МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М. В. ЛОМОНОСОВА

Механико - математический факультет

На правах рукописи
УДК 519.216

Синельников – Мурылев Сергей Сергеевич

Стохастические задачи оптимальной остановки для процессов Леви

01.01.05 — теория вероятностей и математическая статистика

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени кандидата физико–математических наук

МОСКВА — 2011

Работа выполнена на кафедре теории вероятностей механико-математического факультета Московского Государственного Университета имени М. В. Ломоносова.

Научный руководитель	член-корреспондент РАН, доктор физико-математических наук, профессор Ширяев Альберт Николаевич
Официальные оппоненты	доктор физико-математических наук, профессор Мазалов Владимир Викторович
	доктор физико-математических наук, профессор Николаев Михаил Леонидович
Ведущая организация	Центральный экономико-математический институт РАН

Защита диссертации состоится « 16 » декабря 2011 г. в 16 часов 45 минут на заседании диссертационного совета Д 501.001.85 при Московском Государственном Университете имени М. В. Ломоносова по адресу: 119991, ГСП-1, Москва, Ленинские горы, МГУ, механико-математический факультет, аудитория 16–24.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке механико-математического факультета (Главное здание, 14 этаж).

Автореферат разослан « 15 » ноября 2011 г.

Ученый секретарь диссертационного совета Д 501.001.85 при МГУ,
доктор физико-математических наук,
профессор

Сорокин В. Н.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы

В стохастическом анализе широко известна так называемая «задача о разборчивой невесте». Эта задача в различных постановках рассматривалась, в частности, в работах таких авторов, как Гарднер[1], Карлин[2], Дынкин[3], Чоу, Моригути, Роббинс, Самуэльс[4], Гилберт, Мостеллер[5], Гусейн-Заде[6], Бойс[7], Пресман, Сонин[8], Гриффит, Снелл[9], Николаев[10], Глинка, Шеахан[11], Винниченко, Мазалов[12].

Сформулируем задачу, следуя работе Ширяева[13]. Имеется n объектов, занумерованных числами $1, \ldots, n$, причем объект с меньшим номером классифицируется «лучше» объекта с большим номером. Предполагается, что объекты поступают к нам в моменты времени $1, \ldots, n$ в случайном порядке (все $n!$ перестановок равновероятны), причем в результате сравнения двух из них становится ясно, какой из них лучше, хотя их истинные номера остаются неизвестными. В каждый момент времени нужно принять решение: либо отвергнуть объект (и далее к нему вернуться уже нельзя), либо принять объект (и процесс выбора прекращается). Задача состоит в том, чтобы с максимальной вероятностью выбрать объект с номером 1.

Оптимальной стратегией в этой задаче оказывается следующая. Надо просмотреть и пропустить первые $m^* - 1$ объектов, а затем продолжать осмотр до момента τ^*, когда впервые появится объект, лучший,

---

[1] *Gardner M.* Mathematical games // Scientific American. 1960. Vol. 202, no. 1. Pp. 150—156.

[2] *Karlin S.* Stochastic models and optimal policy for selling an asset // Studies in Applied Probability and Management Science. 1962. Pp. 148-–158.

[3] *Дынкин Е. Б.* Оптимальный выбор момента остановки марковского процесса // Доклады Академии Наук СССР. 1963. Т. 150, № 2. С. 238—240.

[4] *Chow Y. S., Moriguti S., Robbins H., Samuels S. M.* Optimal selection based on relative rank (the “secretary” problem) // Israel Journal of Mathematics. 1964. Vol. 2, no. 2. Pp. 81—90.

[5] Gilbert J. P., Mosteller F. Recognising the maximum of a sequence // Journal of American Statistical Association. 1966. Vol. 61. Pp. 35—73.

[6] *Гусейн-Заде С. М.* Задача выбора и оптимальное правило остановки последовательности независимых испытаний // Теория вероятностей и ее применения. 1966. Т. 11, № 3. С. 534—537.

[7] *Boyce W. M.* Stopping rules for selling bonds // Bell Journal of Economics and Management Science. 1970. Vol. 1. Pp. 27—53.

[8] *Пресман Э. Л., Сонин И. М.* Задача наилучшего выбора при случайном числе объектов // Теория вероятностей и ее применения. 1972. Т. 17, № 4. С. 695-–706.

[9] *Griffeath D., Snell J. L.* Optimal stopping in the stock market // Annals of Probability. 1974. Vol. 2. Pp. 1—13.

[10] *Николаев М. Л.* Об одном обобщении задачи наилучшего выбора // Теория вероятностей и ее применения. 1977. Т. 22, № 1. С. 191-–194.

[11] *Hlynka M., Sheahan J. N.* The secretary problem for a random walk // Stochastic Processes and their Applications. 1988. Vol. 28. Pp. 317—325.

[12] *Винниченко С. В., Мазалов В. В.* Оптимальная остановка наблюдений в задачах управления случайными блужданиями // Теория вероятностей и ее применения. 1990. Т. 35, № 4. С. 669—676.

[13] *Ширяев А. Н.* Статистический последовательный анализ, Москва: Наука, 1976.

