МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. Ломоносова

На правах рукописи

Друца Алексей Валерьевич

О решении некоторых задач динамики океана

01.01.07 — Вычислительная математика

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Москва, 2011

Работа выполнена на кафедре вычислительной математики механико-математического факультета Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук, профессор Кобельков Георгий Михайлович
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, профессор Залесный Владимир Борисович доктор физико-математических наук, профессор Кузнецов Евгений Борисович

Ведущая организация:
Национальный исследовательский университет «Московский энергетический институт»

Защита состоится 28 декабря 2011 года в 16 ч. 45 мин. на заседании диссертационного совета Д 501.002.16 при Московском государственном университете имени М.В. Ломоносова по адресу: Российская Федерация, 119991, Москва, ГСП 1, Ленинские горы, д. 1, Механико-математический факультет, аудитория 14-08.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова.

Автореферат разослан «28» ноября 2011 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета Д 501.002.16
доктор физико-математических наук,
профессор Корнев А.А.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Мировой океан является одним из основных факторов, влияющих на климат Земли. Для изучения такого влияния проводятся математические и физические исследования трехмерных моделей циркуляции океана. Данные исследования относятся к наиболее крупным и важным задачам математического моделирования геофизических процессов. Модели океана, наравне с моделями атмосферы, составляют основу изучения и решения задач краткосрочного прогноза погоды, долгосрочного изменения климата, а также моделирования развития катастроф как природного характера (цунами и др.), так и техногенного характера (разлив нефти и нефтепродуктов и др.)

Общепринято считать, что океан является слабо сжимаемой жидкостью, на которую действует сила Кориолиса. Основными величинами, описывающими движение и состояние океана, являются поле скоростей, температура, соленость, давление и плотность воды. Полная система уравнений, описывающая поведение данных величин, состоит из основных уравнений сжимаемой жидкости, на которую действует сила Кориолиса. Однако такая модель является чрезвычайно сложной как с точки зрения математического изучения, так и с вычислительной точки зрения. Как правило, во всех теоретических и практических исследованиях реальных физических систем всегда стараются сделать упрощающие предположения для передачи сути явления. Модель, описывающая крупномасштабную динамику океана, получается из трехмерной системы уравнений Навье-Стокса для несжимаемой вязкой жидкости путем упрощения уравнения для вертикальной компоненты скорости и введения уравнения для плотности (уравнений для температуры и солености). Это упрощение (называемое гидростатическим приближением) делается в силу того, что в масштабе океана вертикальные и горизонтальные характерные линейные размеры существенно отличаются друг от друга (десятки километров против тысяч километров). Система таких уравнений получила название *система примитивных уравнений* (англ. Primitive Equations).

Исследование этой модели ведется не один десяток лет. За это время было доказано существование решения «в малом»: было показано, что для любого коэффициента вязкости, любых достаточно гладких начальных условий существует интервал времени, на котором существует решение, причем интервал времени зависит от исходных данных задачи[1]. Помимо этого, было доказано существование решения «в целом» (для произвольного отрезка времени $[0, T]$) при дополнительных предположениях о пространственной области[2]. Однако получить окончательное обоснование корректности системы примитивных уравнений долгое время не удавалось. За последнее десятилетие в этом направлении математических исследований наиболее значимым шагом вперед стала работа Г.М. Кобелькова[3], в которой было доказано существование «в целом» и единственность обобщенного решения системы уравнений крупномасштабной динамики океана в цилиндре над евклидовой плоской областью без специальных предположений о малости исходных данных задачи.

Данное доказательство ведется широко известным методом, суть которого заключается в получении некоторых априорных оценок решения дифференциальных уравнений (аналогичный метод был применен в работе Е.С. Done[4]). Большая часть данных оценок получается из так называемых энергетических тождеств. В то же время обойтись только стандартными методами, применяемыми в линейных уравнениях, не удается. Так в случае трехмерных уравнений Навье-Стокса, из которых получаются уравнения крупномасштабной циркуляции океана, вопрос коррект-

[1]R.Temam, M.Ziane, *Some mathematical problems in geophysical fluid dynamics,* Handbook of Mathematical Fluid Dynamics, vol. 3, S. Frielander and D. Serr Eds, Elsevier, pp. 535-658, 2004.

[2]J.L.Lions, R.Temam, S.Wang, *On the equations of the large-scale ocean,* Nonlinearity, 5, pp. 1007-1053, 1992.

[3]G.M.Kobelkov, *Existence of a solution "in the large" for ocean dynamics equations,* J. math. fluid mech., 9, pp. 588–610, 2007.

[4]C.Cao, E.S.Titi, *Global well-posedness of the three-dimensional viscous primitive equations of large scale ocean and atmosphere dynamics,* Annals of Mathematics, 166(1), pp. 245-267, 2007.

ности до сих пор остается одной из главных открытых проблем математики XX века. Однако, в отличие от уравнений Навье-Стокса, примитивные уравнения имеют более простую структуру в вертикальном направлении. Данный факт используется в доказательстве, где удается получить дополнительные оценки для производных решения в вертикальном направлении. Кроме того, для доказательства априорной оценки давления данный факт позволил применить новую технику, ранее не применяемую для получения подобных результатов.

