Московский Государственный Университет
имени М. В. Ломоносова

На правах рукописи

УДК 511.3+519.2

Бояринов Роман Николаевич

ВЕРОЯТНОСТНЫЕ МЕТОДЫ В ТЕОРИИ ЧИСЕЛ И ПРИЛОЖЕНИЯ В ТЕОРИИ АРГУМЕНТА ДЗЕТА-ФУНКЦИИ РИМАНА

01.01.06 – математическая логика, алгебра и теория чисел

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
доктора физико – математических наук

Москва 2012

Работа выполнена на кафедре математического анализа Механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова

Научный консультант: доктор физико-математических наук, профессор Владимир Николаевич Чубариков

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук, профессор Андрей Михайлович Зубков;
доктор физико-математических наук, профессор Сергей Александрович Гриценко;
доктор физико-математических наук, профессор Николай Михайлович Добровольский

Ведущая организация: Владимирский государственный университет

Защита диссертации состоится "23" марта 2012 г. в 16 часов 45 минут на заседании диссертационного совета Д.501.001.84 при Московском государственном университете имени М. В. Ломоносова по адресу:РФ, 119991, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д. 1, Главное здание МГУ, Механико-математический факультет, ауд. 14-08.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Механико-математического факультета МГУ (Главное здание, 14 этаж).

Автореферат разослан "......" .... 2012 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
Д.501.001.84 в МГУ
доктор физико-математических наук,
профессор А. О. Иванов

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Работа посвящена развитию вероятностных методов в теории чисел и исследованию поведения аргумента $S(t)$ дзета-функции $\zeta(s)$ на коротких интервалах, а также решению некоторых задач о свойствах нетривиальных нулей $\zeta(s)$ и закономерностях в их распределении, тесно связанных с $S(t)$.
В своем знаменитом мемуаре 1859 г. Б. Риман[1,2] показал, что задача о распределении простых чисел сводится к изучению свойств $\zeta(s)$ (впоследствии названной в честь Римана дзета-функцией Римана) как функции комплексного переменного $s = \sigma + it$. При $\sigma > 1$ дзета-функция определяется как значение сходящегося ряда

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}.$$

Риманом было доказано два утверждения о свойствах $\zeta(s)$:

а) Функцию $\zeta(s)$ можно аналитически продолжить на всю комплексную плоскость; она является там мероморфной и имеет единственный простой полюс с вычетом 1 в точке $s = 1$.

б) $\zeta(s)$ удовлетворяет функциональному уравнению

$$\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s) = \pi^{-\frac{1-s}{2}}\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)\zeta(1-s),$$

где $\Gamma(s)$ – гамма-функция Эйлера.

Функциональное уравнение позволяет вывести свойства $\zeta(s)$ при $\sigma < 0$ из ее свойств при $\sigma > 1$. Единственными нулями $\zeta(s)$ при $\sigma < 0$ являются точки $s = -2, -4, -6, \ldots$, т.е. полюсы $\Gamma(s/2)$. Они называются *тривиальными нулями.* Кроме того, $\zeta(s)$ не имеет нулей при $\sigma > 1$. Остальная часть плоскости, где $0 \le \sigma \le 1$, называется *критической полосой.*

Риман высказал несколько предположений о распределении нулей $\zeta(s)$ в критической полосе:

[1] *Riemann B.* Ueber die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse//Monatsberichte der Berliner Akademie, November 1859.

[2] *Риман Б.* О числе простых чисел, не превышающих данной величины// Б. Риман, Сочинения, ОГИЗ, М., 1948, 216-224.

а) $\zeta(s)$ имеет бесконечно много нулей в критической полосе. Они расположены симметрично относительно вещественной оси, а также *критической прямой* $\sigma = 1/2$.

б) Число $N(T)$ нулей $\zeta(s)$ в критической полосе с $0 < t \le T$ удовлетворяет асимптотическому равенству

$$N(T) = \frac{T}{2\pi}\ln\left(\frac{T}{2\pi}\right) - \frac{T}{2\pi} + O(\ln T). \tag{1}$$

в) Все нули $\zeta(s)$ в критической полосе лежат на критической прямой (знаменитая, до сих пор недоказанная гипотеза Римана).

В 1905 г. Мангольдт[3] доказал формулу (1), а в 1914 г. Р. Бэклунд[4,5] доказал более точную формулу

$$N(T) = \frac{T}{2\pi}\ln\frac{T}{2\pi} - \frac{T}{2\pi} + \frac{7}{8} + S(T) + \frac{1}{\pi}\delta(T), \tag{2}$$

где $S(T)$ – аргумент дзета-функции Римана, а $\delta(T)$ – гладкая функция, производная которой имеет оценку вида: $|\delta'(T)| \ll T^{-2}$. Равенство (2) называется формулой Римана-Мангольдта.

Дадим необходимые определения и опишем простейшие свойства $S(t)$–аргумента дзета-функции Римана на критической прямой.

Определение 1. Для вещественного t, отличного от ординаты нуля $\zeta(s)$, положим

$$S(t) = \frac{1}{\pi}\arg\zeta\left(\frac{1}{2} + it\right),$$

где $\arg\zeta\left(\frac{1}{2} + it\right)$ получается непрерывным продолжением $\arg\zeta(s)$ вдоль ломаной линии, начинающейся в точке $s = 2$ ($\arg\zeta(2) = 0$), идущей к точке $s = 2 + it$ и затем к точке $s = 1/2 + it$. Если же t — мнимая часть нуля $\zeta(s)$, то

$$S(t) = \lim_{\delta\to+0}\frac{1}{2}(S(t+\delta) + S(t-\delta)).$$

[3] *Bohr H., Landau E.* Beiträge zur Theorie der Riemannschen Zetafunktion// Math. Ann., 74:1 (1913), 3-30.
[4] *Backlund R.-J.* Sur les zeros de la fonction $\zeta(s)$ de Riemann// C. R. Acad. Sci. Paris, 158 (1914), 1979-1981.
[5] *Backlund R.-J.* Über die Nullstellen der Riemannschen Zetafunktion//Dissertation, Helsingfors, 1916, p. 1-31.

