Московский государственный университет
имени М.В. Ломоносова

На правах рукописи
УДК 512.71, 512.74

Гайфуллин Сергей Александрович

Кольца Кокса аффинных многообразий

01.01.06 — математическая логика, алгебра и теория чисел

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва — 2011

Работа выполнена на кафедре высшей алгебры Механико-математического факультета Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова.

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук, доцент Аржанцев Иван Владимирович
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, профессор Ахиезер Дмитрий Наумович
	кандидат физико-математических наук Львовский Сергей Михайлович
Ведущая организация:	Институт математики имени С.Л. Соболева Сибирского отделения РАН

Защита диссертации состоится 16 декабря 2011 г. в 16 ч. 45 м. на заседании диссертационного совета Д.501.001.84 при Московском государственном университете имени М.В. Ломоносова по адресу: Российская Федерация, 119991, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, МГУ, Механико-математический факультет, аудитория 14-08.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Механико-математического факультета МГУ (Главное здание, 14 этаж).

Автореферат разослан 16 ноября 2011 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
Д.501.001.84 при МГУ
доктор физико-математических наук,
профессор

А.О. Иванов

Общая характеристика работы

Актуальность темы

Диссертация посвящена решению ряда актуальных задач теории алгебраических групп преобразований и аффинной алгебраической геометрии. Исследуются свойства колец Кокса аффинных алгебраических многообразий и связанных с ними фактор-реализаций, ручные и дикие автоморфизмы аффинных торических многообразий, а также охарактеризованы торические многообразия в некоторых классах алгебраических многообразий.

В 1995 году Д. Кокс[1] сопоставил каждому торическому многообразию X алгебру многочленов $\mathcal{R}(X)$. Число образующих этой алгебры равно количеству одномерных конусов в веере, соответствующем многообразию X. Алгебра $\mathcal{R}(X)$ градуирована группой классов дивизоров $\mathrm{Cl}(X)$. Если многообразие X аффинно, оно реализуется как категорный фактор спектра $\overline{X}$ алгебры $\mathcal{R}(X)$ по действию квазитора Нерона–Севери $\mathcal{N}(X) = \mathbb{K}[\mathrm{Cl}(X)]$. В случае неаффинного многообразия X, оно может быть получено как категорный фактор $(\overline{X} \setminus Z)//\mathcal{N}(X)$, где Z — замкнутое $\mathcal{N}(X)$-инвариантное подмножество, причём $\mathrm{codim}_{\overline{X}} Z \geq 2$. Более того, Z есть объединение некоторых координатных подпространств коразмерности ≥ 2 в $\overline{X}$. Такую фактор-реализацию многообразия X мы называем *реализацией Кокса* торического многообразия.

Позже эта конструкция обобщалась в работах Ху–Кила[2] и Берхтольда–Хаузена[3,4]. В итоге каждому алгебраическому многообразию с конечно порождённой группой $\mathrm{Cl}(X)$ поставлена в соответствие $\mathrm{Cl}(X)$-градуированная алгебра $\mathcal{R}(X)$. Мы называем её *кольцом Кокса* многообразия X. Если X торическое, то алгебра $\mathcal{R}(X)$ свободна. В случае, когда многообразие X аффинно, оно реализуется как категорный фактор *тотального координатного пространства* многообразия X, то есть спектра кольца Кокса, по действию квазитора Нерона-Севери. Эту конструкцию мы будем называть *реализацией Кокса* аффинного многообразия.

В дальнейшем алгебра $\mathcal{R}(X)$ активно изучалась различными

---

[1] Cox D.A., *The homogeneous coordinate ring of a toric variety*, J. Alg. Geometry **4** (1995), 17-50.

[2] Hu Y., Keel S., *Mori dream spaces and GIT*, Michigan Math. J. **48** (2000), 331-348.

[3] Berchtold F., Hausen J., *Homogeneous coordinates for algebraic varieties*, J. Algebra **266** (2003), 636–670.

[4] Berchtold F., Hausen J., *Cox rings and combinatorics*, Trans. AMS **359** (2007), 1205–1252.

авторами[4,5,6,7,8]. Однако большинство работ посвящено случаю полного многообразия X. Случай же аффинного X менее изучен. Реализации Кокса аффинных многообразий посвящена работа Батырева-Хаддад[9], вышедшая после работы [1]. В ней вычислены кольца Кокса трёхмерных нормальных аффинных многообразий с локально транзитивным действием группы $\mathrm{SL}(2)$, что обобщает результат работы [1]. Стоит также упомянуть работу Донзелли[10], в которой рассматривается реализация поверхности Данилова–Гизатуллина как фактора гиперповерхности в четырёхмерном пространстве по действию одномерного тора, которая на самом деле является реализацией Кокса этой поверхности. Данная диссертация, кроме последней главы, посвящена изучению и применению колец Кокса аффинных многообразий. В последней главе использована реализация Кокса неаффинных торических многообразий.