В работах, опубликованных ранее в литературе, исследовались примитивные уравнения, которые описывают циркуляцию океана, расположенного над плоскостью. В то же время Мировой океан имеет непостоянную глубину и располагается на Земном шаре, а все уравнения, описывающие его динамику, рассматриваются на этой поверхности. Поэтому с практической точки зрения более важным является изучение модели крупномасштабной динамики океана на таких поверхностях. Обобщение доказательства теоремы существования «в целом» и единственности для примитивных уравнений на случай более широкого класса областей являлось центральной задачей диссертации. В результате данная задача в целом решена: удалось получить положительные результаты для уравнений описывающих, крупномасштабную динамику океана как в области, являющейся цилиндром над двумерным многообразием, так и в евклидовой области с неровным дном. Следует отметить, что параллельно с результатами данной диссертации расширение класса областей на случай неровного дна было также рассмотрено в работе И. Кукавицы[5]. Однако в работе И. Кукавицы на боковой границе области рассматривались граничные условия непротекания и прилипания, в то время как в данной работе исследовались краевые условия непротекания и свободного скольжения.

В работе Г.М. Кобелькова доказательство априорных оценок, как

[5] I.Kukavica, M.Ziane, *On the regularity of the primitive equations of the ocean,* Nonlinearity, 20, pp. 2739-2753, 2007.

упоминалось ранее, существенно опирается на простую структуру примитивных уравнений в вертикальном направлении, кроме того, также существенно используется простота области в вертикальном направлении: область определения уравнений является цилиндром над двумерной плоской областью с некоторыми условиями регулярности. Это означает, что вопрос существования «в целом» и единственности решения уравнений крупномасштабной динамики океана в областях другого вида не является очевидным. Так, при исследовании этой задачи в области с неровным дном не удается доказать теорему существования и единственности, используя впрямую эту технику. Поэтому потребовалось несколько изменить постановку задачи. А именно, в системе уравнений делается замена вертикальной переменной так, чтобы в новых координатах (так называемой *σ-системе координат*[6]) пространственная область имела вид цилиндра (данная операция оправдана также с точки зрения численного решения задачи). В результате модифицируются исходные уравнения и, в частности, в присутствующем в них операторе диффузии появляются смешанные производные. Их наличие существенно препятствует как получению результатов о существовании решения системы, так и построению численных методов решения задачи. Поскольку с точки зрения геофизики данные слагаемые не оказывают значимого влияния на соответствие модели реальным природным явлениям, в итоговой модели, описывающей динамику океана в области с неровным дном, смешанные производные отсутствуют[7]. Такая модель реализована в настоящее время на ЭВМ в ИВМ РАН[8]. Кроме того, описанное изменение модели показывает, что обобщение результатов работы

[6] V.B. Zalesny, *Mathematical model of sea dynamics in a σ-coordinate system,* Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling, V. 20, N. 1, pp. 97-113, 2005.

[7] см. примечание 6 на стр. 4

[8] G.I. Marchuk, A.S. Rusakov, V.B.Zalesny, and N.A Diansky, *Splitting Numerical Technique with Application to the High Resolution Simulation of the Indian Ocean Circulation,* Pure appl. Geophys., V. 162, pp. 1407-1429, DOI 10.1007/s00024-005-2677-8, 2005.; а также см. примечание 6 на стр. 4

Г.М. Кобелькова[9] на случай областей более общего вида не является очевидной процедурой, что является мотивацией для исследования модели, описывающей крупномасштабную динамику океана в цилиндре над двумерным многообразием, где данная техника с небольшими изменениями дала положительный результат.

Другим направлением исследований по теме диссертации являлось обоснование корректности разностных схем для уравнений динамики океана. Вопрос сходимости решений разностной задачи к решению дифференциальной является одним из ключевых в обосновании корректности исследуемой разностной схемы. Несмотря на то, что для многих задач математической физики вопрос сходимости аппроксимирующих их разностных схем детально изучен и соответствующая техника исследований разработана, для уравнений крупномасштабной динамики океана эта проблема оставалась открытой на протяжении нескольких десятков лет. При этом численные методы активно применялись при решении практических задач моделирования динамики океана. Следует отметить, что в литературе имеется единственная[10] подобная попытка обоснования корректности разностных схем, но для уравнений динамики атмосферы, которые близки по своей структуре к примитивным уравнениям, при этом накладывались дополнительные условия на решение. Трудность исследования сходимости разностных схем для задачи динамики океана заключалась, прежде всего, в отсутствии соответствующих оценок решения как разностной схемы, так и исходной дифференциальной задачи. Отметим, что данная проблема распространяется также и на многие другие методы дискретизации примитивных уравнений, в частности, на конечно-элементные схемы.

В настоящей работе была исследована конечно-разностная схема, которая аппроксимирует примитивные уравнения со вторым порядком по

[9] см. примечание 3 на стр. 2

[10] В.Л.Зотов, *Об одной разностной схеме для системы уравнений динамики атмосферы,* Вестник Моск.Университета. Серия: Вычислительная математика и кибернетика, с.14-22, 1988.

пространственным переменным. Для решений данного типа схем была доказана сходимость к решению дифференциальной задачи при естественном предположении гладкости решения исходной задачи. Немаловажно отметить, что при доказательстве сходимости использовалась техника, примененная в настоящей работе при изучении систем уравнений крупномасштабной динамики океана на многообразиях и в областях с неровным дном.

Все выше сказанное обуславливает *актуальность* исследований, проведенных в настоящей работе.

Цели работы

1. доказать существование и единственность решения уравнений крупномасштабной динамики океана в сферической геометрии;
2. доказать существование и единственность решения уравнений крупномасштабной динамики океана в областях с переменным дном;
3. исследовать сходимость конечно-разностных схем, аппроксимирующих уравнения крупномасштабной динамики океана.