Определение 2. Для положительного T, отличного от мнимой части нуля $\zeta(s)$, символом $N(T)$ будем обозначать число нулей дзета-функции в прямоугольнике $0 \le \mathrm{Re}\, s \le 1$, $0 < \mathrm{Im}\, s \le T$. Если T совпадает с мнимой частью нуля $\zeta(s)$, то положим

$$N(T) = \lim_{\delta \to +0} \frac{1}{2}(N(T+\delta) + N(T-\delta)).$$

В работе[6] описаны простейшие свойства $S(t)$:

1. *$S(t)$ — кусочно-гладкая функция с разрывами в точках, совпадающих с ординатами комплексных нулей $\zeta(s)$.*

2. *При переходе через точку разрыва $S(t)$ совершает скачок, равный сумме кратностей нулей $\zeta(s)$, имеющих эту точку своей ординатой.*

3. *На всяком промежутке непрерывности (γ, γ'), где γ, γ' — соседние ординаты нулей $\zeta(s)$, функция $S(t)$ является монотонно убывающей с производными*

$$S'(t) = -\frac{1}{2\pi} \ln \frac{t}{2\pi} + O(t^{-2}) \quad \text{и} \quad S''(t) = -\frac{1}{2\pi t} + O(t^{-3}).$$

Определение 3. При положительном числе t функция $S_1(t)$ определяется равенством

$$S_1(t) = \int_0^t S(u)du\,.$$

В теории дзета-функции Римана можно выделить три основных направления исследования:

1) распределение нулей дзета-функции Римана $\zeta(s)$ в критической полосе и на критической прямой;

[6] *Карацуба А. А., Королев М. А.* Аргумент дзета-функции Римана // Успехи математических наук, т. 60, №3(363), с. 41-96 (2005).

2) рост величины $|\zeta(s)|$ в критической полосе и на критической прямой;

3) поведение аргумента дзета-функции Римана на критической прямой.

Первые два направления тесно связаны с широким кругом проблем теории простых чисел и достаточно хорошо изучены. Третье направление представляет большой научный интерес, но при этом изучено в меньшей степени, чем первые два. Функция $S(t)$ представляет большой практический интерес в связи с численным нахождением нетривиальных нулей $\zeta(s)$. Тем не менее, практическая проверка предположений о величине роста функции $S(t)$ представляет очень трудную численную задачу, поскольку $S(t)$ очень медленно растет и заметные изменения в ее росте существенно выходят за пределы технических возможностей современных ЭВМ.

Одной из задач теории аргумента дзета-функции Римана является проблема определения порядка роста величины $M(T)$ — числа перемен знака $S(t)$ на промежутке $0 < t \leq T$. Первый результат здесь принадлежит Г. Бору и Э. Ландау[3], которые в 1913 г. доказали существование положительной постоянной α такой, что

$$\liminf_{t\to+\infty}\frac{S(t)}{(\ln t)^{\alpha}} = -\infty, \quad \limsup_{t\to+\infty}\frac{S(t)}{(\ln t)^{\alpha}} = +\infty.$$

Отсюда следует, что функция $S(t)$ на интервале $(0, +\infty)$ меняет свой знак бесконечно много раз. В 1946 г. А. Сельберг[7] разработал новый метод, с помощью которого получил следующую нижнюю оценку числа точек перемены знака $S(t)$ на промежутке $(T, T + H]$:

$$M(T+H) - M(T) \geq H(\ln T)^{\frac{1}{3}}e^{-c_1\sqrt{\ln\ln T}}. \tag{3}$$

Длина H рассматриваемого промежутка имела вид $T^{0,5+\varepsilon}$, где $0 < \varepsilon \leq 0,5$ — произвольное фиксированное число.

[7] *Selberg A.* Contributions to the theory of the Riemann zeta-function//Arch. Math. Naturvid., 48:5 (1946), 89–155.

Дальнейшее уточнение этого результата происходило по двум направлениям. Первое связано с нахождением нижних оценок разности $M(T+H)-M(T)$ при $H=T^a$, $0<a<1/2$, а второе — с заменой правой части неравенства Сельберга функцией, растущей быстрее, чем $H(\ln T)^{\frac{1}{3}}e^{-c_1\sqrt{\ln\ln T}}$.

В 1981 г. А. Гош[8] доказал, что при $H=T^{a+\varepsilon}$

$$M(T+H)-M(T)>H(\ln T)\exp\left(-\frac{c_2\ln\ln T}{(\ln\ln\ln T)^{0,5-\delta}}\right), \qquad (4)$$

где $0<\delta<1/2$. При этом величину a можно брать равной нулю, если гипотеза Римана верна, и равной $0,5$ в противном случае.

Наконец, в 1996 г. А. А. Карацуба[9] доказал неравенство А. Сельберга (3) при $H=T^{27/82+\varepsilon}$. Далее, в 2002 г. М. А. Королев[10,11] доказал результат А. Гоша (4) при $H=T^{27/82+\varepsilon}$. Отметим, что вопрос об истинном порядке роста $M(T)$ при $T\to+\infty$ в настоящее время остается открытым.