Одним из активно изучавшихся свойств колец Кокса является факториальность. Если $\mathrm{Cl}(X) = 0$, то алгебра $\mathbb{K}[X]$ регулярных функций на X факториальна, и $\mathcal{R}(X) = \mathbb{K}[X]$. Из результатов работ Берхтольда–Хаузена[4], Элизондо–Курано–Ватанабе[11] и Аржанцева[5] следует, что если группа классов дивизоров свободна, то алгебра $\mathcal{R}(X)$ факториальна. В общем же случае имеет место лишь однородная факториальность, то есть однородные элементы однозначно раскладываются на однородные неприводимые множители[5,8].

Рассмотрим полугруппу $\mathrm{Ass}(\mathbb{K}[X])$ классов ассоциированности элементов алгебры $\mathbb{K}[X]$. Факториальность алгебры $\mathbb{K}[X]$ эквивалентна тому, что полугруппа $\mathrm{Ass}(\mathbb{K}[X])$ свободна. Для несвободной полугруппы можно определить теорию дивизоров[12], то есть вложение в свободную полугруппу, удовлетворяющее некоторым условиям. Если теория дивизоров для данной полугруппы существует, то она единствена. Теорией дивизоров для $\mathrm{Ass}(\mathbb{K}[X])$ служит вложение в полугруппу эффективных дивизоров на X, которая совпадает с полугруппой классов ассоциированности однородных элементов в $\mathcal{R}(X)$. Первым результатом диссертации является доказатель-

[5] Аржанцев И.В., *О факториальности колец Кокса*, Мат. заметки **85** (2009), 623-629.

[6] Arzhantsev I.V., Hausen J., *Geometric Invariant Theory via Cox rings*, J. Pure Appl. Algebra **213** (2009), 154-172.

[7] Batyrev V., Popov O., *The Cox ring of a Del Pezzo surface*, In: Arithmetic of higher-dimensional algebraic varieties, Progr. Math. **226** (2004), 85–103.

[8] Hausen J., *Cox rings and combinatorics II*, Moscow Math. J. **8** (2008), 711-757.

[9] Batyrev V., Haddad F., *On the geometry of $SL(2)$-equivariant flips*, Moscow Math. J. **8** (2008), 621-646.

[10] Donzelli F., *Algebraic density property of Danilov-Gizatullin surfaces*, arXiv 1009.4209.

[11] Elizondo J., Kurano K., Watanabe K., *The total coordinate ring of a normal projective variety*, J. Algebra **276** (2004), 625–637.

[12] Боревич З.И., Шафаревич И.Р., "Теория чисел" 3-е изд., Наука, М., 1985.

ство универсальных свойств теории дивизоров полугруппы и реализации Кокса аффинного многообразия. Первое из них заключается в том, что вложение данной полугруппы в свободную при некоторых условиях пропускается через теорию дивизоров этой полугруппы. Универсальное свойство для реализации Кокса аффинного многообразия состоит в следующем. Пусть задано *сильно стабильное* действие квазитора Q на неприводимом аффинном многообразии Z, то есть существует такое открытое Q-инвариантное подмножество $U \subset Z$, что $\mathrm{codim}_Z U \geq 2$, действие Q на U свободно и все Q-орбиты из U замкнуты в Z. Предположим, что алгебра $\mathbb{K}[Z]$ однородно факториальна относительно градуировки группой характеров $\mathfrak{X}(Q)$ и действие группы Q удовлетворяет условию *нестягиваемости*, то есть для любого простого дивизора $D \subset X$ замыкание его образа при морфизме факторизации $\pi\colon Z \to Z/\!/Q$ имеет коразмерность в $Z/\!/Q$ не более 1. Тогда π пропускается через реализацию Кокса фактора $Z/\!/Q$.