Научная новизна. В диссертационной работе:

1. Доказаны теоремы существования «в целом» и единственности решений систем уравнений крупномасштабной динамики океана в области, являющейся цилиндром над двумерным многообразием, а также в евклидовой области с неровным дном. Данные теоремы являются нетривиальным обобщением результатов, полученных для этих уравнений в области — цилиндре над плоскостью, поскольку, к примеру, формальное использование данной методики для примитивных уравнений с переменным дном, не позволяет доказать теорему существования и единственности; это требует изменения постановки задачи.

2. Доказана теорема о сходимости решений разностной схемы, аппроксимирующей уравнения крупномасштабной динамики океана, к решению дифференциальной задачи с порядком $O(\tau + h^{3/2})$. Для уравнений крупномасштабной динамики океана эта задача являлась открытой на протяжении нескольких десятков лет, несмотря на то, что численные методы активно применялись при решении практических задач. Трудность рассматриваемой задачи состояла в том, что не была доказана теорема существования и единственности для дифференциальной задачи, а, значит, отсутствовали подходящие априорные оценки.

Научная и практическая значимость работы. Все результаты, полученные в диссертационной работе, имеют теоретический характер и восполняют имевшиеся пробелы как в теории уравнений динамики океана, так и в теории численных методов решения этих уравнений.

Методы исследований. При получении результатов диссертационной работы была использована методика построения энергетических неравенств для уравнений типа Навье–Стокса, развитая в работах С.Л. Соболева, О.А. Ладыженской, Р. Темама, Г.М. Кобелькова. Кроме того, были применены методы дифференциальной геометрии, тензорного анализа, методы анализа разностных схем, а также были проведены численные эксперименты.

Апробация работы. Результаты, изложенные в диссертации, были представлены на следующих научных конференциях:

- на международных конференциях молодых ученых «Ломоносов» 2009, 2010 и 2011 годов;
- на международной конференции «Актуальные проблемы вычислительной математики и математического моделирования» в 2010 году;

- на V-ой международной конференции «Математические идеи П.Л. Чебышева и их приложение к современным проблемам естествознания» в 2011 году.

а также неоднократно докладывались и обсуждались на следующих научно-исследовательских семинарах:

- на научно-исследовательском семинаре кафедры вычислительной математики механико-математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова под руководством д.ф.-м.н. профессора Г.М. Кобелькова (неоднократно в 2008—2011 годах);

- на научно-исследовательском семинаре ИВМ РАН «Вычислительная математика, математическая физика, управление» под руководством д.ф.-м.н. профессора Г.М. Кобелькова, д.ф.-м.н. профессора А.В. Фурсикова (неоднократно в 2009—2011 годах).

Публикации. По теме диссертации опубликовано 3 статьи в журналах из «Перечня ведущих рецензируемых журналов и изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертации на соискание степени доктора и кандидата наук» [1–3].

Структура диссертации. Работа состоит из введения, трёх глав, разбитых на параграфы, заключения, приложения и списка литературы. Список литературы включает 25 наименований. Объём диссертации составляет 144 страницы.

Содержание диссертации

Первая глава диссертации посвящена исследованию системы уравнений крупномасштабной динамики океана в области, представляющей собой «цилиндр» над произвольным двумерным гладким ориентированным римановым многообразием. Рассматривается цилиндр по времени

$Q_T \equiv \Omega \times [0, T]$, где $\Omega \equiv \Omega' \times [-h, 0]$, $h = \text{const}$, Ω' — компактно вкладывающаяся область двумерного гладкого ориентированного риманового многообразия $\mathcal{M}$ с границей, состоящей из конечного числа гладких дуг, пересекающихся под ненулевыми углами. Граница $\partial\Omega$ разбита на две части: $S = \partial\Omega' \times [0, 1]$ — боковую поверхность и $S_1 = \Omega' \times \{0, -h\}$ — основания цилиндра Ω.

Пусть $\mathbf{u} \in \mathrm{T}\mathcal{M}$ — двумерный вектор горизонтальных компонент скорости, w — вертикальная компонента вектора скорости, а p и ρ — давление и плотность соответственно, тогда система уравнений крупномасштабной динамики океана в упрощённой форме (см. работы Е.С. Тити[11], Г.М. Кобелькова[12], Р. Темама[13]) имеет следующий вид:

$$\partial_t \mathbf{u} - \mu \nabla^2 \mathbf{u} - \nu \partial_z^2 \mathbf{u} + \nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{u} + w \partial_z \mathbf{u} + \ell \mathbf{u} + \gamma \nabla p = \mathbf{0}, \tag{1}$$

$$\partial_z p = -\rho \widetilde{g}, \qquad \operatorname{div} \mathbf{u} + \partial_z w = 0, \tag{2}$$

$$\partial_t \rho - \mu_1 \Delta \rho - \nu_1 \partial_z^2 \rho + \nabla_{\mathbf{u}} \rho + w \partial_z \rho = 0, \tag{3}$$

где $\mu, \nu, \mu_1, \nu_1, \gamma, \widetilde{g} > 0$ — вещественные константы, ℓ — линейный ограниченный оператор над касательным расслоением $\mathrm{T}\mathcal{M}$ (тензор типа $(1, 1)$). Система уравнений дополняется следующими граничными[14] и начальными условиями

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0, \quad \nabla_{\mathbf{n}} \mathbf{u} \times \mathbf{n} = 0, \quad \nabla_{\mathbf{n}} \rho = 0 \quad \text{на} \quad S, \tag{4}$$

$$w = 0, \quad \partial_z \mathbf{u} = \mathbf{0}, \quad \partial_z \rho = 0 \quad \text{на} \quad S_1 \tag{5}$$

$$\mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0, \quad \rho(0) = \rho_0, \qquad \int\limits_{-h}^{0} \operatorname{div} \mathbf{u}_0 \, \mathrm{d}z = 0. \tag{6}$$

[11]см. примечание 4 на стр. 2

[12]см. примечание 3 на стр. 2

[13] *Temam R., Miranville A.* Mathematical Modeling in Continuum Mechanics // Cambridge University Press, 2005.