В 1998 г. Р. Вон и Т. Вули[12] при исследовании распределения значений некоторых тригонометрических сумм получили асимптотические формулы для дробных моментов этих сумм. Изучая распределение нулей дзета-функции Римана, в 2008 г. М. А. Королев[13,14] получил асимптотические формулы для дробных моментов некоторых характеристик этих нулей.

В 2010 г. в работе[15] была доказана теорема о дробных моментах случайных величин, из которой следует лучший результат о числе перемен знака $S(t)$ и другие более сильные результаты о дробных моментах арифметических сумм. В этой работе[15] предлага-

[8] *Ghosh A.* On Riemann's Zeta-function — Sign Changes of S(T)// Recent Progress in Analytic Number Theory, **1,** 1981 Academic Press, New York.

[9] *Карацуба А. А.* О функции S(t)// Изв. РАН. Сер. матем., 60:5 (1996), 27-56.

[10] *Королев М. А.* Об аргументе дзета-функции Римана на критической прямой//Тр. Мат. Ин. В.А.Стеклова. 2002. **239.** 215–238.

[11] *Карацуба А. А., Королев М. А.* Поведение аргумента дзета-функции Римана на критической прямой // Успехи математических наук, т. 61, №3(369), с. 3-92 (2006).

[12] *Vaughan R. C., Wooley T. D.* On the distribution of generating functions// Bull. London Math. Soc., 1998. **30.** 113 – 122.

[13] *Королев М. А.* Гипотеза Сельберга о распределении значений мнимых частей нулей дзета-функции Римана// ДАН, 2008, **421**, №3, 308-311.

[14] *Королев М. А.* Закон Грама и гипотеза Сельберга о распределении нулей дзета-функции Римана//Изв. РАН. Сер. матем., 74:4 (2010), 83-118.

[15] *Бояринов Р. Н.* О дробных моментах случайных величин// ДАН.2011. Т.436. №3. С. 299-301.

ется метод, позволяющий получать асимптотические формулы для дробных моментов случайных величин с лучшими остатками и для более широкого множества значений параметра по сравнению с результатами работ предыдущих авторов. В том же 2010 г. в работах[16,17,18] предложен метод, позволяющий получить оценки скорости сходимости к предельному распределению для неотрицательных случайных величин и использующий только асимптотические формулы для четных моментов.

Данные подходы развивают метод моментов, созданный в 1895 году А. А. Марковым[19,20]. Проблема моментов восходит к работам П. Л. Чебышева[21] и Т. Стильтьеса[22]. Развивая исследования П. Л. Чебышева и А. А. Маркова, А. М. Ляпунов[23] создал новый мощный метод в теории вероятностей-метод характеристических функций. Дальнейшие продвижения в этом направлении были сделаны А. Н. Колмогоровым[24], Ю. В. Прохоровым[25], Г. Гамбургером[26], Р. Неванлинной[27], М. Риссом[28], Е. Хелингером[29], Т. Карлеманом[30], М. Г. Крейном[31], Н. И. Ахиезером[32] и другими иссле-

[16] *Бояринов Р. Н.* О скорости сходимости распределений случайных величин// ДАН.2010. Т.435. №3. С. 295-297.

[17] *Бояринов Р. Н.* О скорости сходимости к предельному распределению// Вестник МГУ. Сер.1, мат. мех., 2011, №2, 20-27.

[18] *Бояринов Р. Н.* Аргумент дзета-функции Римана// Чебышевский сборник, 2010, т. 11, вып. 1, 54-67.

[19] *Марковъ А. А.* О предельныхъ величинахъ интеграловъ//Известія Императорской Академіи Наукъ, 2:3 (1895), 195-203.

[20] *Марков А. А.* Исчисление вероятностей// Москва, Гос. из-во, 1924.

[21] *Chebysev P.* Sur les valeurs limites des integrales//Journal de Mathematiques pures et appliquees,**19**(1874), 157-160.

[22] *Stieltjes T.* Recherches sur les fractions continues//Ann. Fac. Sci. Univ. Toulouse (1894-95), **8**, J1-J122; **9**, A5-A47.

[23] *Liapounoff A.* Sur une proposition de la théorie des probabilités//Известія Императорской Академіи Наукъ, 13:4 (1900), 359-386.

[24] *Kolmogoroff A.* Über die Grenzwertsätze der Wahrscheinlichkeitsrechnung//Изв. АН СССР. VII серия. Отд. матем. и естест. наук, 1933, №3, 363-372.

[25] *Прохоров Ю. В.* Некоторые уточнения теоремы Ляпунова//Изв. АН СССР. Сер. матем., 16:3 (1952), 281-292.

[26] *Hamburger H.* Über eine Erweiterung des Stieltjesschen Momentenproblems I-III//Math. Ann. **81**(1920) 235-319; **82**(1921) 120-164; **82**(1921) 168-187.

[27] *Nevanlinna R.* Asymptotische Entwickelungen beschränkter Funktionen und das Stieltjessche Momentenproblem//Ann. Acad. Sci. Fennicae **A18** (1922) N5, 1-53.

[28] *Riesz M.* Sur le problème des moments. Première Note (Arkiv for Mathematik, Astronomi och Fysik **16**, 1921, article 12.)

[29] *Hellinger E.* Zur Stieltjesschen Kettenbruchtheorie//Math. Ann. **86**, 1922, 18-29.

[30] *Carleman T.* Sur le problème des moments//C. R. Acad. Sei. Paris **174** (1922), 1680-1682.

[31] *Крейн М. Г., Рехтман П. Г.* До проблемы Nevanlinna–Pick//Труды Одесск. гос. ун-та, 1938, т. 2, с. 63-68.

[32] *Ахиезер Н. И., Крейн М. Г.* О некоторых вопросах теории моментов//Харьков: ГНТИУ, 1938.

