ.

Далее определим норму для бесконечно-гладкой функции φ в области Ω

$$\|\varphi\|_{H^s(\Omega)} = \inf_{\psi=\varphi \text{ на } \partial\Omega} \|\psi\|_{H^s(R^n)}, \quad \psi \in S.$$

Взяв замыкание $C^\infty(\Omega)$ по этой норме, получим пространство $H^s(\Omega)$.

Определим пространство $H^s_{\mathfrak{N}}(\Omega)$, «похожее» на пространство $H^s(\Omega)$. Рассмотрим в области Ω оператор Лапласа с условием Неймана $\frac{\partial(\cdot)}{\partial n} = 0$, а также систему собственных значений $\{\lambda_i^2\}$ (всех за исключением нулевого) и собственных функций $\{X_i(x)\}$, соответствующих этому оператору и этим краевым условиям. Положим теперь:

$$\|\varphi\|^2_{H^s_{\mathfrak{N}}(\Omega)} = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i^{2s} \varphi_i^2, \quad \text{где} \quad \varphi_i = \int\limits_{\Omega} \varphi(x) X_i(x) dx.$$

Определение 1. Обозначим через $H^\gamma_{\mathfrak{N}}(\Omega)$ замыкание множества бесконечно-гладких на $\overline{\Omega}$ функций по норме $\|\cdot\|_{H^\gamma(\Omega)}$ и удовлетворяющих следующим краевым условиям: если $\gamma \in (0; 1,5)$, то условия отсутствуют, если $\gamma \in (1,5; 3,5)$, то $\frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0$, если $\gamma \in (3,5; 5,5)$, то $\frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0$ и $\frac{\partial \Delta \varphi}{\partial n} = 0$, и т. д.

Сформулируем известную теорему.

Теорема 1. Множество всех таких функций $u(x)$, для которых ряд $\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i^{2\gamma} \varphi_i^2$ сходится, совпадает со множеством $H^\gamma_{\mathfrak{N}}(\Omega)$.

Значения $\gamma = 1{,}5;\ 3{,}5;\ 5{,}5;\ldots$ мы не рассматриваем.

Пусть $\{\lambda_i^2\}_0^\infty$, $\{X_i(x)\}_0^\infty$ — системы собственных значений и собственных функций задачи Неймана в области Ω, т.е. $\Delta X_i(x) + \lambda_i^2 X_i(x) = 0$ в Ω, $\frac{\partial X_i}{\partial n}|_{\partial\Omega} = 0$. Заметим, что в данном случае рассматриваются все собственные значения, включая нулевое ($\lambda_0 = 0$). Обозначим $\langle f, g\rangle := \int\limits_{\partial\Omega} f(x)g(x)dx$ и определим следующие числа:

$$b_{nm}(T) = \frac{1}{2\lambda_n\lambda_m}\langle X_n, X_m\rangle\left(\frac{\sin(\lambda_n-\lambda_m)T}{\lambda_n-\lambda_m} - \frac{\sin(\lambda_n+\lambda_m)T}{\lambda_n+\lambda_m}\right),$$

$$c_{nm}(T) = \frac{1}{2}\langle X_n, X_m\rangle\left(\frac{\sin(\lambda_n-\lambda_m)T}{\lambda_n-\lambda_m} - \frac{\sin(\lambda_n+\lambda_m)T}{\lambda_n+\lambda_m}\right),$$

$$d_{nm}(T) = \frac{1}{2\lambda_n}\langle X_n, X_m\rangle\left(\frac{1-\cos(\lambda_n-\lambda_m)T}{\lambda_n-\lambda_m} - \frac{1-\cos(\lambda_n+\lambda_m)T}{\lambda_n+\lambda_m}\right),$$
$$m, n = 1, \ldots, N,$$