[14]В условиях $\mathbf{n}$ обозначает вектор нормали к границе Ω', а оператор $\mathbf{a} \times \mathbf{b} \equiv \varepsilon_{ij} a^i b^j$, где ε_{ij} — дискриминантный тензор (тензор Леви-Чивита)

Здесь обозначения $\operatorname{div}, \nabla, \Delta, \nabla^2$ соответствуют двумерным дифференциальным операторам на многообразии $\mathcal{M}$; $\nabla_{\mathbf{u}}$ — оператор ковариантного дифференцирования вдоль вектора $\mathbf{u}$. Для удобства используется обозначение для трехмерного градиента $\nabla_3 \equiv (\nabla, \partial_z)$.

В предположении существования достаточно гладкого решения последовательно выводятся ниже приведенные априорные[15] оценки[16], доказательства которых основываются на скалярном умножении уравнений (3) и (1) на ρ^3 и $\mathbf{u}$, соответственно.

$$\max_{0\leqslant t\leqslant T} \|\rho(t)\|_4 \leqslant c, \qquad \int\limits_0^T \|\rho\nabla_3\rho\|^2 \,\mathrm{d}t \leqslant c, \qquad \max_{0\leqslant t\leqslant T} \|\partial_z p(t)\|_4 \leqslant c.$$

$$\max_{0\leqslant t\leqslant T} \|\mathbf{u}(t)\| \leqslant c, \qquad \int\limits_0^T (\|\nabla_3\mathbf{u}\|^2 + \|w\|^2 + \|\partial_z w\|^2) \,\mathrm{d}t \leqslant c.$$

Для доказательства более сильных априорных оценок необходимо получить специальную оценку для функции давления p. Для ее вывода используется представление p в виде $p = p_1 + p_2$, где

$$p_1(M) = \int\limits_{-h}^0 p(M, z) \,\mathrm{d}z, \quad M \in \Omega'.$$

Из скалярного произведения первого уравнения системы (1)—(3) с $\nabla(\Delta)^{-1}p_1$ после некоторых преобразований следует неравенство

$$\|p\|_4 \leqslant c\Big[\big(\|\nabla U\|^{1/2} + \|U\|^{1/2}\big)\big(\|U\|^{1/2} + 1\big) + 1\Big], \qquad \text{где} \quad U = \mathbf{u}^2.$$

Последняя оценка позволяет получить следующие оценки, в частно-

[15]Буква c обозначает в неравенствах положительные константы, которые не зависят от функций, участвующих в этих неравенствах, но зависят от длины интервала времени T, формы области Ω и норм начальных условий. Причем чаще всего разные константы будут обозначаться одной и той же буквой, если это не будет вводить в заблуждение

[16]Здесь и далее норма $\|\cdot\|_q \equiv \|\cdot\|_{L_q(\Omega)}$, а норма $\|\cdot\| \equiv \|\cdot\|_2$

сти оценку $\mathbf{u}$ в норме $\mathbf{L}_4(\Omega)$:

$$\max_{0\leqslant t\leqslant T}\|\mathbf{u}(t)\|_4\leqslant c,\qquad \int\limits_0^T\|\mathbf{u}\nabla_3\mathbf{u}\|^2\,\mathrm{d}t\leqslant c,$$

$$\int\limits_0^T\|\mathbf{u}\partial_z w\|^2\,\mathrm{d}t\leqslant c,\qquad \int\limits_0^T\|p\|_4^4\,\mathrm{d}t\leqslant c.$$

Далее выводятся априорные оценки для $\partial_z\mathbf{u}$ и $\partial_z\rho$:

$$\max_{0\leqslant t\leqslant T}\|\partial_z\mathbf{u}(t)\|_4\leqslant c,\qquad \int\limits_0^T\|\partial_z\mathbf{u}\nabla_3\partial_z\mathbf{u}\|^2\,\mathrm{d}t\leqslant c,$$

$$\max_{0\leqslant t\leqslant T}\|\partial_z\rho(t)\|\leqslant c,\qquad \int\limits_0^T\|\nabla_3\partial_z\rho\|^2\,\mathrm{d}t\leqslant c.$$

Для их доказательства используется свойство цилиндричности области Ω вдоль оси переменного z, которое позволяет продифференцировать по z систему уравнений (1)—(3) и краевые условия (4), получив при этом систему уравнений, имеющую структуру, сходную с первоначальной системой уравнений.

Последними из априорных оценок доказываются оценки для $\partial_t\mathbf{u}$ и $\partial_t\rho$, вывод которых основан на дифференцировании по t системы уравнений (1)—(3) и краевых условий (4)—(5):

$$\max_{0\leqslant t\leqslant T}\|\mathbf{u}_t(t)\|\leqslant c,\qquad \max_{0\leqslant t\leqslant T}\|\rho_t(t)\|\leqslant c,$$

$$\int\limits_0^T\|\nabla_3\mathbf{u}_t\|^2\,\mathrm{d}t\leqslant c,\qquad \int\limits_0^T\|\nabla_3\rho_t\|^2\,\mathrm{d}z\leqslant c.$$

Полученные априорные оценки позволяют доказать существование и единственность решения системы (1)—(6). Сначала для уравнений (1)—(6) вводится понятие обобщенного решения $(\mathbf{u},\rho)$, после чего доказывается следующая теорема, являющаяся результатом первой главы.