чем все предыдущие. При большом n, $m^* \approx n/e$, а искомая вероятность приблизительно равна $1/e \approx 0.368$. Этот результат интуитивно удивителен, потому что, казалось бы, искомая вероятность должна стремиться к нулю с ростом количества объектов.

Несмотря на то, что такие оптимизационные задачи в дискретном времени являются достаточно хорошо изученными, случай непрерывного времени начал исследоваться совсем недавно. Отличительной чертой подобных задач является то, что для принятия оптимального решения требуется хорошо оценивать будущее поведение наблюдаемого процесса по полученным данным. Искомый случайный момент θ является *непредсказуемым*, т. е. несогласованным с естественной фильтрацией процесса $\mathcal{F}$. Задача заключается в построении оценки этого момента, т. е. согласованного с фильтрацией момента остановки τ, который был бы оптимален в некотором смысле. В связи с тем, что процесс $\phi_t = \mathcal{I}\{\theta < t\}$ является несогласованным с имеющейся фильтрацией, естественным образом возникает опциональная проекция этого процесса[14], процесс $\pi_\tau = \mathcal{I}\{\theta \leqslant \tau \mid \mathcal{F}_\tau\}$, определенный для любого конечного (с вероятностью 1) случайного момента τ. Таким образом, искомая задача сводится к задаче об оптимальной остановке процесса апостериорной вероятности π_t, равно как и близкая к ней задача о разладке[15]. Принципиальным отличием класса рассматриваемых задач от задачи о разладке является то, что в рассматриваемой задаче в момент θ не происходит смены характеристик процесса.

Определим ряд критериев, которые используются в подобных задачах скорейшего обнаружения. Пусть X — наблюдаемый процесс, θ — искомый непредсказуемый момент, $\mathcal{M}^X$ — класс марковских моментов, порожденных рассматриваемым процессом. Решением задачи при **среднеквадратичном** критерии называется момент $\tau^* \in \mathcal{M}^X$, такой что

$$\mathsf{E}(X_\theta - X_{\tau^*})^2 = \inf_{\tau \in \mathcal{M}^X} \mathsf{E}(X_\theta - X_\tau)^2.$$

Таким образом, момент τ^* минимизирует норму $\mathsf{E}(X_\theta - X_\tau)^2$ в классе $\mathcal{M}^X$. Этот критерий обобщается на случай нормы $\mathsf{E}(X_\theta - X_\tau)^q$, $q > 1$. Подобные критерии часто называются **пространственными**, поскольку они используют «близость» величин X_τ и X_θ. В работе Ширяева[16] было предложено задействовать в этой задаче **временны́е** кри-

[14]См., например, *Dellacherie C., Meyer P. A.* Probabilités et potentiel. Paris: Hermann, 1976.

[15]См., например, *Колмогоров А.Н., Прохоров Ю.В., Ширяев А.Н.* Вероятностно-статистические методы обнаружения спонтанно возникающих эффектов // Труды МИАН СССР. 1988. Т. 182. С. 4-23.

[16]*Shiryaev A. N.* Quickest detection problems in the technical analysis of the financial data // Proc. Mathematical Finance Bachelier Congress. Berlin: Springer-Verlag, 2002. Pp. 487–521.

терии, использующие непосредственно близость τ к θ, т. е. величину вида

$$\mathsf{E}\left[G_1((\theta-\tau)^+)+G_2((\tau-\theta)^+)\right]$$

с некоторыми функциями риска $G_1(t)$ и $G_2(t)$, $t \geqslant 0$. Среди временных критериев особо следует выделить два критерия: **абсолютный**, использующий норму $\mathsf{E}|\theta-\tau|$, и **байесовский**, использующий норму $\mathsf{P}(\tau<\theta)+c\,\mathsf{E}(\tau-\theta)^+$, где c — некоторая заданная положительная постоянная. Также среди временных критериев можно выделить еще один критерий, который называется **условно-экстремальным**. Для фиксированного $\alpha \in (0,1)$ определяется класс моментов остановки, для которых вероятность «ложной тревоги», т. е. $\mathsf{P}(\tau<\theta)$, не превышает α:

$$\mathcal{M}_\alpha^X(\theta)=\{\tau\in\mathcal{M}^X \mid \mathsf{P}(\tau<\theta)\leqslant\alpha\}.$$

Под моментом, являющимся решением задачи при условно-экстремальном критерии, понимается момент $\tau^*\in\mathcal{M}_\alpha^X(\theta)$, такой что для него минимизируется среднее время запаздывания:

$$\mathsf{E}(\tau^*-\theta)^+=\inf_{\tau\in\mathcal{M}_\alpha^B(\theta)}\mathsf{E}(\tau-\theta)^+.$$

Известно[17], что условно-экстремальный критерий является частным случаем байесовского критерия (при соответствующем выборе постоянной c).