а также числа $\overline{C_i^N}(T)$, $\overline{\overline{C_i^N}}(T)$, как решения линейной системы:

$$\begin{cases} \sum\limits_{m=1}^{N}\left(b_{nm}\overline{C_m^N} + d_{nm}\overline{\overline{C_m^N}}\right) = A_n^{(1)}(T), \quad n = 1, \ldots, N, \\ \sum\limits_{m=1}^{N}\left(d_{nm}\overline{C_m^N} + c_{nm}\overline{\overline{C_m^N}}\right) = A_n^{(2)}(T), \quad n = 1, \ldots, N, \end{cases}$$

где

$$A_n^{(1)}(T) = \varphi_n\cos(\lambda_n T) + \frac{\psi_n}{\lambda_n}\sin(\lambda_n T), \quad A_n^{(2)}(T) = -\lambda_n\varphi_n\sin(\lambda_n T) + \psi_n\cos(\lambda_n T).$$

Заметим, что в случае $\lambda_n = \lambda_m$ выражения $\frac{\sin(\lambda_n-\lambda_m)T}{\lambda_n-\lambda_m}$, $\frac{1-\cos(\lambda_n-\lambda_m)T}{\lambda_n-\lambda_m}$ следует понимать в смысле предела $|\lambda_n - \lambda_m| \to 0$, тогда предел первой дроби будет равен единице, а второй — нулю.

Лемма 1. *Числа* $\overline{C_i^N}(T)$, $\overline{\overline{C_i^N}}(T)$ *стремятся к нулю при* $T \longrightarrow \infty$.

Определение 2. Функция $y(x,t)$ называется слабым решением задачи:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta\right)y = 0 \quad \text{в} \quad Q_T = \Omega\times(0,T),$$

$$y|_{t=0} = \varphi(x), \quad y'_t|_{t=0} = \psi(x), \quad \frac{\partial y}{\partial n}|_\Sigma = P(x,t), \tag{1}$$

если для любой пробной гладкой финитной функции $\xi(x,t)$ имеет место интегральное тождество:

$$\iint\limits_{Q_T} y(x,t)\xi(x,t)dxdt = \int\limits_{\Omega} (\varphi\Theta'_t - \psi\Theta)|_{t=0}dx + \int\limits_{\Sigma} P(x,t)\Theta(x,t)d\Sigma,$$

где $\Theta(x,t)$ — решение следующей задачи (которая называется транспонированной):

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta\right)\Theta(x,t) = \xi(x,t) \quad \text{в} \quad Q_T,$$

$$\Theta|_{t=T} = \Theta'_t|_{t=T} = 0, \quad \frac{\partial\Theta}{\partial n}|_{\Sigma} = 0.$$

Определим функцию $T_n(t)$ как решение дифференциального уравнения

$$T''_n(t) + \lambda_n^2 T_n(t) = \int\limits_{\partial\Omega} X_n(x)P(x,t)d\sigma$$

с начальными условиями: $T_n(0) = \varphi_n = (\varphi, X_n)$, $T'_n(0) = \psi_n = (\psi, X_n)$, а также положим

$$y_N(x,t) := \sum_{n=0}^{N} X_n(x)T_n(t).$$

Лемма 2. *Пусть $P(x,t)$ — некоторая функция из $L_2(\Sigma)$ и $\psi \in L_2(\Omega)$, $\varphi \in H^1(\Omega)$. Тогда последовательность функций $y_N(x,t)$ сходится в пространстве обобщенных функций к слабому решению задачи (1). Решение данной задачи понимается в смысле определения 2.*

Следующая теорема представляет собой первый главный результат настоящей работы. Утверждение теоремы 2 состоит в оценке решения задачи о колебании мембраны при некотором граничном управлении.