Далее в диссертации классифицируются трёхмерные аффинные торические многообразия с локально транзитивным действием группы $\mathrm{SL}(2)$. В 1973 году в работе В.Л. Попова[13] были классифицированы трёхмерные нормальные аффинные многообразия с локально транзитивным действием группы $\mathrm{SL}(2)$. Доказано, что все они, кроме однородных пространств $\mathrm{SL}(2)/H$, находятся в биекции с парами чисел $(\frac{p}{q}, r)$, где $\frac{p}{q} \in (0,1] \cap \mathbb{Q}$, $r \in \mathbb{N}$. Соответствующее многообразие называется $\mathrm{SL}(2)/\mathbb{Z}_r$-вложением, а число $\frac{p}{q}$ — его *высотой*. Д.И. Панюшев[14] вычислил группу классов дивизоров $\mathrm{SL}(2)/\mathbb{Z}_r$-вложения высоты $\frac{p}{q}$.

Задача, решаемая в диссертации, заключается в том, чтобы выбрать те пары $(\frac{p}{q}, k)$, которые соответствуют торическим многообразиям. Для этого используется тот факт, что тотальное координатное пространство торического многообразия есть аффинное пространство. Действие группы $\mathrm{SL}(2)$ на $\mathrm{SL}(2)/\mathbb{Z}_r$-вложении X поднимается до $\mathrm{SL}(2)$-действия на его тотальном координатном пространстве $\overline{X}$, коммутирующего с действием квазитора Нерона-Севери. Ключевой момент дальнейшего изучения действия $\mathrm{SL}(2) : \overline{X} \cong \mathbb{A}^d$ состоит в том, что оно по теореме Крафта-Попова[15] эквивалентно линейному. В диссертации доказано, что $\mathrm{SL}(2)/\mathbb{Z}_r$-вложение X является торическим тогда и только тогда, когда $(q-p)$ делит r. Заме-

[13] Попов В.Л., *Квазиоднородные аффинные алгебраические многообразия группы* $\mathrm{SL}(2)$, Изв. акад. наук СССР, сер. мат. **37** (1973), 792-832.

[14] Панюшев Д.И., *Канонический модуль аффинного нормального квазиоднородного SL_2-многообразия*, Мат. сборник **182** (1991), 569-578.

[15] Kraft H., Popov V.L., *Semisimple group actions on the three-dimensional affine space are linear*, Comment. Math. Helv. **60** (1985), 466-479.

тим, что доказательство этой теоремы в одну сторону, а именно то, что $\mathrm{SL}(2)/\mathbb{Z}_r$-вложение является торическим при условии $(q-p) \mid r$, может быть получено из результатов работы[14].

Этот результат можно рассматривать как первый шаг в направлении изучения группы (неэквивариантных) автоморфизмов аффинного $\mathrm{SL}(2)/\mathbb{Z}_r$-вложения. А именно, вычислен ранг этой группы. Для торических $\mathrm{SL}(2)/\mathbb{Z}_r$-вложений он равен 3, а для остальных — 2, так как на любом $\mathrm{SL}(2)/\mathbb{Z}_r$-вложении эффективно действует двумерный тор[16].

В 2008 году, после публикации работы [1], в которой были классифицированы торические $\mathrm{SL}(2)/\mathbb{Z}_r$-вложения, В. Батырев и Ф. Хаддад вычислили кольцо Кокса произвольного аффинного $\mathrm{SL}(2)/\mathbb{Z}_r$-вложения[9]. Согласно этого результата, тотальное координатное пространство $\mathrm{SL}(2)/\mathbb{Z}_r$-вложения высоты $\frac{p}{q}$ есть гиперповерхность в пятимерном пространстве с координатами x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, заданная уравнением

$$x_0^b = x_1x_4 - x_2x_3, \qquad \text{где} \;\; b = \frac{q-p}{\text{НОД}(q-p, r)}.$$

Отсюда следует, что $\overline{X}$ есть аффинное пространство тогда и только тогда, когда $b=1$, то есть $(q-p) \mid r$, что совпадает с результатом диссертации.

Следующая тема, изучаемая в диссертации, касается автоморфизмов торических многообразий. Пусть задано торическое многообразие X. Его тотальное координатное пространство $\overline{X}$ есть аффинное пространство, на котором действует квазитор Нерона-Севери $\mathcal{N}(X)$. Если задан автоморфизм φ пространства $\overline{X}$, нормализующий действие $\mathcal{N}(X)$, то он естественным образом спускается до автоморфизма многообразия X. Обозначим полученный автоморфизм через $\tau(\varphi)$. В работе [2] доказано, что, наоборот, любой автоморфизм X получается из некоторого автоморфизма $\overline{X}$, нормализующего $\mathrm{Cl}(X)$-градуировку. Таким образом, автоморфизмы торического многообразия X тесно связаны с автоморфизмами аффинного пространства $\overline{X}$.