дователями.

В 1983 г. Дж. Мюллер[33] предложила новый подход к исследованию величины $M(T)$. Пусть $T > 0$ — достаточно большое число. При каком значении A промежуток $(T - A, T + A]$ будет содержать точку перемены знака функции $S(t)$? Опираясь на гипотезу Римана, Дж. Мюллер доказала, что величину A можно положить равной $c \ln\ln\ln T$, где $c > 0$ — абсолютная постоянная.

Используя идею Дж. Мюллер, М. А. Королев[34] в 2005 г. получил безусловный результат для почти всех T, но с меньшим, чем у Мюллер, значением A. В 2009 г. в работе[35] был получен более сильный результат, чем у М.А.Королева.

В работе[36] впервые получены результаты о распределении больших значений аргумента дзета-функции Римана на критической прямой. Распределение малых значений функции $S(t)$ было изучено А.Гошем[37]. Дальнейшие продвижения в теории аргумента дзета-функции Римана сделаны в работах[38, 39]. Обзор последних результатов автора в теории дзета-функции Римана дан в работе[40].

Следующей важной задачей теории дзета-функции Римана является проблема кратных нулей дзета-функции Римана $\zeta(s)$.

Определение 4. Обозначая через $k(\rho)$ кратность нуля ρ, для целого $j \geq 1$ величину $N_j(T)$ положим равной числу различных нулей ρ дзета-функции с условием $k(\rho) = j$, ордината которых положительна и не превосходит T.

Известно, что если точка $T = \gamma$ является ординатой нулей $\rho_1, \ldots, \rho_m$, то при переходе через эту точку функция $N(T)$ совер-

[33] *Mueller J. H.* On the Riemann zeta-function $\zeta(s)$ - gaps between sign changes of $S(t)$ // Mathematika. 1983. **29**, №58, 264–269.

[34] *Королев М. А.* Изменение знака функции $S(t)$ на коротких промежутках//Изв. РАН. Сер. матем., 69:4 (2005), с. 75–88 .

[35] *Бояринов Р. Н.* Изменение знака функции $S(t)$ на коротких интервалах// Вестник МГУ. Сер.1, мат. мех., 2010. №3, 51-53.

[36] *Бояринов Р. Н.* О распределении больших значений аргумента дзета-функции Римана// Вестник МГУ. Сер.1, мат. мех., 2010, №6, 55-58.

[37] *Ghosh A.* On the Riemann zeta-function-mean value theorems and the disribution of |S(T)|// J. Number Theory, 17:1 (1983), 93-102.

[38] *Бояринов Р. Н.* О распределении значений дзета-функции Римана//ДАН.2011. Т.438. №1. С. 14-16.

[39] *Бояринов Р. Н.* Омега-теоремы в теории дзета-функции Римана//ДАН.2011. Т.438. №2. С. 160-161.

[40] *Бояринов Р. Н.* Вероятностные методы в теории аргумента дзета-функции Римана//Теория вероятностей и ее применения, 2011. Т.56. №2, с. 209-223.

шают скачок на величину, равную сумме кратностей этих нулей: $N(\gamma+0)-N(\gamma-0)=k(\rho_1)+\dots+k(\rho_m)$.

В 1973 г. Х. Монтгомери[41] с помощью гипотезы Римана доказал

$$\lim_{T\to+\infty}\frac{N_1(T)}{N(T)}\geq\frac{2}{3}.$$

А. Фуджи[42] в 1975 г. доказал неравенство

$$N_j(T)\leq N(T)\exp(-c\sqrt{j}),$$

в котором c — положительная абсолютная постоянная, j — достаточно большое целое число, $T>T_0(j)>0$.

В 1981 г. А. Фуджи[43] улучшил свой результат, доказав неравенство

$$\sum_{i=j}^{+\infty}N_i(T)\leq N(T)\exp(-cj),$$

в котором c — положительная абсолютная постоянная, j — достаточно большое целое число, $T>T_0(j)>0$.

В 1993 г. А. Чир и Д. Голдстон[44] улучшили результат Х. Монтгомери, доказав неравенство

$$\lim_{T\to+\infty}\frac{N_1(T)}{N(T)}\geq 0,672753.$$

В 1998 г. Дж. Конрей, А. Гош и С. Гонек[45] с помощью обобщенной гипотезы Линделефа доказали неравенство

$$\lim_{T\to+\infty}\frac{N_1(T)}{N(T)}\geq\frac{19}{27}.$$

[41] *Montgomery H. L.* The pair correlation of zeros of the zeta function, Analytic number theory, 24 (1973), 181–193.

[42] *Fujii A.* On the distribution of the zeros of the Riemann zeta function in short intervals//Bull.Amer.Math.Soc., **81**:1 (1975), 139–142.

[43] *Fujii A.* On the zeros of dirichlet L-functions. II//Trans.Amer.Math.Soc., **267**:1 (1981), 33–40.

[44] *Cheer A. Y., Goldston D. A.* Simple zeros of the Riemann zeta-function Proc. Amer. Math. Soc., 118:2 (1993), 365-372.

[45] *Conrey J. B., Ghosh A., Gonek S. M.* Simple zeros of the Riemann zeta-function Proc. London Math. Soc., 76:3 (1998), 165-372.

В 2006 г. М. А. Королев[46] доказал несколько утверждений, уточняющих неравенство Фуджи. В 2011 г. в работе[47] впервые получены качественно новые оценки количества кратных нулей. Из этих оценок следует, что плотность нулей дзета-функции Римана, кратность которых больше некоторой постоянной j_0, не превосходит 10^{-12}. Тем самым доказано, что нули дзета-функции Римана в подавляющем большинстве случаев имеют кратность, не превосходящую определенной величины.