Теорема 2. *Пусть $\varphi \in H^{1+\alpha}_{\mathfrak{N}}(\Omega)$, $\psi \in H^{\alpha}_{\mathfrak{N}}(\Omega)$ и функция $y(x,t)$ является решением задачи*

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta\right)y = 0 \quad \text{в} \quad Q_T = \Omega \times (0,T),$$

$$y|_{t=0} = \varphi(x), \quad y'_t|_{t=0} = \psi(x), \quad \frac{\partial y}{\partial n}|_{\Sigma} = U_N(x,t),$$

где $U_N(t,T,x) = \sum_{s=1}^{N}\left(\overline{C_s^N}(T)\frac{\sin\lambda_s(T-t)}{\lambda_s} + \overline{\overline{C_s^N}}(T)\cos\lambda_s(T-t)\right)X_s(x)$ при $t < T$ и *$U_N \equiv 0$ при $t \geq T$, $T = \mathtt{const} > 0$. Тогда имеет место оценка*

$$\|y(x,T)\|^2_{H^\sigma(\Omega)} \le C\left(\max_{s=1,..,N}\{|\overline{C_s^N}|, |\overline{\overline{C_s^N}}|\}\right)^2 A(N)B(N)+$$

$$+\left(\|\varphi\|^2_{H^{1+\alpha}_{\mathfrak{N}}(\Omega)} + \|\psi\|^2_{H^{\alpha}_{\mathfrak{N}}(\Omega)}\right) N^{-\alpha+\sigma}, \qquad (2)$$

где $\alpha > 0$ — положительная постоянная, число σ определяется из условия сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \|X_n\|^2_{L_2(\partial\Omega)} n^{-2+\sigma}$, а величины $A(N)$, $B(N)$ определяются равенствами

$$A(N) = \sum_{n=N+1}^{\infty} \|X_n\|^2_{L_2(\partial\Omega)} n^{-2+\sigma}, \quad B(N) = \left(\sum_{s=1}^{N} \|X_s\|_{L_2(\partial\Omega)}\right)^2.$$

Выберем теперь $\alpha > \sigma$ и N так, чтобы второе слагаемое в правой части (2) было меньше $\varepsilon/2$, где $\varepsilon > 0$ — заданное наперед малое число. Далее, выберем величину $T > 0$ так, чтобы первое слагаемое в правой части (2) было также меньше $\varepsilon/2$ (это возможно сделать в силу леммы 1). Теперь, увеличивая снова величину T (если это действительно нужно), удовлетворим условию $|U_N(t,T,x)| < M$, где M — величина ограничения на граничное управляющее воздействие.

В соответствии с теоремой 2 доказано, что мембрану произвольной формы можно свести в состояние ε-окрестности покоя при $\sigma < \frac{1}{2}$, круглую мембрану при $\sigma < \frac{2}{3}$, прямоугольную мембрану при $\sigma < 1$.

В третьей главе рассматривается задача граничного управления колебаниями двумерной пластины. При этом на управляющее воздействие наложено ограничение на максимум абсолютной величины. Управляющее воздействие представляет собой производную по нормали к границе области от $\Delta y(x,t)$, где $y(x,t)$ решение задачи. Доказывается, что отклонение положения пластины от состояния покоя в процессе колебания может быть сведено в достаточно малую окрестность нуля за конечное время. Окрестность нуля в данном случае понимается в смысле нормы соболевского пространства H^σ.

Пусть $\{\lambda_i^2\}_0^\infty$, $\{X_i(x)\}_0^\infty$ — системы собственных значений и собственных функций задачи Рикье в области Ω, т.е. $\Delta^2 X_i(x) - \lambda_i^2 X_i(x) = 0$ в Ω, $\frac{\partial X_i}{\partial n}|_{\partial\Omega} = \frac{\partial \Delta X_i}{\partial n}|_{\partial\Omega} = 0$. Заметим, что в данном случае рассматриваются все собственные значения, включая нулевое ($\lambda_0 = 0$). Система собственных функций, определенная выше, является полной в $L_2(\Omega)$, так как она совпадает с системой собственных функций в задаче Неймана для оператора Лапласа.