Теорема 1. *Пусть* $\mathbf{u}_0 \in \mathbf{W}_2^2(\Omega)$, $\rho_0 \in W_2^2(\Omega)$, $\mathbf{u}_0, \rho_0$ *удовлетворяют граничным условиям (4)—(6) и* $\int_{-h}^{0} \operatorname{div} \mathbf{u}_0 \, \mathrm{d}z = 0$. *Тогда для любых* $\mu, \nu, \mu_1, \nu_1 > 0$ *и произвольного* $T > 0$ *задача (1)—(3), (4)—(6) имеет единственное обобщенное решение* $(\mathbf{u}, \rho)$ *на* Q_T, *причем*

$$\mathbf{u}^2,\ (\partial_z \mathbf{u})^2,\ \mathbf{u}\nabla_3\mathbf{u},\ \partial_z\mathbf{u}\nabla_3(\partial_z\mathbf{u}),\ \mathbf{u}_t,\ \nabla_3\mathbf{u}_t \in \mathbf{L}_2(Q_T)$$

и норма $\|\nabla_3 \mathbf{u}\|$ *непрерывна по* t.

Вторая глава диссертации посвящена исследованию системы уравнений крупномасштабной динамики океана в области с неровным дном. Данная система моделирует океан, который расположен на плоскости и имеет непостоянную глубину. Вначале рассматриваются стандартные примитивные уравнения (1)—(3) над плоскостью[17] в области $\Omega = \{(x, y, z) \mid (x, y) \in \Omega', z \in [0, H(x, y)]\}$, где $H(x, y) \in \mathrm{C}^2(\Omega')$ — глубина, зависящая от координат и удовлетворяющая соотношениям

$$H_1 \geqslant H(x, y) \geqslant H_0 > 0 \quad \forall (x, y) \in \Omega'. \tag{7}$$

В данных уравнениях делается замена переменных $s = z/H(x, y)$, выравнивающих дно области. Поскольку влияние смешанных частных производных и первой производной в преобразованном операторе Лапласа на соответствие модели реальным явлениям природы малозначительно[18], то в рассматриваемой модели они не учитываются. Таким образом, новая изучаемая система уравнений для такой модели рассматривается в цилиндрической области $\Omega = \Omega' \times [0, 1]$ и имеет следующий вид:

$$H\mathbf{u}_t - \nu H\widetilde{\Delta}\mathbf{u} + H\ell\mathbf{u} + H\nabla p + H\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u} + w\partial_s\mathbf{u} - sp_s\nabla' H = \mathbf{0}, \tag{8}$$

$$p_s = -Hg\rho, \qquad \operatorname{div}(H\mathbf{u}) + \partial_s w = 0, \tag{9}$$

$$H\rho_t - \nu_1 H\widetilde{\Delta}\rho + H\mathbf{u}\cdot\nabla\rho + w\partial_s\rho = 0, \tag{10}$$

[17] при $\mathcal{M} = \mathbb{R}^2$

[18] см. примечание 8 на стр. 4

где $\nu, \nu_1 > 0$ — константы. $\ell\mathbf{u} = \omega(u_2, -u_1)$, $\omega = \mathrm{const}$, — кососимметричный линейный оператор, $w = u_3 - sH_x u_1 - sH_y u_2$ — измененная вертикальная составляющая вектора скорости[19], $\widetilde{\Delta} = \Delta + \partial_s\big(A\partial_s\big)$ — измененный оператор Лапласа, в котором $A = H^{-2}\big(1 + H_{x_1}^2 s^2 + H_{x_2}^2 s^2\big)$.

Для замыкания системы уравнений ставятся следующие краевые и начальные условия

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{n} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial n} \times \mathbf{n} = 0 \quad \text{на} \quad S, \tag{11}$$

$$w = 0,\ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial n} = \mathbf{0} \quad \text{на} \quad S_1, \tag{12}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial n} = 0 \quad \text{на} \quad \partial\Omega, \tag{13}$$

$$\mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0,\ \int\limits_0^1 \mathrm{div}(H\mathbf{u}_0)\ \mathrm{d}s = 0, \quad \rho(0) = \rho_0. \tag{14}$$

Далее, по аналогии с первой главой, выводятся априорные оценки решения примитивных уравнений, которые лежат в основе доказательств существования и единственности. Среди данных оценок (аналогичных тем, что получены в первой главе) наиболее важными являются оценки норм $\|p\|_{L_4(\Omega)}$, $\max_t \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{L}_4(\Omega)}$, $\max_t \|\mathbf{u}_s\|_{\mathbf{L}_2(\Omega)}$, $\max_t \|\rho_s\|_{L_2(\Omega)}$, $\max_t \|\mathbf{u}_t\|_{\mathbf{L}_2(\Omega)}$, $\max_t \|\rho_t\|_{L_2(\Omega)}$. Их доказательство занимает значительную часть всей главы. При наличии указанных оценок доказательство существования и единственности проводится относительно стандартными методами. Таким образом, во второй главе доказана следующая теорема