Одна из проблем, связанных с группой автоморфизмов аффинного пространства, это проблема существования диких автоморфизмов. Напомним, что автоморфизм $\mathbb{A}^n$ называется *элементарным*, если он есть аффинное преобразование или автоморфизм вида

$$(x_1, \ldots, x_n) \mapsto (x_1, \ldots x_{i-1}, x_i + f(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n), x_{i+1}, \ldots, x_n).$$

Автоморфизм аффинного пространства называется *ручным*, если он есть композиция элементарных. Автоморфизмы, не являющиеся ручными, на-

[16]Крафт Х., "Геометрические методы в теории инвариантов", Москва Мир, 1987.

зываются *дикими*. В 1942 году Юнг доказал, что любой автоморфизм аффинной плоскости является ручным[17]. В 1972 году М. Нагата высказал гипотезу, что автоморфизм трёхмерного пространства

$$(x, y, z) \mapsto (x + (x^2 - yz), y + 2x(x^2 - yz) + z(x^2 - yz)^2, z)$$

является диким. В 2004 году эта гипотеза была доказана И.П. Шестаковым и У.У. Умирбаевым[18]. До этого было известно, автоморфизм Нагаты является *стабильно ручным*, что означает, что если добавить четвёртую неподвижную переменную, то полученный автоморфизм четырёхмерного пространства

$$(x, y, z, w) \mapsto (x + (x^2 - yz), y + 2x(x^2 - yz) + z(x^2 - yz)^2, z, w)$$

будет ручным[19]. Проблема существования диких автоморфизмов аффинных пространств $\mathbb{A}^n$ при $n > 3$ остаётся открытой. Одним из кандидатов на то, чтобы быть диким автоморфизмом $\mathbb{A}^4$, является *автоморфизм Аника*[19,20]:

$$\zeta \colon (y_1, y_2, y_3, y_4) \mapsto (y_1, y_2 + y_1(y_1y_4 - y_2y_3), y_3, y_4 + y_3(y_1y_4 - y_2y_3)).$$

В диссертации, используя конструкцию Кокса, вводятся определения ручных и диких автоморфизмов аффинного торического многообразия, и рассматривается проблема существования диких автоморфизмов аффинных торических многообразий. Назовём автоморфизм φ многообразия X *элементарным*, если среди его прообразов $\tau^{-1}(\varphi)$ есть элементарный автоморфизм пространства $\overline{X}$. (Несложно убедиться, что в этом случае все автоморфизмы из $\tau^{-1}(\varphi)$ являются ручными.) Аналогично случаю аффинного пространства, определим *ручные* автоморфизмы как автоморфизмы, разлагающиеся в композицию элементарных, а все остальные автоморфизмы назовём *дикими*.

В диссертации изучаются автоморфизмы трёхмерного аффинного квадратичного конуса X, заданного в четырёхмерном пространстве уравнением $x_1x_4 - x_2x_3 = 0$. Многообразие X является торическим с действием трёхмерного тора

$$(t_1, t_2, t_3) \cdot (x_1, x_2, x_3, x_4) = (t_1x_1, t_2x_2, t_3x_3, t_2t_3t_1^{-1}x_4).$$

---

[17] Jung H., *Uber ganze birationale Transformationen ger Ebene*, J. Reine Angew. Math. **184** (1942), 161-174.

[18] Shestakov I., Umirbaev U., *The tame and wild automorphisms of polynomial rings in three variables*, J. Amer. Math. Soc. **17** (2004), 197–227.

[19] Smith M. K., *Stably tame automorphisms*, J. Pure Appl. Algebra, **58** (1989), 209–216.

[20] A. van den Essen, "Automorphisms and the Jacobian Conjecture", Progr. Math. **190**, Birkhäuser, 2000.

Группа классов дивизоров многообразия X изоморфна $\mathbb{Z}$. Кольцо Кокса $\mathcal{R}(X)$ есть кольцо многочленов от четырёх переменных, которые мы обозначим y_1, y_2, y_3, y_4. Градуировка задана так: $\deg y_1 = \deg y_2 = 1$, $\deg y_3 = \deg y_4 = -1$. Основной результат этой части диссертации заключается в том, что предъявляется дикий автоморфизм α многообразия $x_1x_4 - x_2x_3 = 0$. Это утверждение эквивалентно тому, что автоморфизм Аника четырёхмерного пространства не может быть разложен в произведение элементарных автоморфизмов $\mathbb{A}^4$, нормализующих градуировку. Заметим, что доказательство этого факта получено элементарными методами и не использует результаты работы Умирбаева–Шестакова[18].