Другой важной задачей в теории дзета-функции Римана является изучение распределения расстояния между ординатами последовательных нулей дзета-функции Римана $\zeta(s)$, лежащими в критической полосе $0 \leq \operatorname{Re} s \leq 1$. Количество $N(T)$ таких нулей с условием $0 < \operatorname{Im} s \leq T$ выражается следующей формулой Римана–Мангольдта

$$N(T) = L(T) + S(T) + \frac{1}{\pi}\delta(T),$$

где $L(T) = \frac{T}{2\pi}\ln\frac{T}{2\pi} - \frac{T}{2\pi} + \frac{7}{8}$, $S(T)$ – аргумент дзета-функции Римана, а $\delta(T)$ – гладкая функция, производная которой имеет оценку вида: $|\delta'(T)| \ll T^{-2}$.

Перенумеруем мнимые части нулей $\zeta(s)$ в критической полосе в порядке возрастания, а в случае совпадения нескольких ординат – в произвольном порядке: $0 < \gamma_1 < \gamma_2 < \cdots \leq \gamma_n \leq \gamma_{n+1} \leq \cdots$.

Существует несколько утверждений, указывающих на то, что случаи, когда расстояние между последовательными ординатами велико, встречается достаточно редко.

Далее, если $\lambda \geq \lambda_0 > 0$, а целое число r удовлетворяет условию $1 \leq r \leq \lambda^{-1} T \ln T$, то для числа ν_r пар γ_n, γ_{n+r}, удовлетворяющих условиям

$$\frac{\gamma_{n+r} - \gamma_n}{r} \geq \frac{2\pi\lambda}{\ln(T/(2\pi))}, \quad T < \gamma_n,\ \gamma_{n+r} \leq 2T,$$

[46] *Королев М. А.* О кратных нулях дзета-функции Римана// Изв. РАН. Сер. матем., 2006, 70:3, 3–22

[47] *Бояринов Р. Н.* О нулях дзета-функции Римана большой кратности// Матем. заметки, 2011. Т. 89. №5, 652-657.

в 1975 г. А. Фуджи[48] получил следующую оценку:

$$\nu_r \le c_1 N(T) \exp(-c(\lambda r)^{2/3}(\ln(\lambda r))^{-1/3}),$$

где c, c_1 – положительные постоянные. Далее, в 2002 г. А. Ивич[49] доказал, что количество ординат γ_n с условиями

$$T < \gamma_n \le T + H, \quad H = T^{1/2+\varepsilon},$$

$$\gamma_{n+1} - \gamma_n \ge \lambda(\ln T)^{-1}$$

не превосходит $c_1(N(T+H) - N(T)) \exp(-c\lambda)$.

Одним из следствий теоремы А. Фуджи об оценке ν_r явилась верхняя оценка суммы

$$V_k(T) = \sum_{0.5T<\gamma_n\le T} (\gamma_{n+1} - \gamma_n)^k$$

вида:

$$V_k(T) \le c(k)\frac{N(T)}{(\ln T)^k},\ c(k) = (c_1 k^{3/2} \ln(k+3))^k,$$

где k — целое число, $1 \le k \le c_2(T\ln T)^{2/3}$, а c_1, c_2 — некоторые абсолютные положительные постоянные.

В 1990 г. А. Фуджи[50] улучшил свой результат при $k = 2$, получив более точную оценку:

$$\sum_{0.5T<\gamma_n\le T} (\gamma_{n+1} - \gamma_n)^2 \le 8.55\frac{2\pi T}{\ln\frac{T}{2\pi}}, \quad T > T_0 > 0.$$

Дальнейшие продвижения сделаны в работах[51, 52]. Из результатов работы[52] следует, что плотность соседних нулей дзета-функции Римана, расстояние между ординатами которых больше

[48] *Fujii A.* On the difference between r consecutive ordinates of the zeros of the Riemann zeta function// Proc. Japan Acad., **51**:10 (1975), 741-743.

[49] *Ivić A.* On small values of the Riemann zeta-function on the critical line and gaps between zeros// Liet. Mat. Rink., **42**:1 (2002), 25–36.

[50] *Fujii A.* On the gaps between consecutive zeros of the Riemann zeta function// Proc. Japan Acad. Ser. A Math.Sci., **66**:4 (1990), 97-100.

[51] *Королев М. А.* О больших расстояниях между соседними нулями дзета-функции Римана // Изв. РАН. Сер. матем. 2008. **72.** №2. 91 – 104.

[52] *Бояринов Р. Н.* О больших расстояниях между последовательными нулями дзета-функции Римана//Дискр. матем., 2010. Т. 22, №3, 75-82.

$\frac{2\pi\lambda_0}{\ln(T/(2\pi))}$, где λ_0 – некоторая постоянная, не превосходит 10^{-12}. Тем самым доказано, что расстояние между ординатами соседних нулей дзета-функции Римана в подавляющем большинстве случаев не превосходит величины $\frac{2\pi\lambda_0}{\ln(T/(2\pi))}$.

Другой важной задачей в теории дзета-функции Римана является проблема роста $S(t)$. Известно, что функция $S(t)$ при $t \to +\infty$ меняет знак бесконечно много раз, но в то же время может принимать сколь угодно большие по абсолютной величине как положительные, так и отрицательные значения.

В 1946 г. А. Сельберг[53] доказал неравенства

$$\sup_{T\le t\le 2T}(\pm S(t)) > A\frac{(\ln T)^{1/3}}{(\ln\ln T)^{7/3}} \qquad (5)$$

в которых A — положительная абсолютная постоянная. Один из возможных путей уточнения этих оценок состоит в замене правых частей неравенств (5) бо́льшими величинами.