Теорема 2. *Пусть* $\mathbf{u}_0 \in \mathbf{W}_2^2(\Omega)$, $\rho_0 \in W_2^2(\Omega)$, $\mathbf{u}_0, \rho_0$ *удовлетворяют граничным условиям (11)–(13) и* $\int\limits_0^1 \mathrm{div}(H\mathbf{u}_0)\,\mathrm{d}s = 0$. *Тогда для любых* $\nu, \nu_1 > 0$, *любой глубины* $H \in \mathrm{C}^2(\Omega')$, *удовлетворяющей условиям (7), и произвольного* $T > 0$ *задача (8)–(10), (11)–(14) имеет единственное*

[19]здесь u_3 — третья компонента вектора скорости, обозначаемая через w в первой главе

обобщенное решение $(\mathbf{u}, \rho)$ *на* Q_T*, причем*

$$\mathbf{u}^2,\ \mathbf{u}_s^2,\ (\mathbf{u}^2)_x,\ (\mathbf{u}_s^2)_x,\ \mathbf{u}_t,\ \mathbf{u}_{tx} \in \mathbf{L}_2(Q_T)$$

и норма $\|\mathbf{u}_x\|$ *непрерывна по* t*.*

Третья глава диссертации содержит исследование неявной линеаризованной разностной схемы, которая аппроксимирует систему уравнений крупномасштабной динамики океана в единичном кубе со вторым порядком по пространственным переменным на сетках, аналогичных сеткам Лебедева[20], которые используются в практических расчетах. При помощи техники работы Г.М. Кобелькова[21] для данной схемы получены априорные оценки решения, а также доказана корректность задачи. В частности, доказана сходимость решений дискретных задач к решению дифференциальной задачи.

Обоснование скорости сходимости разностной схемы проводится для случая, когда область пространственных переменных Ω является единичным кубом. Для удобства части границы области Ω обозначаются следующим образом: Σ_1 и Σ_2 — это части S, перпендикулярные направлениям x и z, соответственно, а $\Sigma_3 = S_1$.

Путем разбиения области Q_T на $M+1$ временной слой вводится стандартная равномерная сетка по времени с шагом $\tau = T/M$. Сетка по времени обозначается через $\mathbb{T} = \{m\tau | m \in [0, M) \cap \mathbb{Z}\}$, $\bar{\mathbb{T}} = \mathbb{T} \cup \{T\}$. Для построения сетки по пространственным переменным область Ω равномерно разбивается на N^3 кубов со стороной h, где $h = 1/N$. Их вершины будут образовывать узлы

$$\Omega_h = \big\{x = (ih, jh, kh) \;\big|\; 0 \leqslant i, j, k \leqslant N\big\}.$$

Через $\bar{\Omega}_h^k$, $k = 1, 2, 3$, обозначается сеточная область, полученная сдвигом Ω_h в направлениях $l \neq k$ на $h/2$ и добавлением узлов так, чтобы $\bar{\Omega}_h^k$

[20] В.И.Лебедев, *Метод конечных сеток для уравнений типа С.Л.Соболева,* ДАН СССР, т.114, №6, с.1166–1169, 1957.

[21] см. примечание 3 на стр. 2

была симметрична относительно центра Ω [22]. Кроме того, вводится еще одна сеточная область

$$\bar{\mho}_h = \big\{ x = (ih + h/2, jh + h/2, kh + h/2) \; \big| \; -1 \leqslant i, j, k \leqslant N \big\},$$

которая содержит центры кубов сетки Ω_h. Ω_h^k, $k = 1, 2, 3$, и $\mho_h$ обозначают внутренние узлы сеток $\bar{\Omega}_h^k$, $k = 1, 2, 3$ и $\bar{\mho}_h$, соответственно. Граничные узлы сетки Ω_h^k, $k = 1, 2, 3$, обозначаются через $\Sigma_{l,h}^k$ для каждого $l = 1, 2, 3$. Через $\Gamma_{l,h}^k$, обозначается сеточная граница, полученная сдвигом $\Sigma_{l,h}^k$ в направлении центра Ω на $h/2$ для каждой грани. Вся вышеописанная совокупность сеточных областей и границ, построенных в четырехмерном пространстве, обозначается через $Q_M^{h,\tau}$.

Скалярная сеточная функция p определяется в узлах $\bar{\mho}_h$, а сеточная функция u_k, являющаяся k-й компонентой вектор-функции $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$, определяется на Ω_h^k, $k = 1, 2, 3$. При этом, если $\mathbf{u}$ обозначает трехмерное векторное поле, то двумерное векторное поле, образованное первыми двумя компонентами $\mathbf{u}$, обозначается через $u = (u_1, u_2)$.

Далее вводится оператор *усреднения в направлении* i. Пусть ζ — некоторая скалярная сеточная функция, определенная на какой-либо равномерной сетке Ξ_h ($\bar{\Omega}_h$, $\bar{\Omega}_h^k$, $\bar{\mho}_h$,...). Через $[\zeta]_{x_i}$ обозначается оператор усреднения ζ со значением[23] на сетке, смещенной на $h/2$ относительно Ξ_h параллельно оси переменной x_i.