Поставленные задачи особенно подробно изучались для процессов броуновского движения B_t и броуновского движения со сносом $B_t^\mu=\mu t+B_t$. Первой работой, посвященной этой теме, была работа 2000 года Граверсена, Пешкира и Ширяева[18], в которой рассматривался конечный интервал $[0,1]$, процесс стандартного броуновского движения B_t, а непредсказуемый момент представлял собой $\theta=\inf\{t\colon B_t=\sup_{0\leqslant s\leqslant 1}B_s\}$ — момент (первого) достижения максимума. Согласно результатам этой работы, оптимальный момент остановки имеет вид

$$\tau^*=\inf\{t<1\colon S_t-B_t\geqslant z^*\sqrt{1-t}\},$$

где $z^*\approx 1.12$, а $S_t=\sup_{s\leqslant t}B_s$. Эти результаты были обобщены Педерсеном[19] на случай общего пространственного критерия. Для этого критерия ответ выглядит точно так же, лишь с заменой постоянной

[17] См. *Ширяев А. Н.* Статистический последовательный анализ, Москва: Наука, 1976.

[18] *Graversen S. E., Peskir G., Shiryaev A. N.* Stopping Brownian motion without anticipation as close as possible to its ultimate maximum // Теория вероятностей и ее применения. 2000. Т. 45, № 1. С. 125–136.

[19] *Pedersen J. L.* Optimal prediction of the ultimate maximum of Brownian motion // Stochastics and Stochastic Reports. 2003. Vol. 75, no. 4. Pp. 205–219.

z^* на постоянную $z^*(q)$. В 2004 году Урусовым[20] было доказано тождество

$$\mathsf{E}|\tau-\theta|+\frac{1}{2}=\mathsf{E}(B_\tau-B_\theta)^2$$

для любого $\tau\in\mathcal{M}^B$. Тем самым было доказано, что для броуновского движения среднеквадратичный и абсолютный критерии для момента максимума совпадают. В работе Ширяева[21] был рассмотрен условно-экстремальный критерий для момента θ и введен еще один непредсказуемый момент $g=\sup\{t\leqslant 1\colon B_t=0\}$ — момент последнего нуля. Для этого момента были рассмотрены условно-экстремальный и абсолютный критерии. В работе было показано, что в случае условно-экстремального критерия для момента θ оптимальный момент остановки имеет вид

$$\tau^*=\inf\{t<1\colon S_t-B_t\geqslant z_\alpha\sqrt{1-t}\},$$

где z_α — некоторая постоянная. В то же время для момента g оптимальные моменты остановки в случае условно-экстремального и абсолютного критерия имеют ровно тот же вид, что и для момента θ, лишь с заменой процесса S_t-B_t на процесс $|B_t|$.

Указанные совпадения не имеют места для процесса $B_t^\mu=\mu t+B_t$. Случаи среднеквадратичного и абсолютного критериев для момента максимума θ были рассмотрены в работах де Туа и Пешкира[22,23]. «Достаточной статистикой», позволяющей принять оптимальное решение, здесь по-прежнему является процесс $S_t^\mu-B_t^\mu$, где $S_t^\mu=\sup_{s\leqslant t}B_s^\mu$, однако структура множества остановки различается в зависимости от рассматриваемого критерия. Абсолютный критерий для момента последнего нуля был рассмотрен в работе де Туа, Пешкира и Ширяева[24], и, в отличие от случая броуновского движения, ответ для этого момента отличается от ответа для момента максимума. Более того, границы множества остановки во всех этих случаях не могут быть найдены в явном виде, а представляют собой решение системы уравнений Воль-

[20] *Урусов М. А.* Об одном свойстве момента достижения максимума броуновским движением и некоторых задачах оптимальной остановки // Теория вероятностей и ее применения. 2004. Т. 49, № 1. С. 184–190.

[21] *Ширяев А. Н.* Об условно-экстремальных задачах скорейшего обнаружения непредсказуемых моментов у наблюдаемого броуновского движения // Теория вероятностей и ее применения. 2008. Т. 53, № 4. С. 751–768.

[22] *du Toit J., Peskir G.* Trap of complacency predicting the maximum // The Annals of Applied Probability. 2007. Vol. 35, no. 1. Pp. 340–365.

[23] *du Toit J., Peskir G.* Predicting the time of the ultimate maximum of the Brownian motion with a drift // Proc. Mathematical Control Theory Finance. Berlin: Springer-Verlag, 2008. Pp. 95–112.

[24] *du Toit J., Peskir G., Shiryaev A. N.* Predicting the last zero of the Brownian motion with a drift // Stochastics. 2008. Vol. 80. Pp. 229–245.

терра второго рода.

Кохен[25] исследовал среднеквадратичный критерий для броуновского движения со сносом (отрицательным) на **бесконечном горизонте**, т. е. на интервале $[0, +\infty)$. Согласно результатам его работы, достаточной статистикой в этом случае является $S_t^\mu - B_t^\mu$ (как и в случае конечного горизонта), однако границей является постоянная.