Так, в 1977 г. Х. Монтгомери[54], пользуясь гипотезой Римана, установил существование на любом промежутке $(T^{1/6}, T)$ точек t_0 и t_1, для которых

$$(-1)^j S(t_j) \ge \frac{1}{20}\sqrt{\frac{\ln T}{\ln\ln T}}, \quad j = 0,\ 1. \qquad (6)$$

В 1986 г. К. М. Тсанг[55], развивая метод работы[53], усилил результаты А. Сельберга и Х. Монтгомери и получил неравенства

$$\sup_{T\le t\le 2T}(\pm S(t)) > A\left(\frac{\ln T}{\ln\ln T}\right)^{a}, \qquad (7)$$

в которых $A > 0$ — абсолютная постоянная, а величина a берется равной $1/2$, если гипотеза Римана верна, и равной $1/3$ в противном случае.

[53] *Selberg A.* Contributions to the theory of the Riemann zeta-function//Arch. Math. Naturvid., 48:5 (1946), 89–155.

[54] *Montgomery H. L.* Extreme values of the Riemann zeta-function // Comment. Math. Helv. 1977. V. 52. №4. p. 511-518.

[55] *Tsang K. M.* Some Ω-theorems for the Riemann zeta-function// Acta Arith. 1986. V. 46. №4. p. 369-395.

Иной путь уточнения неравенств (5) — (7) состоит в замене промежутка $(T, 2T)$, на котором изучаются верхняя и нижняя грани $S(t)$, на более короткий промежуток $(T, T+H)$, $0 < H < T$.

В 2005 г. М.А.Королев[56] доказал неравенства

$$\sup_{T-H\le t\le T+2H}(\pm S(t)) \ge \frac{1}{90\pi}\sqrt{\frac{\ln H}{\ln\ln H}}$$

при

$$(\ln T)(\ln\ln T)^{-3/2} < H < T.$$

В работе[57] впервые доказано подобное утверждение со существенно меньшим, чем у Королева, значением H. Тем самым получены омега-результаты для аргумента дзета-функции Римана на очень коротких интервалах. Дальнейшие продвижения в этом направлении сделаны в работе[58].

Следующие результаты связаны с так называемым законом Грама. При $t > 0$ определим функцию $\vartheta(t)$ как приращение непрерывной ветви аргумента функции $\pi^{-s/2}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)$ при изменении s вдоль отрезка, соединяющего точки $s = 0,5$ и $s = 0,5 + it$. Выбрав ветвь аргумента, значение которой в точке $s = 0,5$ равно нулю, получаем

$$\vartheta(t) = \operatorname{Im}\ln\Gamma\left(\frac{1}{4}+\frac{it}{2}\right) - \frac{t}{2}\ln\pi = \frac{t}{2}\ln\frac{t}{2\pi} - \frac{t}{2} - \frac{\pi}{8} + \Delta(t),$$

где

$$\Delta(t) = \frac{t}{4}\ln\left(1+\frac{1}{4t^2}\right) + \frac{1}{4}\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{2t}\right) -$$

$$-\frac{t}{2}\int\limits_0^{+\infty}\frac{\rho(u)du}{(u+1/4)^2+t^2/4}, \quad \rho(u) = 1/2 - \{u\}.$$

[56] *Королев М. А.* О больших значениях функции $S(t)$ на коротких промежутках// Изв. РАН. Сер. матем., 69:1 (2005), 115–124.

[57] *Бояринов Р. Н.* О больших значениях функции $S(t)$ на коротких интервалах// Матем. заметки. 2011. Т.89. №4, с. 495-502.

[58] *Бояринов Р. Н.* Омега-теоремы в теории дзета-функции Римана// ДАН.2011.Т. 438. №2. С. 160-161.

Пусть $n \geq 0$ – целое число. Назовем *точкой Грама* g_n единственный корень уравнения

$$\vartheta(g_n) = \pi \cdot (n-1),$$

а *n–ым промежутком Грама* G_n – промежуток $(g_{n-1}, g_n]$. Справедливы асимптотические формулы при $n \to +\infty$

$$g_n = \frac{2\pi n}{\ln n}(1+o(1)), \quad g_{n+1} - g_n = \frac{2\pi}{\ln n}(1+o(1)).$$

В 1903 г. Дж.Грам[59] установил, что первые 15 промежутков G_n содержат только по одному нулю функции $\zeta(0,5+it)$. Иными словами, первые пятнадцать нулей функции $\zeta(0,5+it)$ отделены друг от друга точками Грама. Грам предположил, что обнаруженная закономерность не является общей.

В 1925 г. Дж.Хатчинсон[60] нашел два исключения: промежуток G_{127} не содержал ни одного нуля функции $\zeta(0,5+it)$, а промежуток G_{135} содержал даже два нуля.

Тем не менее, в большинстве рассмотренных случаев каждый промежуток Грама содержал ровно один нуль функции $\zeta(0,5+it)$. Свойство нулей функции $\zeta(0,5+it)$ быть отделенными точками Грама было названо правилом Грама (законом Грама).

В 1934 г. Е. Титчмарш[61] получил оценку снизу для количества промежутков Грама, лежащих на $(0,T)$ и содержащих не менее одного нуля функции $\zeta(0,5+it)$. Тем самым Е. Титчмарш доказал, что бесконечно много промежутков Грама содержат по крайней мере один нуль функции $\zeta(0,5+it)$.