В препринте 2011 года С. Лами и С. Венеро[21] изучаются автоморфизмы многообразия $\mathrm{SL}(2)$. Там введены определения аналогичные введённым нами для аффинного квадратичного конуса, интерпретируемого как многообразие вырожденных матриц 2×2. Основной результат этой работы состоит в том, что предъявлен дикий автоморфизм многообразия $\mathrm{SL}(2)$, причём основное поле предполагается полем комплексных чисел. Этот результат является прямым следствием результатов диссертации. Дословно повторяя доказательство того, что автоморфизм α — дикий автоморфизм многообразия вырожденных матриц порядка 2, мы получаем, что автоморфизм, заданный теми же формулами, что и α, является диким автоморфизмом многообразия $\mathrm{SL}(2)$, причём это верно для любого основного поля.

Следующая тема, изучаемая в диссертации — это описание однородных торических многообразий, то есть однородных пространств полупростых групп G, являющихся торическими многообразиями. Для этого действие группы G поднимается с многообразия X до действия на тотальном координатном пространстве $\overline{X}$, коммутирующего с действием квазитора Нерона-Севери[6]. Доказывается, что поднятое действие на $\overline{X}$ имеет орбиту, коразмерность дополнения к которой не меньше 2. Переходя к конечному накрытию, можно считать, что группа G есть прямое произведение односвязных простых групп $G = G_1 \times \ldots \times G_k$. Итоговым результатом является тот факт, что торическое многообразие с транзитивным действием полупростой группы $G = G_1 \times \ldots \times G_k$ есть факторпространство

$$(\mathbb{K}_1^n \setminus \{0\} \times \ldots \times \mathbb{K}^{n_m} \setminus \{0\})//S,$$

где S — подквазитор в m-мерном торе, действующем на каждом сомножители $\mathbb{K}^{n_i} \setminus \{0\}$ гомотетиями, каждая простая компонента G_i действует

[21] Lamy S., Venereau S., *The tame and the wild automorphism of an affine quadric threefold*, arXiv 1103.4291.

нетривиально только на $\mathbb{K}^{n_i} \setminus \{0\}$, причём $\mathbb{K}^{n_i}$ с действием G_i есть либо тавтологический $\mathrm{SL}(n)$- или $\mathrm{Sp}(2n)$-модуль, либо двойственный к тавтологическому $\mathrm{SL}(n)$-модуль.

Результаты диссертации близки к результатам работы Э.Б. Винберга[22], в которой классифицируются алгебраические группы преобразований максимального ранга. Напомним, что *алгебраическая группа преобразований максимального ранга* — это такое эффективное локально транзитивное действие алгебраической группы G на алгебраическом многообразии X, что $\dim X = \mathrm{rk}\, G$, где $\mathrm{rk}\, G$ — ранг максимального тора T группы G. В этой ситуации индуцированное действие тора T на X эффективно и локально транзитивно[23]. Если группа G полупроста, то открытая G-орбита в X является однородным торическим многообразием. Оказывается, что в этом случае X является произведением проективных пространств и G действует на X транзитивно. Из классификации однородных торических многообразий следует, что каждое однородное торическое многообразие задаёт редуктивную группу преобразований максимального ранга; здесь G есть группа $(\mathrm{GL}(n_1) \times \ldots \times \mathrm{GL}(n_m))/S$.

Цель работы

Целью настоящей работы является применение техники колец Кокса к изучению аффинных алгебраических многообразий; классификация трёхмерных аффинных торических многообразий с локально транзитивным действием группы $\mathrm{SL}(2)$; построение дикого автоморфизма трёхмерного аффинного квадратичного конуса; описание торических многообразий с транзитивным действием полупростой группы.

Научная новизна

В диссертации получены следующие результаты.

1. Классифицированы трёхмерные аффинные торические многообразия с локально транзитивным действием группы $\mathrm{SL}(2)$. Доказано, что $\mathrm{SL}(2)/\mathbb{Z}_r$-вложение высоты $\frac{p}{q}$ является торическим тогда и только тогда, когда r делится на $q - p$.

---

[22]Винберг Э.Б., *Алгебраические группы преобразований максимального ранга*, Мат. сборник **88** (1972), 493-503.

[23]Demazure M., *Sous-groupes algebriques de rang maximum du groupe de Cremona*, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. (4) **3** (1970), 507-588.

2. Доказано, что автоморфизм, индуцированный автоморфизмом Аника четырёхмерного аффинного пространства, является диким автоморфизмом трёхмерного аффинного квадратичного конуса. Показано, что автоморфизм Аника не разлагается в произведение элементарных автоморфизмов, нормализующих действие одномерного тора.