Рассматриваемые задачи для процессов, отличных от броуновского движения и броуновского движения со сносом, изучены не так хорошо. Ряд исследователей изучали различные задачи подобного характера для геометрического броуновского движения. В частности, к таким работам относятся работы Ширяева, Ксу и Жу[26] и де Туа и Пешкира[27], где качество момента остановки τ определялось функцией от отношения X_τ / X_θ, т. е. $\mathsf{E}\, u(X_\tau / X_\theta)$, где X — геометрическое броуновское движение, θ — момент его максимума на рассматриваемом интервале, а u — линейная или логарифмическая функция, а также работа Педерсена[28], в которой рассматривался критерий

$$\mathsf{P}(X_\tau \geqslant p\, X_\theta),$$

где $p \in (0, 1)$. В первом случае оптимальная стратегия приводит нас к правилу «buy and hold», т. е. имеет вырожденный вид: в зависимости от параметров процесса, оптимальный момент остановки τ^* либо равен 0, либо равен T. Во втором случае вид ответа ближе к случаю дискретного времени: оказывается, что оптимальная стратегия имеет вид

$$\tau^* = \inf\{t_p^* < t \leqslant 1 \colon X_t = p\, S_t),$$

где $S_t = \sup_{s \leqslant t} X_s$, а t_p^* — некоторая постоянная, зависящая от параметра p.

В работе Эспинозы и Тоузи[29] исследовалась похожая задача для произвольной однородной диффузии X_t со свойством возврата к среднему. При начальном условии $X_0 = x > 0$ определялся случайный горизонт $T_0 = \inf\{t > 0 \colon X_t = 0\}$. На этом отрезке решалась задача поиска момента остановки τ с критерием $\mathsf{E}\, u(X_\theta - X_\tau)$, где u — функция потерь, удовлетворяющая ряду условий (в частности, возрастаю-

[25] *Cohen A.* Examples of optimal prediction in the infinite horizon case // Statistics and Probability Letters. 2010. Vol. 80. Pp. 950–957.

[26] *Shiryaev A. N., Xu Z., Zhu X. Y.* Thou shalt buy and hold // Quantative Finance. 2008. Vol. 8, no. 8. Pp. 765–776.

[27] *du Toit J., Peskir G.* Selling a stock at the ultimate maximum // The Annals of Applied Probability. 2009. Vol. 19, no. 3. Pp. 983–1014.

[28] *Pedersen J. L.* An optimal selling strategy for stock trading based on predicting the maximum price. Preprint. 2007.

[29] *Espinosa G.-E., Touzi N.* Detecting the maximum of a mean-reverting scalar diffusion. Preprint. 2010.

щая и выпуклая книзу), а θ — момент максимума процесса на отрезке $[0,T]$. В работе было показано, что при некоторых дополнительных условиях оптимальный момент остановки имеет вид

$$\tau^* = \inf\{t \geqslant 0\colon S_t \geqslant \gamma(X_t)\},$$

где $S_t = \sup_{s\leqslant t} X_s$ — текущий максимум процесса, а γ есть некоторая граница, имеющая весьма сложный вид. Как мы видим, «достаточная статистика» здесь уже имеет вид (S_t, X_t), а не $S_t - X_t$.

В работе Берник, Даланга и Пешкира[30] исследовался пространственный критерий для момента максимума устойчивого процесса Леви X_t с параметром $\alpha \in (1,2)$ на конечном интервале $[0,T]$. Оказывается, что в зависимости от значения параметров p и α оптимальный момент остановки τ^* или имеет вид

$$\tau^* = \inf\{t \leqslant T\colon S_t - X_t \geqslant z_*(T-t)^{1/\alpha}\},$$

где z_* является решением некоторого трансцендентного уравнения и зависит от q и α, или равняется T вне зависимости от поведения статистики $S_t - X_t$.

Цель диссертационной работы состоит в получении различных результатов, связанных с моментами абсолютного максимума и последнего нуля для процессов Леви на бесконечном горизонте.

Научная новизна. Все полученные результаты диссертации являются новыми. Для достижения поставленных целей были решены следующие задачи:

1. Построены оптимальные стратегии для ряда критериев в случае броуновского движения со сносом.

2. Доказано обобщение теоремы Леви о совпадении пар процессов по распределению для случая процесса Леви конечной интенсивности.

3. Указан вид оптимальной стратегии для ряда критериев в случае общего процесса Леви конечной интенсивности. Построены оптимальные стратегии для ряда критериев в случае процесса, являющегося комбинацией броуновского движения и пуассоновского процесса, и предложен алгоритм численного моделирования, позволяющий получить оптимальную стратегию в случае, когда ее аналитический вывод оказывается слишком сложным.

[30] *Bernyk V., Dalang R. C., Peskir G.* Predicting the ultimate supremum of a stable Lévy process with no negative jumps // Annals of Probability, to appear.

Практическая значимость. Диссертация носит теоретический характер. Результаты и методы работы, изложенные в диссертации, могут быть полезными при изучении задач, в которых наблюдаемый процесс может моделироваться в рамках процессов Леви.