Определение 3. Функция $y(x,t) \in L_2(\Omega \times (0,T))$ называется слабым решением задачи

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \Delta^2\right) y = 0 \quad \text{в} \quad Q_T = \Omega \times (0,T),$$

$$y|_{t=0} = \varphi(x), \quad y'_t|_{t=0} = \psi(x), \quad \frac{\partial y}{\partial n}|_\Sigma = R(x,t), \quad \frac{\partial \Delta y}{\partial n}|_\Sigma = P(x,t), \quad (3)$$

если для любой пробной гладкой финитной функции $\xi(x,t)$ имеет место интегральное тождество

$$\iint\limits_{Q_T} y(x,t)\xi(x,t)dxdt = \int\limits_\Omega (\varphi\Theta'_t - \psi\Theta)|_{t=0}dx -$$

$$\int\limits_\Sigma P(x,t)\Theta(x,t)d\Sigma - \int\limits_\Sigma R(x,t)\Delta\Theta(x,t)d\Sigma,$$

где $\Sigma = \partial\Omega \times (0,T)$ и $\Theta(x,t)$ — классическое решение следующей задачи (которая называется транспонированной):

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \Delta^2\right) \Theta(x,t) = \xi(x,t) \quad \text{в} \quad Q_T,$$

$$\Theta|_{t=T} = \Theta'_t|_{t=T} = 0, \quad \frac{\partial \Theta}{\partial n}|_\Sigma = \frac{\partial \Delta\Theta}{\partial n}|_\Sigma = 0.$$

Определим функцию $T_n(t)$ как решение дифференциального уравнения

$$T''_n(t) + \lambda_n^2 T_n(t) = \int\limits_{\partial\Omega} X_n(x)P(x,t)d\sigma + \int\limits_{\partial\Omega} \Delta X_n(x)R(x,t)d\sigma$$

с начальными условиями: $T_n(0) = \varphi_n = (\varphi, X_n)$, $T'_n(0) = \psi_n = (\psi, X_n)$, а также положим

$$y_N(x,t) := \sum_{n=0}^N X_n(x)T_n(t).$$

Лемма 3. *Пусть $P(x,t)$, $R(x,t)$ — некоторые функции из $L_2(\Sigma)$ и, $\varphi \in H^4(\Omega)$, $\psi \in H^2(\Omega)$. Тогда последовательность функций $y_N(x,t)$ сходится в пространстве обобщенных функций к слабому решению задачи (3).*

Следующая теорема представляет второй главный результат данной работы.

Теорема 3. *Пусть* $\varphi \in H_{\mathfrak{N}}^{4+\alpha}(\Omega)$, $\psi \in H_{\mathfrak{N}}^{2+\alpha}(\Omega)$ *и функция* $y(x,t)$ *является решением задачи*

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \Delta^2\right) y = 0 \quad \text{в} \quad Q_T = \Omega \times (0,T),$$

$$y|_{t=0} = \varphi(x), \quad y_t'|_{t=0} = \psi(x), \quad \frac{\partial y}{\partial n}|_\Sigma = 0, \quad \frac{\partial \Delta y}{\partial n}|_\Sigma = U_N(x,t),$$

где $U_N(t,T,x) = \sum_{s=1}^N \left(\overline{C_s^N}(T)\frac{\sin\lambda_s(T-t)}{\lambda_s} + \overline{\overline{C_s^N}}(T)\cos\lambda_s(T-t)\right) X_s(x)$ при $t < T$ и $U_N \equiv 0$ *при* $t \geq T$, $T = \mathtt{const} > 0$. *Тогда имеет место оценка*

$$\|y(x,T)\|^2_{H^\sigma(\Omega)} \leq C \left(\max_{s=1,\ldots,N}\{|\overline{C_s^N}|, |\overline{\overline{C_s^N}}|\}\right)^2 A(N)B(N) +$$

$$+ \left(\|\varphi\|^2_{H_{\mathfrak{N}}^{4+\alpha}(\Omega)} + \|\psi\|^2_{H_{\mathfrak{N}}^{2+\alpha}(\Omega)}\right) N^{-\alpha+\sigma}, \qquad (4)$$