3. Классифицированы торические многообразия с транзитивным действием полупростой группы. Показано, что такое многообразие получается центральной факторизацией из произведения проколотых аффинных пространств, на каждом из которых действует простая компонента группы, изоморфная $\mathrm{SL}(n)$ или $\mathrm{Sp}(2n)$.

Основные методы исследования

В работе используются методы алгебраической геометрии, теории алгебраических групп, теории инвариантов и теории представлений.

Теоретическая и практическая ценность работы

Диссертация имеет теоретический характер. Полученные в диссертации результаты представляют интерес для алгебраической геометрии, теории алгебраических групп и теории инвариантов.

Апробация работы

Результаты диссертации докладывались на следующих научно-исследовательских семинарах и научных конференциях.

1. Семинар «Алгебраические группы и теория инвариантов» под руководством Э. Б. Винберга, А. Л. Онищика, Д. А. Тимашёва и И. В. Аржанцева на механико-математическом факультете МГУ им. М. В. Ломоносова.

2. Международная конференция, посвящённая 70-летию Э.Б. Винберга, г. Москва, 2007 год.

3. Международная алгебраическая конференция, посвящённая 100-летию со дня рождения профессора А. Г. Куроша, г. Москва, 2008 год.

4. Научная конференция «Ломоносовские чтения», г. Москва, 20 апреля 2008 года.

5. Летняя школа-конференция «Алгебры Ли, алгебраические группы и теория инвариантов», г. Самара, 8-15 июня 2009 года.

6. Зимняя школа-конференция «Алгебры Ли, алгебраические группы и теория инвариантов», г. Москва, 2011 год.

7. Workshop "Torsors: Theory and Applications", г. Эдинбург (Великобритания), 2011 год.

Публикации

Результаты диссертации опубликованы в трёх работах, список которых приведен в конце автореферата [1–3].

Структура и объем диссертации

Диссертационная работа изложена на 119 страницах и состоит из введения и четырёх глав. Библиография включает 49 наименований.

Краткое содержание работы

Во введении к диссертации излагается история рассматриваемых проблемм и формулируются основные результаты.

Глава 1 посвящена построению кольца Кокса алгебраического многообразия и изучению его свойств. В том числе в ней доказано универсальное свойство реализации Кокса аффинного многообразия.

Первые три раздела главы 1 носят вводный характер. В них даны необходимые в дальнейшем определения, описана конструкция кольца Кокса алгебраического многообразия и изложены его основные известные свойства. А именно, кольцо Кокса не имеет делителей нуля, целозамкнуто в своём поле частных и однородно факториально. В случае конечно порождённого кольца Кокса аффинного многообразия описана реализация Кокса данного многообразия как категорного фактора тотального координатного пространства по действию квазитора Нерона-Севери. Доказано, что если на неприводимом аффинном многообразии действует квазитор, это действие сильно стабильно и алгебра функций однородно факториальна, то морфизм факторизации является реализацией Кокса для фактора. Также изложено соответствие между торическими многообразиями и веерами в решётке однопараметрических подгрупп тора и описана реализация Кокса торического многообразия как фактора большого открытого подмножества в аффинном пространстве по действию квазитора Нерона-Севери.

Вторая часть главы 1 посвящена доказательству универсального свойства реализации Кокса аффинного многообразия. Вводится понятие теории дивизоров для полугруппы[12], и доказывается универсальное свойство теории дивизоров: вложение полугруппы P в свободную полугруппу при некоторых условиях единственным образом пропускается через вложение P в теорию дивизоров. Приводится определение нестягивающего действия. Доказывается универсальное свойство реализации Кокса аффинного многообразия.

Теорема 3. *Пусть Z — неприводимое аффинное многообразие с нестягивающим действием квазитора Q и морфизмом факторизации $\pi\colon Z \to Z//Q = X$. Предположим, что Q-многообразие Z однородно факториально, и что фактор допускает реализацию Кокса $q\colon \overline{X} \to X$. Тогда существует сюръективный гомоморфизм $\mu\colon Q \to \mathcal{N}(X)$ и доминантный морфизм $\nu\colon Z \to \overline{X}$ такие, что $\nu(g\cdot z) = \mu(g)\cdot\nu(z)$ для всех $g \in Q$, $z \in Z$, и следующая диаграмма коммутативна*

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[rr, "\nu"] \arrow[dr, "\pi"'] & & \overline{X} \arrow[dl, "q"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

Этими условиями гомоморфизм μ определён однозначно, а морфизм ν определён с точностью до композиции с автоморфизмом Z, определяемым действием элемента квазитора Q.

Приведены примеры, поясняющие смысл условий этой теоремы.