Апробация работы. Основные результаты диссертации докладывались на следующих семинарах и конференциях:

- Большой кафедральный семинар кафедры теории вероятностей, рук. Ширяев А. Н., МГУ им. М. В. Ломоносова, 2011 г.
- Семинар «Стохастический анализ и теория мартингалов», рук. Ширяев А. Н., МГУ им. М. В. Ломоносова, неоднократно в 2008–2011 гг.
- Семинар «Стохастический анализ», рук. Гущин А. А. и Ширяев А. Н., МИАН им. В. А. Стеклова РАН, 2009 г.
- Международный симпозиум «Visions in Stochastics», Москва, МИАН им. В. А. Стеклова РАН, 2010 г.
- Семинар «Вероятностные проблемы управления и стохастические модели в экономике, финансах и страховании», рук. Аркин В. И. и Пресман Э. Л., ЦЭМИ РАН, 2011 г.

Публикации. Результаты диссертации опубликованы в трех работах автора, входящих в список журналов по перечню ВАК. Работ, написанных в соавторстве, нет. Список публикаций приведен в конце автореферата.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, общей характеристики работы, трех глав, библиографии и приложения. Общий объем диссертации составляет 74 страницы. Библиография включает в себя 63 наименования, включая 3 работы автора по теме диссертации.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении работы описывается общий тип исследуемых задач. Общая постановка задач, исследуемых в диссертации, является естественным продолжением широко известной «задачи о разборчивой невесте» для случая непрерывного времени. Несмотря на то, что в случае дискретного времени задачи подобного характера являются достаточно хорошо изученными, случай непрерывного времени стал исследоваться сравнительно недавно: первая из подобных задач была рассмотрена в 2000 году.

В первой главе приведен обзор известных результатов, связанных с исследуемой темой, и рассматриваются некоторые задачи, связанные с процессом броуновского движения со сносом на бесконечном горизонте. Автором исследуются абсолютный, байесовский и условно-экстремальный критерии. Пусть B_t^μ, где $\mu < 0$, — стандартное броуновское движение с отрицательным сносом на бесконечном интервале, $t \in [0, \infty)$, а $S_t^\mu = \sup_{s \leqslant t} B_s^\mu$. Рассматриваются следующие непредсказуемые моменты:

$$\theta = \inf\{t\colon B_t^\mu = \sup_{s \geqslant 0} B_s^\mu\},$$
$$g = \sup\{t\colon B_t^\mu = 0\}.$$

Для условно-экстремального и абсолютного критериев оказываются верны следующие теоремы.

Теорема 1. *Пусть* $0 < \alpha < 1$. *Для условно-экстремального критерия для момента* θ *оптимальным моментом остановки является момент*

$$\tau_\alpha^* = \inf\{t\colon S_t^\mu - B_t^\mu \geqslant z_\alpha^*\},$$

где

$$z_\alpha^* = \frac{\ln \alpha}{2\mu}.$$

Теорема 2. *Пусть* $0 < \alpha < 1$. *Для условно-экстремального критерия для момента* g *оптимальным моментом остановки является момент*

$$\tau_\alpha^* = \inf\{t\colon B_t^\mu \leqslant -z_\alpha^*\},$$

где

$$z_\alpha^* = \frac{\ln \alpha}{2\mu}.$$

Теорема 3. *Оптимальным моментом в смысле абсолютного критерия для момента* θ *является момент*

$$\tau^* = \inf\{t\colon S_t^\mu - B_t^\mu \geqslant z^*\},$$

где z^* *— единственное положительное решение уравнения*

$$e^{2\mu z} = \frac{1}{1 - 4\mu z}.$$

Теорема 4. *Оптимальным моментом в смысле абсолютного критерия для момента g является момент*

$$\tau^* = \inf\{t\colon B_t^\mu \leqslant -z^*\},$$

где z^* — единственное положительное решение уравнения

$$e^{2\mu z} = \frac{1}{1-4\mu z}.$$

Таким образом, в рассматриваемых задачах для моментов θ и g роль «достаточных статистик» будут играть процессы $S_t^\mu - B_t^\mu$ и B_t^μ соответственно, а оптимальными моментами остановки будут являться моменты достижения этими процессами некоторого постоянного уровня. Более того, и вид ответа, и даже границы в этих задачах совпадают, что больше соответствует случаю обычного броуновского движения на конечном интервале, чем случаю броуновского движения со сносом, где структура этих моментов принципиально различна.

Результаты первой главы опубликованы в работе [1].

Доказательство указанных выше теорем принципиально опиралось на результат работы Граверсена и Ширяева[31], который обобщал знаменитую теорему Леви о совпадении пары процессов по распределению на случай броуновского движения со сносом. **Во второй главе** эта теорема обобщается на случай процесса Леви с конечной мерой.

Классический результат Леви гласит, что

$$(\sup B - B, \sup B) \overset{\text{law}}{=} (|B|, L(B)),$$

где B — броуновское движение, $L(B)$ — локальное время броуновского движения в нуле, а $\overset{\text{law}}{=}$ означает совпадение процессов по распределению.