В 1946 г. А. Сельберг[62] доказал существование положительных постоянных K и N_0 таких, что для любого $N > N_0$ среди первых N промежутков Грама найдется не менее KN промежутков G_n, содержащих не менее одного нуля функции $\zeta(0,5+it)$ и не менее

[59] *Gram J.-P.* Note sur les zéros de la fonction $\zeta(s)$ de Riemann// Acta Math. 27:1 (1903), 289–304.

[60] *Hutchinson J. I.* On the roots of the Riemann zeta function//Trans. Amer. Math. Soc. 27:1 (1925), 49–60.

[61] *Titchmarsh E. C.* On van der Corput's method and the zeta-function (IV)// Quart. J. Math. 5 (1934), 98-105.

[62] *Selberg A.* The zeta function and the Riemann hypothesis//Dixième Congrès Math. Skandinaves 1946, vol. 10, Jul. Gjellerups Forlag, Copenhagen 1947, pp. 187–200.

KN промежутков G_n, не содержащих ни одного нуля функции $\zeta(0,5+it)$.

В 1977 г. Я. Мозер[63] получил оценку снизу для количества промежутков Грама, лежащих на $(T, T+H]$ и содержащих хотя бы один нуль $\zeta(0,5+it)$, $H = T^{0,5}\psi(T)\ln T$, где $\psi(T)$ – возрастающая к бесконечности функция, уточнив результат Е. Титчмарша.

В 2008 г. Т. Траджин[64] доказал, что число интервалов Грама, лежащих на промежутке $(T, T+H]$ и содержащих k ординат последовательных нулей дзета-функции Римана не превосходит $c_1 H \ln T \exp(-c_2 k)$. Диссертантом получена оценка сверху для числа интервалов Грама с номерами, изменяющимися в очень узких границах, и содержащих не менее k ординат последовательных нулей дзета-функции Римана. Из данного результата следует, что среди интервалов Грама более 99% таких интервалов, что каждый из них содержит не более 10^{14} нулей $\zeta(s)$.

Следующие результаты посвящены изучению распределения абсолютных значений специальных арифметических сумм. В 1952 году Г. Давенпорт и П. Эрдеш[65] доказали, что значения "коротких" сумм символов Лежандра распределены по нормальному закону. Эти исследования были продолжены Ю. В. Линником[66] и Й́. П. Кубилюсом[67,68] .

Первые результаты о распределении значений сумм арифметических функций с остаточным членом были получены А.Г.Постниковым и М. П. Минеевым. В 1960 г. А. Г. Постников[69] вывел закон распределения значений очень коротких рациональных тригонометрических сумм с показательной функцией в экспонен-

[63] *Мозер Я.* О законе Грама в теории дзета-функции Римана// Acta Arith. 32 (1977), p. 107–113.

[64] *Trudgian T.S.* Gram's Law fails a positive proportion of the time// arXiv:0811.0883

[65] *Davenport H., Erdös P.* The distribution of quadratic and higher residues.// Publ. Math., Debrecen. 1952, **2**, №3 – 4. 252 – 265.

[66] *Кубилюс Й. П., Линник Ю. В.* Арифметическое моделирование броуновского движения.// Изв. вузов. Математика. 1959. 6(13). 88 – 95.

[67] *Кубилюс Й. П.* Вероятностные методы в теории чисел.// Госполитнаучиздат Литов. ССР, Вильнюс. 1962.

[68] *Кубилюс Й. П.* Об асимптотических законах распределения аддитивных арифметических функций.// Литов. матем. сб. **5,** №2. 1965. 261 – 272.

[69] *Постников А. Г.* Об очень короткой показательной рациональной тригонометрической сумме// ДАН СССР, 1960. **133.** №6.

те. М. П. Минеев[70,71,72] и др. доказали новые метрические теоремы о тригонометрических суммах с быстрорастущими функциями. Отметим, что аналогичные исследования, связанные с поведением частичных сумм лакунарных тригонометрических рядов были проведены Р. Форте[73], М. Кацем[74], А. Зигмундом[75], И. А. Ибрагимовым[76], В. Ф. Гапошкиным[77,78] и др.

В конце 90-х годов В. Н. Чубариков[79,80,81] поставил задачи о распределении значений классических тригонометрических сумм таких, как короткие суммы Гаусса, аналогов сумм Клостермана, сумм характеров Дирихле по простым, сумм коротких рациональных тригонометрических сумм с показательной функцией в экспоненте по "сдвигам" интервалов суммирования.

В решении этих задач приняли участие Р. Н. Бояринов[82,83,84], Э. К. Жимбо[85], И. С. Нгонго[86,87] и др.

Отметим, что в основе исследований распределения значений

---

[70] *Минеев М. П.* Диофантово уравнение с показательной функцией и его приложение к изучению эргодической суммы// Изв. АН СССР, серия матем. 1958. **26.** №5. 282 – 298.

[71] *Минеев М. П.* Метрическая теорема о тригонометрических суммах с быстрорастущими функциями// Успехи матем. наук 1959. **14.** в. 3, 169 – 171.

[72] *Минеев М. П.* О проблеме Тарри для быстро растущих функций//Матем. сб., 46(88):4 (1958), 451Ц454.

[73] *Fortet R.* Sur une suite egalement repartie.// Studia math., 1940. **1.** 54 – 69.

[74] *Кас М.* On distribution of values of sums of the type $\sum f(2^k t)$// Ann.Math. 1946. **47.** №1. 33 – 49.

[75] *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды// т. II, М., ИЛ, 1964.

[76] *Ибрагимов И. А.* Центральная предельная теорема для сумм функций независимых случайных величин и сумм вида $\sum f(2^k t)$//Теория вероятностей и ее применения, 1967. **12**, вып. 4, 655 – 665.