где $\alpha > 0$ — *положительная постоянная, число* σ *определяется из условия сходимости ряда* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \|X_n\|^2_{L_2(\partial\Omega)} n^{-4+\sigma}$, *а величины* $A(N)$, $B(N)$ — *равенствами*

$$A(N) = \sum_{n=N+1}^{\infty} \|X_n\|^2_{L_2(\partial\Omega)} n^{-4+\sigma}, \quad B(N) = \left(\sum_{s=1}^{N} \|X_s\|_{L_2(\partial\Omega)}\right)^2.$$

Заметим, что числа $\overline{C_s^N}, \overline{\overline{C_s^N}}$ определяются также как и в предыдущей главе.

Проводя рассуждения, аналогичные тем, которые приводились для мембраны, можно показать, что с помощью оценки (4) доказывается возможность приведения пластины в состояние ε-окрестности покоя за конечное время.

На основании теоремы 3 доказано, что пластину произвольной формы можно свести в состояние ε-окрестности покоя при $\sigma < 2,5$, прямоугольной формы при $\sigma < 3$, круглой формы при $\sigma < 2\frac{2}{3}$.

В четвертой главе рассматривается задача точного управления колебаниями прямоугольной пластины. Исследуется возможность полной остановки колебаний пластины (для определенных граничных условий) за конечное время с помощью сколь угодно малого по абсолютной величине управляющего воздействия. Рассматривается возможность управления двумя краевыми условиями. При этом доказано, что при управлении с использованием двух краевых условий, класс допустимых начальных возмущений существенно расширяется.

Пусть $\{\lambda_i^2\}_1^\infty$, $\{X_i(x)\}_1^\infty$ — системы собственных значений и собственных функций оператора Δ^2, т.е. $\Delta^2 X_i(x) - \lambda_i^2 X_i(x) = 0$ в Ω, $X_i|_{\partial\Omega} = \Delta X_i|_{\partial\Omega} = 0$. Система собственных функций, определенная выше, является полной в $L_2(\Omega)$, так как она совпадает с системой собственных функций в задаче Дирихле для оператора Лапласа.

Определение 4. Функция $y(x,t) \in L_2(\Omega \times (0,T))$ называется слабым решением задачи:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \Delta^2\right) y = 0 \quad \text{в} \quad Q_T = \Omega \times (0,T),$$

$$y|_{t=0} = \varphi(x), \quad y'_t|_{t=0} = \psi(x), \quad y|_\Sigma = R(x,t), \quad \Delta y|_\Sigma = P(x,t), \tag{5}$$

если для любой пробной гладкой финитной функции $\xi(x,t)$ имеет место интегральное тождество:

$$\iint\limits_{Q_T} y(x,t)\xi(x,t)dxdt = \int\limits_\Omega (\varphi\Theta'_t - \psi\Theta)|_{t=0}dx +$$

$$+\int\limits_\Sigma P(x,t)\frac{\partial\Theta(x,t)}{\partial n}d\Sigma + \int\limits_\Sigma R(x,t)\frac{\partial\Delta\Theta(x,t)}{\partial n}d\Sigma,$$

где $\Sigma = \partial\Omega \times (0,T)$ и $\Theta(x,t)$ – классическое решение следующей задачи (которая называется транспонированной):

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \Delta^2\right)\Theta(x,t) = \xi(x,t) \quad \text{в} \quad Q_T,$$

$$\Theta|_{t=T} = \Theta'_t|_{t=T} = 0, \quad \Theta|_\Sigma = \Delta\Theta|_\Sigma = 0.$$

Определим функцию $T_n(t)$ как решение дифференциального уравнения

$$T''_n(t) + \lambda_n^2 T_n(t) = -\int\limits_{\partial\Omega} \frac{\partial X_n(x)}{\partial n}P(x,t)d\sigma - \int\limits_{\partial\Omega} \frac{\partial\Delta X_n(x)}{\partial n}R(x,t)d\sigma,$$