Этот результат обобщается на случай броуновского движения со сносом. Граверсеном и Ширяевым было показано, что

$$(\sup B^\mu - B^\mu, \sup B^\mu) \overset{\text{law}}{=} (|X^\mu|, L(X^\mu)),$$

где X^μ — единственное решение стохастического дифференциального уравнения

$$dX_t^\mu = -\mu \operatorname{sgn} X_t^\mu dt + dB_t, \quad X_0^\mu = 0, \quad \operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x > 0, \\ -1, & \text{если } x \leqslant 0. \end{cases}$$

[31] *Graversen S. E., Shiryaev A. N.* An extension of P. Lévy's distributional properties to the case of a Brownian motion with a drift // Bernoulli. 2000. Vol. 6, no. 4. Pp. 615–620.

Далее авторы доказывают, что инфинитезимальный оператор процесса $|X_t^x|$ совпадает с инфинитезимальным оператором отраженного броуновского движения со сносом.

Пусть X_t — некоторый процесс Леви, мера Леви ν которого удовлетворяет условию

$$\int_{|x|<1} \nu(dx) < \infty.$$

В этом случае количество скачков процесса на любом конечном интервале конечно, и для процесса X_t можно определить триплет инфинитезимальных характеристик (μ, σ, ν) относительно функции урезания $h(x) = x\mathcal{I}\{x \neq 0\}$, где за $\mathcal{I}$ обозначена индикаторная функция. Подобные процессы часто называют процессами Леви с конечной мерой или процессами Леви конечной интенсивности. Пусть $\sigma > 0$, т. е. процесс X_t имеет невырожденную диффузионную компоненту. Введем также процесс $S_t = \sup_{s\leqslant t} X_s$ — текущий супремум процесса X_t. Главным результатом второй главы является следующее утверждение.

Теорема 5. *1. Предположим, что процесс X_t не имеет положительных скачков. Тогда пара процессов $(S_t - X_t, S_t)$ совпадает по распределению с парой процессов $(|Y_t|, L_t)$, где Y_t является решением следующего стохастического дифференциального уравнения:*

$$dY_t = -\mu \operatorname{sgn} Y_{t\text{-}} dt + \sigma dB_t - \operatorname{sgn} Y_{t\text{-}} \Delta N_t, \quad Y_0 = 0,$$

где B_t — стандартное броуновское движение, N_t — составной пуассоновский процесс, соответствующий случайной пуассоновской мере интенсивности ν, а L_t является локальным временем марковского процесса Y_t в нуле.

2. В общем случае, когда процесс X_t имеет как положительные, так и отрицательные скачки, пара процессов $(S_t - X_t, S_t)$ совпадает по распределению с парой процессов $(|Z_t|, R_t)$, где Z_t является решением следующего уравнения:

$$dZ_t = -\mu \operatorname{sgn} Z_{t\text{-}} dt + \sigma dB_t - \operatorname{sgn} Z_{t\text{-}} \Delta N_t - \\ - \mathcal{I}\{Z_{t\text{-}}(Z_{t\text{-}} - \operatorname{sgn} Z_{t\text{-}} \Delta N_t) \leqslant 0\} (Z_{t\text{-}} - \operatorname{sgn} Z_{t\text{-}} \Delta N_t), \quad Z_0 = 0,$$

где B_t и N_t были определены ранее, а

$$R_t = \sum_{0\leqslant s\leqslant t} \mathcal{I}\{Z_{t\text{-}}(Z_{t\text{-}} - \operatorname{sgn} Z_{t\text{-}} \Delta N_t) \leqslant 0\} |Z_{t\text{-}} - \operatorname{sgn} Z_{t\text{-}} \Delta N_t| + L_t,$$

где L_t является локальным временем марковского процесса Z_t в нуле.

Для применения этой теоремы к рассматриваемым задачам необходимо выразить процесс $|Z_t|$ в терминах его инфинитезимального оператора. Аналогично определению процесса отраженного броуновского движения со сносом автор вводит следующее определение.

Определение 1. *Пусть X_t — процесс Леви с характеристиками (μ, σ, ν) относительно функции урезания $h(x)$. Назовем «отраженным в нуле процессом X_t» марковский процесс $\mathrm{RLP0}(X)_t$ с инфинитезимальным оператором $\mathcal{A}$, действующим на функциях*

$$f \in \mathcal{S}([0,\infty]), \frac{df}{dx}\,|_{x\downarrow 0} = 0,$$

где $\mathcal{S}$ — пространство быстро убывающих функций (пространство Шварца), следующим образом:

$$\mathcal{A}^{(X)} f(y) = \mu f'(y) + \frac{1}{2}\sigma^2 f''(y) + \int [f(y+x) - f(y) - f'(y)h(x)]\nu^0(y,x),$$

где $\nu^0(y,x)$ — это мера, определенная для $y \geqslant 0$ и имеющая вид

$$\nu^0(y,dx) = \begin{cases} \nu(dx), & dx > -y, \\ \int_{-\infty}^{-y} \nu(dx), & dx = -y, \\ 0, & dx < -y. \end{cases}$$

Такой оператор определяет единственное семейство мер, а соответствующий марковский процесс мы, по определению, назовем отраженным в нуле процессом X_t, начинающимся в $x \geqslant 0$ и будем обозначать $\mathrm{RLP0}(X)_t^x$.