Разностные сеточные операторы градиента, дивергенции и Лапласа в данной главе обозначаются через ∇, div и Δ, соответственно (как соответствующие дифференциальные аналоги), и определяются естественным образом (см., например, работу В.И. Лебедева[24]). Операторы, действующие только в горизонтальной плоскости переменного x', обозначаются[25] через ∇', div' и Δ'. Помимо вышеперечисленных аппроксима-

[22]в $\bar{\Omega}_h^k$ входят центры граней кубов сетки Ω_h, параллельных границе Σ_k, $k = 1, 2, 3$

[23]значение $[\zeta]_{x_i}$ в узле новой сетки равно среднему арифметическому значений ζ в двух ближайших узлах вдоль направления i

[24]см. примечание 20 на стр. 14

[25]некоторые обозначения третьей главы не совпадают с обозначениями предыдущих глав

ций дифференциальных операторов векторного анализа используются разностные аналоги ковариантного дифференцирования. Для этой цели вводятся нелинейные операторы

$$\mathcal{M}(\mathbf{u}, p) = [\mathbf{u} \cdot \nabla p] \quad \text{и} \quad \mathcal{N}(\mathbf{u}, v) = \Big(\Big[[\mathbf{u}]_{x_1} \cdot \nabla v_1 \Big], \Big[[\mathbf{u}]_{x_2} \cdot \nabla v_2 \Big] \Big)$$

С учетом введенных выше обозначений *неявная разностная схема для уравнений динамики океана* принимает вид

$$u_\tau - \nu \Delta \hat{u} + \mathcal{N}(\mathbf{u}, \hat{u}) + \ell \hat{u} + \nabla' \hat{p} = 0 \qquad \text{на} \qquad \Omega_h^1 \times \Omega_h^2 \times \mathbb{T}, \tag{15}$$

$$\nabla_z p + g[r]_z = 0 \qquad \text{на} \qquad \Omega_h^3 \times \bar{\mathbb{T}}, \qquad\qquad \operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \qquad \text{на} \qquad \mho_h \times \bar{\mathbb{T}}, \tag{16}$$

$$r_\tau - \nu_1 \Delta \hat{r} + \mathcal{M}(\mathbf{u}, \hat{r}) = 0 \qquad \text{на} \qquad \mho_h \times \mathbb{T}. \tag{17}$$

Эти уравнения дополняются следующими граничными

$$u_k = 0, \quad \nabla_k r = 0 \quad \text{на} \quad \Sigma_{k,h}^k, \qquad k = 1, 2, 3, \tag{18}$$

$$\nabla_i u_{3-i} = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_{i,h}^{3-i}, \qquad \nabla_3 u_i = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_{3,h}^i, \qquad i = 1, 2 \tag{19}$$

и начальными условиями

$$u(x, 0) = u_0(x) = U_0(x) + \delta U_0(x) \quad \text{на} \quad \bar{\Omega}_h^1 \times \bar{\Omega}_h^2, \quad r(x, 0) = R_0(x) \quad \text{на} \quad \bar{\mho}_h; \tag{20}$$

здесь $\delta U_0(x) = O(h^2)$ выбрана таким образом, чтобы $\sum\limits_{n=0}^{N} \operatorname{div}' u(x', nh, 0) = 0$. При этом использовались обозначения

$$u \equiv u^m \equiv u(x, m\tau), \qquad \hat{u} \equiv u^{m+1}, \qquad u_\tau \equiv (\hat{u} - u)/\tau.$$

Вначале для сеточной задачи доказываются априорные оценки. Трудность в обосновании сходимости разностной схемы, по сравнению с дифференциальным случаем, состоит в том, что равенство $(u_k u_{jx_k}, |u_j|^\gamma u_j) = 0,\ j = 1, 2$, справедливое при любом $\gamma > -1$ в дифференциальном случае, в сеточном случае имеет место только при $\gamma = 0$. Это существенным образом затрудняет получение оценок в сеточных нормах L_q.

Из скалярного произведения уравнения (17) с $2\tau\hat{r}$ после стандартных преобразований следуют оценки[26]

$$\max_{1\leqslant m\leqslant M}\|r^m\|\leqslant\|r_0\|,\qquad \tau\sum_{m=0}^{M}\|r_x^m\|^2\leqslant c\|r_0\|. \tag{21}$$

Из первого неравенства (21) и второго и третьего уравнений системы (15)—(17) выводятся

$$\max_{1\leqslant m\leqslant M}\|\nabla_z p^m\|\leqslant c,\qquad \|u_3\|\leqslant c\|u_{x'}\|.$$

Аналогично из скалярного произведения уравнения (15) с $2\tau\hat{u}$ следует справедливость неравенств

$$\max_{1\leqslant m\leqslant M}\|u^m\|\leqslant c,\qquad \tau\sum_{m=0}^{M}\|u_x^m\|^2\leqslant c. \tag{22}$$

С использованием вышеприведенных оценок доказывается сходимость разностной схемы. Пусть $(\mathbf{U},P,R)$ — сужение решения (1)—(6) на сетку $Q_M^{h,\tau}$, а $(\mathbf{u},p,r)$ — решение разностной задачи (15)—(20). Тогда ошибка $(\mathbf{v},q,\rho)=(\mathbf{U}-\mathbf{u},P-p,R-r)$ будет удовлетворять следующей системе уравнений:

$$v_\tau-\nu\Delta\hat{v}+\mathcal{N}(\mathbf{u},\hat{v})+\mathcal{N}(\mathbf{v},\hat{U})+\ell\hat{v}+\nabla'\hat{q}=\varphi, \tag{23}$$

$$\nabla_z q+g[\rho]_z=\psi,\qquad \operatorname{div}\mathbf{v}=\xi, \tag{24}$$

$$\rho_\tau-\nu_1\Delta\hat{\rho}+\mathcal{M}(\mathbf{u},\hat{\rho})+\mathcal{M}(\mathbf{v},\hat{R})=\eta. \tag{25}$$