с начальными условиями: $T_n(0) = \varphi_n = (\varphi, X_n)$, $T'_n(0) = \psi_n = (\psi, X_n)$, а также положим

$$y_N(x,t) := \sum_{n=1}^N X_n(x)T_n(t).$$

Лемма 4. *Пусть $P(x,t)$, $R(x,t)$ — некоторые функции из $L_2(\Sigma)$ и $\varphi \in H^1(\Omega)$, $\psi \in L_2(\Omega)$. Тогда последовательность функций $y_N(x,t)$ сходится в пространстве обобщенных функций к слабому решению задачи (5).*

Пусть T_k — время управления. Определим числа:

$$b'_n(T_k) = -(\lambda_n \varphi_n \cos(\lambda_n T_k) + \psi_n \sin(\lambda_n T_k)), \quad n = 1, 2, \ldots \quad ,$$

$$b''_n(T_k) = \lambda_n \varphi_n \sin(\lambda_n T_k) - \psi_n \cos(\lambda_n T_k), \quad n = 1, 2, \ldots \quad .$$

Теорема 4. *Пусть $\Omega = (0;\pi) \times (0;\pi)$, $T_k = 2\pi k$,* где *$k = 1, 2 \ldots$, $\varphi \in C^4(\Omega)$ и $\varphi = \Delta\varphi = 0$ на $\partial\Omega$, $\psi \in C^3(\Omega)$, $\psi = 0$* на *$\partial\Omega$* и функция *$y(x,t)$ является решением задачи*

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \Delta^2\right) y = 0 \quad \text{в} \quad Q_T = \Omega \times (0, T_k),$$

$$y|_{t=0} = \varphi(x), \quad y'_t|_{t=0} = \psi(x), \quad y|_\Sigma = 0, \quad \Delta y|_\Sigma = U(x,t),$$

$$U(x, T_k, t) = -\frac{2}{T_k} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\left\| \frac{\partial X_n(x)}{\partial n} \right\|^2_{L_2(\partial\Omega)}} (b'_n(T_k) \sin \lambda_n t + b''_n(T_k) \cos \lambda_n t) \frac{\partial X_n(x)}{\partial n}$$

при $t < T_k$ и $U \equiv 0$ при $t \geq T_k$, $T_k = \mathtt{const} > 0$. Тогда $y(x, T_k) = y'_t(x, T_k) = 0$.

Из теоремы 4 следует также, что, увеличивая время T_k, колебания пластины можно остановить с помощью сколь угодно малой по абсолютной величине силы.

Результат, полученный в теореме 4, допускает обобщение на случай прямоугольной пластины, длины сторон которой являются произвольными рациональными числами. В работе также доказывается, что управляя двумя условиями, начальные возмущения φ и ψ можно выбирать из более широких классов функций.

Благодарность. Считаю своим долгом выразить искреннюю благодарность моему научному руководителю доктору физико-математических наук, профессору Алексею Станиславовичу Шамаеву за постоянное внимание к данной работе и многочисленные обсуждения рассматриваемых в ней вопросов.

III. Публикации по теме диссертации

1. *Романов И. В., Шамаев А. С.* Управление колебаниями мембран и пластин с помощью граничных сил.//Доклады Академии Наук. Серия: теория управления. 2011. Т. 438, №3. С. 318—322.

   (В данной работе постановки задач в теоремах 1 и 2, а также доказательство леммы 2 принадлежат А. С. Шамаеву. Доказательства теорем 1 и 2, лемм 1, 3 и 4, постановка задачи в теореме 3 и доказательство этой теоремы принадлежит И. В. Романову.)

2. *Романов И. В.* Управление колебаниями пластины с помощью граничных сил.//Вестник Московского Университета. Серия: математика, механика. 2011. №2. С. 3—10.

3. *Романов И. В.* Управление колебаниями пластины с помощью граничных сил.//53-я Научная конференция МФТИ «Современные проблемы фундаментальных и прикладных наук»: тез. докл. Москва—Долгопрудный, 2010. С. 27—28.