В **главе 2** классифицированы трёхмерные аффинные торические многообразия с локально транзитивным действием группы $\mathrm{SL}(2)$. С одной стороны найдены высоты и степени торических $\mathrm{SL}(2)/\mathbb{Z}_r$-вложений, и, таким образом, данный класс многообразий описан в терминах классификации трёхмерных нормальных аффинных многообразий с локально транзитивным действием группы $\mathrm{SL}(2)$, полученной В.Л. Поповым[13]. С другой стороны описаны конуса, соответствующие таким торическим многообразиям.

В разделе 2.1 изложены результаты В.Л. Попова, который доказал, что трёхмерные нормальные аффинные многообразия с локально транзитивным действием группы $\mathrm{SL}(2)$ параметризуются парами $(\frac{p}{q}, r)$, где

$\frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \cap (0,1]$, $r \in \mathbb{N}$. Многообразие, соответствующее паре $(\frac{p}{q}, r)$, получило название $\mathrm{SL}(2)/\mathbb{Z}_r$-вложения высоты $\frac{p}{q}$.

Раздел 2.2 посвящён поднятию $\mathrm{SL}(2)$-действия с $\mathrm{SL}(2)/\mathbb{Z}_r$-вложения на его тотальное координатное пространство. Этот раздел содержит два утверждения. Первое из них гласит, что если на нормальном многообразии X локально транзитивно действует полупростая группа G, причём группа характеров стабилизатора типичной точки конечна, то G-действие может быть поднято до действия на тотальном координатном пространстве. Если же X торическое, то тотальное координатное пространство есть аффинное пространство. Второе утверждение состоит в том, что в этом случае действие на тотальном координатном пространстве эквивалентно линейному.

В разделе 2.3 техника предыдущего раздела применяется к случаю торического аффинного $\mathrm{SL}(2)/\mathbb{Z}_r$-вложения. Далее исследуется структура $\mathrm{SL}(2)$-модуля на тотальном координатном пространстве. Доказано, что размерность тотального координатного пространства равна 4, а затем разбираются все возможные разложения этого пространства в прямую сумму простых $\mathrm{SL}(2)$-модулей. Итогом этого раздела является основной результат главы.

Теорема 6. *Пусть X — трехмерное нормальное аффинное многообразие с заданным локально транзитивным $\mathrm{SL}(2)$-действием. Тогда X торическое в том и только том случае, когда X – это $\mathrm{SL}(2)/\mathbb{Z}_r$-вложение с высотой $\frac{p}{q}$, $(p,q)=1$, и r делится на $q-p$.*

В разделе 2.4 явно вычисляется алгебра регулярных функций на торическом $\mathrm{SL}(2)/\mathbb{Z}_r$-вложении. Затем описываются конуса, соответствующие торическим $\mathrm{SL}(2)/\mathbb{Z}_r$-вложениям.

В **главе 3** по аналогии со случаем аффинного пространства вводятся определения ручных и диких автоморфизмов торического многообразия. Предъявлен дикий автоморфизм трёхмерного аффинного квадратичного конуса.

В разделе 3.1 даны определения элементарных, ручных и диких автоморфизмов аффинного пространства. Приведены результаты Юнга[17] о том, что любой автоморфизм двумерного пространства ручной, и Умирбаева-Шестакова[18] о том, что автоморфизм Нагаты трёхмерного аффинного пространства дикий. Далее формулируется результат работы [2]: любой автоморфизм аффинного многообразия может быть поднят до автоморфизма его тотального координатного пространства, нормализующего действие квазитора Нерона-Севери. Вводятся определения ручных и диких автоморфизмов торического многообразия.

Раздел 3.2 посвящён изучению автоморфизмов трёхмерного аффинного квадратичного конуса. Это многообразие является торическим. Описаны его элементарные автоморфизмы. Приведён конкретный автоморфизм данного многообразия, про который доказано, что он является диким. Получено доказательство того, что автоморфизм Аника

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) \mapsto (x_1, x_2 + x_1(x_1x_4 - x_2x_3), x_3, x_4 + x_3(x_1x_4 - x_2x_3))$$

не разлагается в произведение элементарных автоморфизмов $\mathbb{A}^4$, нормализующих следующее действие одномерного тора

$$t \cdot (x_1, x_2, x_3, x_4) = (tx_1, tx_2, t^{-1}x_3, t^{-1}x_4).$$

Показано, что если добавить одну переменную, на которую тор действует тривиально, то полученный автоморфизм разлагается в произведение элементарных автоморфизмов, нормализующих действие тора.