Автор обозначает процесс Z_t, имеющий начальную точку $x \geqslant 0$, за Z_t^x. Оказывается, что верно следующее утверждение.

Теорема 6. *Для любого $x \geqslant 0$*

$$|Z_t^x| \overset{\text{law}}{=} \mathrm{RLP0}(-X)_t^x.$$

Результаты второй главы опубликованы в работе [2].

В третьей главе автор использует результаты второй главы, чтобы обобщить подход, предложенный в первой главе, на случай процессов Леви с конечной мерой. Пусть X_t — наблюдаемый процесс Леви, рассматриваемый на бесконечном интервале $[0,\infty)$. Пусть $S_t = \sup_{0\leqslant s\leqslant t} X_s$ — текущий супремум процесса, $S = \sup_{s\geqslant 0} X_s$ — абсолютный супремум процесса. Рассматривается следующий непредсказуемый момент:

$$\theta = \inf\{t \geqslant 0 \colon S_t = S\}.$$

Для конечности момента θ предполагается условие $\mathsf{E}X_1 < 0$. В качестве критериев оптимальности приближения рассматриваются байесовский (в т. ч. условно-экстремальный), абсолютный и пространственный критерии. Первая часть третьей главы посвящена доказательству следующих фактов.

Теорема 7. *В рассматриваемых задачах оптимальный момент остановки имеет вид*

$$\tau^* = \inf\{t \geqslant 0\colon S_t - X_t \geqslant a\},$$

где a — некоторая положительная постоянная (зависящая от критерия).

Отсюда можно вывести следующий результат для случая условно-экстремального критерия.

Теорема 8. *Пусть $S = \sup_{s\geqslant 0} X_s$, $X_0 = 0$, $G(z) = \mathsf{P}(S < z)$. Тогда для условно-экстремального критерия оптимальным моментом остановки будет первый момент выхода процесса $S_t - X_t$ на уровень a_1, являющийся корнем уравнения*

$$1 - G(a_1) = \alpha.$$

В второй части третьей главы рассматривается общая схема нахождения постоянной a с помощью задачи Стефана. Показывается, что искомая задача сводится к интегро-дифференциальному уравнению. В случае абсолютного критерия это уравнение имеет следующий вид:

$$-\mu W_*'(z) + \frac{1}{2}\sigma^2 W_*''(z) + \int [W_*(z+x) - W_*(z) - W_*'(z)h(x)]\widetilde{\nu^0}(z, dx) = \\ = 1 - 2G(z), \quad 0 \leqslant z < z^*, \tag{1}$$

где

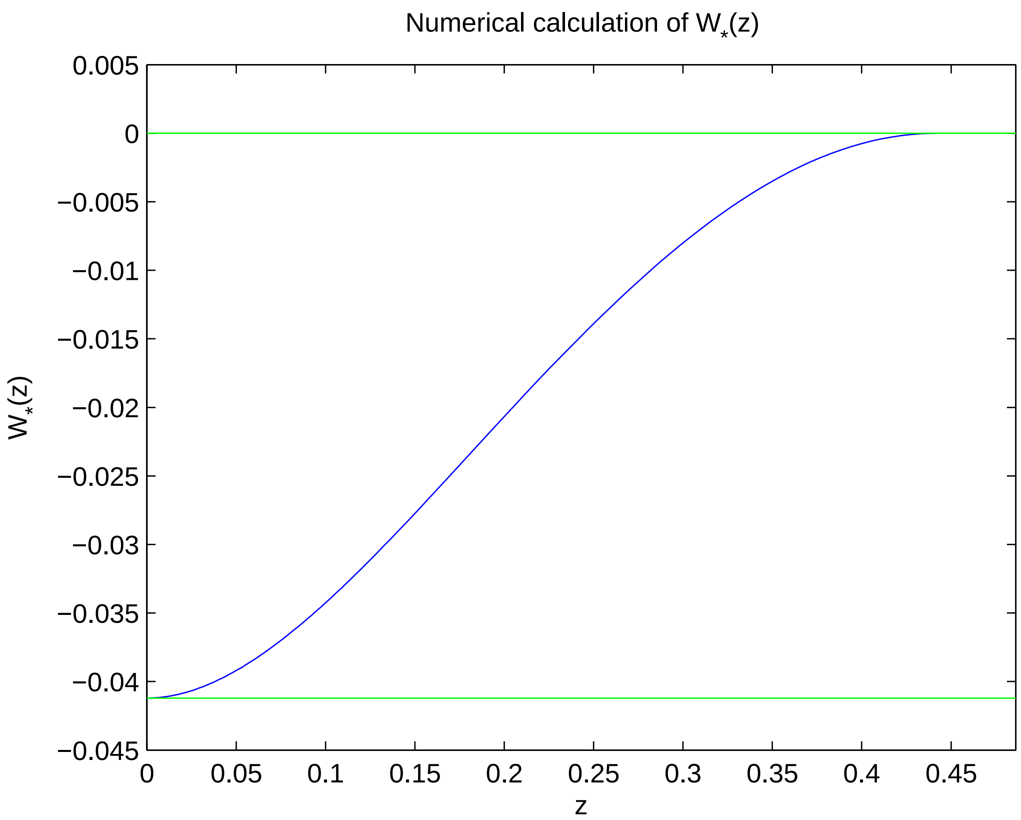
$$\widetilde{\nu^0}(z, x) = \begin{cases} \nu(-dx), & dx > -y, \\ \int_{x\leqslant -y} \nu(-dx), & dx = -y, \\ 0, & dx < -y. \end{cases}$$