$$v_k=0,\quad \nabla_k\rho=O(h^2)\quad\text{на}\quad \Sigma_{k,h}^k,\qquad k=1,2,3, \tag{26}$$

$$\nabla_i v_{3-i}=O(h^2)\quad\text{на}\quad\Gamma_{i,h}^{3-i},\qquad \nabla_3 v_i=O(h^2)\quad\text{на}\quad\Gamma_{3,h}^i,\qquad i=1,2, \tag{27}$$

$$v(x,0)=\delta U_0(x),\quad \rho(x,0)=0, \tag{28}$$

[26] Здесь и далее, в отличие от предыдущих глав, норма $\|\cdot\|$ обозначает сеточный аналог нормы $\|\cdot\|_{L_2(\Omega)}$, а константы c кроме всего прочего не зависят от шагов сетки τ и h.

где $\varphi = O(h^2+\tau)$, $\psi = O(h^2)$, $\xi = O(h^2)$ и $\eta = O(h^2+\tau)$.

Для доказательства сходимости необходимо получить оценку ошибки для функции давления. Для этого q представляется в виде $q = q_1 + q_2$, где $q_1 = q_1(x', t)$ и $\sum\limits_{n=0}^{N} q_2(x', nh, t) = 0, \forall x', \forall t \in \bar{\mathbb{T}}$. После некоторых преобразований скалярное произведение уравнения (23) с $\nabla'(\Delta')^{-1}\hat{q}_1$ позволяет получить оценку

$$\|\hat{q}\|^2 \leqslant c\big((\|\hat{v}_{x'}\| + \|\hat{v}\|)(\|u_{x'}\| + 1) + \|v_{x'}\| + \|v\| + \|\hat{\rho}\| + \tau + h^{3/2}\big).$$

Из скалярного произведения уравнения (23) с $2\tau\hat{v}$, а уравнения (25) с $2\tau\hat{r}$ выводится оценка

$$\|\hat{v}\|^2 + \|\hat{\rho}\|^2 + \tau c_2 \|\hat{v}_x\|^2 \leqslant (1 + c\tau)\Bigg(\|v\|^2 + \|\rho\|^2 + \|v_x\|^2 + h^4\|u_x\|^2 + h^3 + \tau^2\Bigg).$$

Отсюда и из неравенства (22) следует оценка

$$\max_{1 \leqslant m \leqslant M}(\|v^m\|^2 + \|\rho^m\|^2) + c\tau \sum_{m=0}^{M} \|v_x^m\|^2 \leqslant e^{cT}(\tau^2 + h^3).$$

Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 3. *Пусть решение исходной задачи (1)—(6) имеет четвертые ограниченные производные. Тогда решение разностной схемы (15)—(20) сходится к решению (1)—(6) с порядком $O(\tau + h^{3/2})$.*

Порядок скорости сходимости $h^{3/2}$ принципиально обусловлен оценкой погрешности аппроксимации краевых условий (4) и (5). При получении данной оценки возникает необходимость оценить нормы на границе сетки через нормы по всей сетке, что приводит к понижению показателя степени h на $1/2$.

Приложение А содержит подробное описание проведенных автором численных экспериментов, результаты которых полностью согласуются с доказанным утверждением о сходимости. Более того, из данных экспериментов следует, что порядок $3/2$ сходимости по пространственным переменным не может быть улучшен.

Основные результаты, выносимые на защиту

На защиту выносятся следующие результаты, полученные в диссертационной работе:

1. Доказана теорема существования «в целом» и единственности решения для системы уравнений крупномасштабной динамики океана в области, представляющей собой «цилиндр» над произвольным двумерным гладким ориентированным римановым многообразием. Получены априорные оценки для решения данной системы.

2. Доказана теорема существования «в целом» и единственности решения для системы уравнений крупномасштабной динамики океана в области с неровным дном. Получены априорные оценки для решения данной системы.

3. Для разностной схемы, аппроксимирующей уравнения крупномасштабной динамики океана в единичном кубе со вторым порядком по пространственным переменным, доказана сходимость к решению дифференциальной задачи с порядком $O(\tau + h^{3/2})$. Проведены численные эксперименты, результаты которых согласуются с данным теоретическим результатом.

Благодарности. Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю Георгию Михайловичу Кобелькову, за постановки задач, за помощь и поддержку на протяжении всей научно-исследовательской деятельности. Автор также выражает глубокую благодарность академику РАН Валентину Павловичу Дымникову за постановку задачи о сходимости разностных схем для примитивных уравнений и плодотворные обсуждения получаемых результатов. Кроме того, автор выражает благодарность ведущему научному сотруднику Института вычислительной математики РАН Владимиру Борисовичу Залесному за постановку задачи о примитивных уравнениях в области с

неровным дном и на сфере, плодотворные консультации и обсуждения результатов. Автор также выражает благодарность всем сотрудникам кафедры вычислительной математики Механико-математического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова.

Список публикаций по теме диссертации

1. A.V.Drutsa, *Existence 'in large' of a solution to primitive equations in a domain with uneven bottom.* Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling, 2009, vol.24, No.6, pp. 515-542.

2. А.В. Друца, *Существование "в целом"решения системы уравнений крупномасштабной динамики океана на многообразии.* Мат. сборник, 2011, т. 202, вып. 10, стр. 55-86.

3. А.В. Друца, Г.М. Кобельков, *О сходимости разностных схем для уравнений крупномасштабной динамики океана.* ДАН, 2011, т. 440, №6, стр. 727-730.