Раздел 3.3 посвящён переносу результатов раздела 3.2 на случай многообразия SL(2). Соответствующие определения элементарных автоморфизмов взяты из работы Ламии и Венеро[21]. Показывается, что автоморфизм, определяемый теми же формулами, что и дикий автоморфизм трёхмерного аффинного квадратичного конуса, реализованного как многообразие вырожденных матриц порядка 2, будет диким автоморфизмом многообразия SL(2).

В **главе 4** классифицированы *однородные торические многообразия*, то есть торические многообразия с транзитивным действием полупростой группы G. Доказано, что однородное торическое многообразие получается центральной факторизацией из произведения проколотых аффинных пространств. Основным инструментом является поднятие действия группы с однородного торического многообразия на его тотальное координатное пространство.

Пусть дано многообразие X с действием связной аффинной группы G. Действие G на X может быть поднято до действия той же группы на тотальном координатном пространстве $\overline{X}$. Раздел 4.1 содержит два центральных утверждения. Первое из них заключается в том, что действие G на X локально транзитивно если и только если действие $\mathcal{N}(X) \times G$ на $\overline{X}$ локально транзитивно. Второе даёт эквивалентные условия того, что дополнение к G-орбите в X имеет коразмерность не менее 2. А именно, это выполнено тогда и только тогда, когда действие G на $\overline{X}$ имеет орбиту, дополнение к которой есть замкнутое подмножество в $\overline{X}$ коразмерности не меньше 2.

В разделе 4.2 классифицированы все однородные торические многообразия. Доказано, что действие $G\times\mathcal{N}(X)$ на аффинном пространстве эквивалентно линейному. Действие G можно поднять до действия её односвязной накрывающей. Далее считаем, что G односвязна. Доказана следующая теорема.

Теорема 10. *Пусть X — торическое многообразие с транзитивным локально эффективным действием связной односвязной полупростой алгебраической группы G. Тогда $G = G_1 \times \ldots \times G_m$, где каждая простая компонента G_i изоморфна либо $\mathrm{SL}(n_i)$, либо $\mathrm{Sp}(n_i)$ и многообразие X получено из $\mathbb{K}^{n_1} \setminus \{0\} \times \ldots \times \mathbb{K}^{n_m} \setminus \{0\}$ факторизацией по действию замкнутой подгруппы в m-мерном торе $(\mathbb{K}^\times)^m$, действующем на каждой компоненте гомотетиями. Обратно, любое многообразие, полученное из $\mathbb{K}^{n_1}\setminus\{0\}\times\ldots\times\mathbb{K}^{n_m}\setminus\{0\}$ факторизацией по подгруппе в $(\mathbb{K}^\times)^m$, является однородным торическим многообразием.*

В разделе 4.3 изучены свойства однородных торических многообразий. Доказано, что однородное торическое многообразие квазипроективно, неаффинно, является проективным тогда и только тогда, когда оно изоморфно произведению проективных пространств. Найдены критерии квазиаффинности однородного торического многообразия и наличия непостоянных регулярных функций на нём. Охарактеризованы веера однородных торических многообразий.

Раздел 4.4 посвящён обобщению результатов раздела 4.2 на случай редуктивной группы G. Классифицированы торические многообразия с транзитивным действием редуктивной группы. Доказано, что все такие многообразия получаются из однородных торических многообразий полупростых групп путём умножения на тор и факторизацией по действию квазитора.

Благодарности

Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю доктору физико-математических наук Ивану Владимировичу Аржанцеву за постановку задач и постоянное внимание. Автор благодарит профессора Эрнеста Борисовича Винберга и доцента Дмитрия Андреевича Тимашёва за ценные обсуждения и весь коллектив кафедры высшей алгебры механико-математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова за создание творческой атмосферы.

Список публикаций по теме диссертации

[1] Гайфуллин С.А., *Аффинные торические $SL(2)$-вложения*, Математический сборник **199** (2008), 3-24.

[2] Аржанцев И.В., Гайфуллин С.А., *Кольца Кокса, полугруппы и автоморфизмы аффинных многообразий*, Математический сборник **201** (2010), 3-24. (Диссертанту принадлежат результаты про дикие автоморфизмы трёхмерного аффинного квадратичного конуса, а также про универсальные свойства теории дивизоров полугруппы и реализации Кокса аффинных многообразий.)

[3] Arzhantsev I.V., Gaifullin S.A., *Homogeneous Toric Varieties*, Journal of Lie Theory **20** (2010), 283-293. (Диссертанту принадлежат результаты о классификации и свойствах однородных торических многообразий.)