Как видно, мера $\widetilde{\nu^0}(z, x)$ получается из определения 1 при рассмотрении меры $\widetilde{\nu}(x) = \nu(-x)$, соответствующей процессу $-X_t$. Задача Стефана получается, если добавить к этому уравнению необходимые граничные условия (условие мгновенной остановки, условие нормального отражения и условие гладкого или непрерывного склеивания, в зависимости от характеристик процесса). После решения задачи Стефана необходимо проверить, что найденная функция является решением исходной задачи. Для этого можно использовать формулу Ито, поскольку найденная функция принадлежит пространству Шварца.

В третьей части третьей главы указанная схема применяется к сравнительно простому процессу $X_t = \mu t + \sigma B_t - rN_t$, где N_t — простой пуассоновский процесс интенсивности λ. В этом случае интегро-дифференциальное уравнение вырождается в дифференциальное уравнение с опережающим аргументом. Для случая абсолютного критерия уравнение (1) запишется как

$$-\mu W_*'(z) + \frac{1}{2}\sigma^2 W_*''(z) + \lambda(W_*(z+r) - W_*(z)) = 2e^{-\gamma z} - 1, \quad 0 \leqslant z < a. \tag{2}$$

Его решение сводится к последовательному решению систем линейных уравнений. Применение этого алгоритма к задаче с параметрами $\mu = -1$, $\sigma = 1$, $r = 0.35$, $\lambda = 2$ приводит к неизвестной границе $a \approx 0.442$ и функции $W(z)$, имеющей следующий вид:



Численный подсчет функции $W_*(z)$ при значениях параметров $\mu = -1$, $\sigma = 1$, $r = 0.35$, $\lambda = 2$. Функция представляет собой «склейку» из двух разных функций. Найденное значение $a \approx 0.442$.

В работе также предложен альтернативный способ нахождения неизвестной постоянной a в том случае, если решение задачи Стефана представляется слишком сложным: численное моделирование границы методом Монте-Карло. Алгоритм, приведенный **в приложении** работы, применяется к указанному выше процессу и приводит к постоянной $a \approx 0.44$.

В заключительной части главы обсуждается вопрос, связанный с моментом последнего нуля. Ввиду разрывности траекторий процесса Леви можно определить два различных момента:

$$g_1 = \sup\{t \geqslant 0 \colon X_t = 0\},$$
$$g_2 = \sup\{t \geqslant 0 \colon X_t \geqslant 0\}.$$

Подход, использованный в первой главе для случая броуновского движения со сносом, с успехом может быть применен для момента g_2 и процесса Леви X_t. Более того, если процесс X_t имеет только отрицательные скачки, то аналогично результатам первой главы можно показать, что оптимальная стратегия для момента g_2 будет точно той же, что и оптимальная стратегия для момента θ с точностью до замены процесса «достаточной статистики».

Для исследования момента g_1 требуется выразить для него процесс апостериорной вероятности. Подход, предложенный в работе де Туа, Пешкира и Ширяева[32], состоит в том, чтобы выразить его следующим образом:

$$\pi_t = \mathsf{P}(g_1 \leqslant t \mid \mathcal{F}_t) = \mathsf{P}_{X_t}\{l = 0\},$$

где $l = \lim_{t\to\infty} L_t$, а L_t — локальное время в нуле процесса X_t. Таким образом, процесс апостериорной вероятности π_t представляет собой, вообще говоря, функцию от X_t. Отдельный вопрос представляет собой нахождение явного вида этой функции для процесса Леви. После того как будет получен процесс апостериорной вероятности, дальнейшее решение не будет принципиально отличаться от случая момента θ.

Результаты третьей главы опубликованы в работе [3].

Благодарности. Автор выражает свою глубокую благодарность своему учителю и научному руководителю члену-корреспонденту РАН, доктору физико-математических наук, профессору Альберту Николаевичу Ширяеву за постановку задачи, неоценимую помощь и интерес к работе.

[32] *du Toit J., Peskir G., Shiryaev A. N.* Predicting the last zero of the Brownian motion with a drift // Stochastics. 2008. Vol. 80. Pp. 229–245.

Список публикаций автора по теме диссертации

1. Об оптимальной остановке броуновского движения с отрицательным сносом // Теория вероятностей и ее применения. 2011. Т. 56, № 2. С. 391–398.

2. О совместном распределении $(\sup X - X, \sup X)$ для процесса Леви X // Успехи математических наук. 2010. Т. 65, № 6. С. 193–194.

3. О моменте абсолютного максимума процесса Леви // Вестник МГУ. 2011. Т. 4. С. 23–27.