[77] *Гапошкин В. Ф.* О скорости приближения к нормальному закону распределений взвешенных сумм лакунарных рядов// Теория вероятностей и ее применения, 1968. **13**, вып. 3, 445 – 461.

[78] *Гапошкин В. Ф.* О центральной предельной теореме для некоторых слабо зависимых последовательностей// Теория вероятностей и ее применения, 1970. **15**, вып. 5, 666 – 684.

[79] *Бояринов Р. Н., Чубариков В. Н.* О распределении значений функций на последовательности Фибоначчи.//ДАН, 2001. **379.** №1. 9 – 11.

[80] *Жимбо Э. К., Чубариков В. Н.* О распределении арифметических функций по простому модулю.// Дискр. математика.2001. №2. 47 – 58.

[81] *Жимбо Э. К., Чубариков В. Н.* Об асимптотических распределениях значений арифметических функций.// Докл. РАН. 2001. **377.** №2.

[82] *Бояринов Р. Н.* О распределении значений сумм, связанных с быстрорастущими последовательностями//Вестник МГУ. Сер.1, мат. мех., 2003. №2, 57-58.

[83] *Бояринов Р. Н.* О распределении значений аналога дзетовой суммы//Вестник МГУ. Сер.1, мат. мех., 2004. №3, 55-56.

[84] *Бояринов Р. Н.* О скорости сходимости к предельному показательному распределению//Чебышевский сборник , т. 6, вып. 1, 2005, с.50-57.

[85] *Жимбо Э. К.* О распределении значений модулей неполных сумм Гаусса.// Вестник Моск. ун-та. Сер. 1, Математика. Механика. 2001. №2. 66 – 67.

[86] *Boyarinov R.N., Chubarikov V.N., Ngongo I.S.* Asymptotic formulas for fractional moments of special sums// Чебышевский сборник , т. 9, вып. 4, 2003, 173-183.

[87] *Бояринов Р.Н., Нгонго И.С.* О распределении значений коротких сумм характеров Дирихле по простым числам// Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения: Тезисы докл. VI Межд. Конф. - Саратов. - 2004 г. 26-27

сумм арифметических функций лежат методы теории вероятностей: метод моментов, метод характеристических функций и теория интегралов и рядов Фурье. Важной задачей при исследовании поведения арифметических функций является проблема оценки скорости сходимости к предельному распределению. Для многих арифметических функций либо не удавалось получить оценку скорости сходимости к предельному распределению классическими методами теории вероятностей, либо эта оценка была неудовлетворительной. Диссертантом[88,89,90] предложено решение данной проблемы для неотрицательных случайных величин.

В 1956 г. А. Г. Постников[91] доказал теорему о распределении значений показательной тригонометрической суммы. Диссертантом получены новые оценки меры больших значений тригонометрических сумм, уточняющие результаты работ[77,78,91].

Рассмотрим сумму вида $S_n(\chi) = \sum\limits_{p\le h(n)} \chi(p)$, где p — простое, $h(n)$ — целое и χ — характер Дирихле по модулю n. Пусть $0 \le \omega \le 1, n$ — натуральное число и u_x — последовательность натуральных чисел такая, что $\frac{u_{x+1}}{u_x} \ge \beta > 1$. Пусть, далее, $S(\omega; n) = \sum\limits_{x\le n} e^{2\pi i\omega u_x}$, где суммирование ведется по натуральным числам x. Рассмотрим нормированные случайные величины $\xi_n(\chi) = \left|\frac{S_n(\chi)}{\sqrt{D}}\right|$, где $D = \sum\limits_{p\le h(n)} 1$, и $\eta_n(\omega) = \left|\frac{S(\omega;n)}{\sqrt{n}}\right|$. Диссертантом получены оценки скорости сходимости к предельному распределению для случайных величин $\xi_n(\chi)$ и $\eta_n(\omega)$.

Цель работы. Развить метод моментов, созданный академиком А. А. Марковым. Получить оценку скорости сходимости к предельному распределению для неотрицательных случайных величин и доказать асимптотические формулы для дробных мо-

[88] *Бояринов Р. Н.* О скорости сходимости распределений случайных величин// ДАН.2010. Т.435. №3. С. 295-297.

[89] *Бояринов Р. Н.* О скорости сходимости к предельному распределению// Вестник МГУ. Сер.1, мат. мех., 2011, №2, 20-27.

[90] *Бояринов Р. Н.* Аргумент дзета-функции Римана// Чебышевский сборник, 2010, т. 11, вып. 1, 54-67.

[91] *Постников А. Г.* Оценка показательной тригонометрической суммы// Изв. РАН. Сер. матем., 1956. **70.** 661–666.

ментов неотрицательных случайных величин, используя только асимптотические формулы для четных моментов. Изучить распределение значений аргумента дзета-функции Римана на коротких интервалах. Получить оценку снизу числа перемен знака аргумента дзета-функции Римана. Доказать новые омега-теоремы в теории аргумента дзета-функции Римана. Получить оценку снизу длины интервала, на котором аргумент дзета-функции Римана меняет свой знак. Получить оценку сверху плотности нулей дзета-функции Римана, лежащих в прямоугольнике критической полосы. Изучить распределение ординат последовательных нулей дзета-функции Римана, лежащих в прямоугольнике критической полосы. Получить оценку сверху числа промежутков Грама, содержащих ординаты последовательных нулей дзета-функции Римана. Изучить распределение больших значений специальных тригонометрических сумм. Доказать предельные теоремы для специальных арифметических сумм.

Методы исследования. В основе доказательства этих утверждений лежат усовершенствованный метод моментов А. А. Маркова, неравенства А. А. Маркова, метод А. Сельберга, плотностные теоремы, метод тригонометрических сумм, теория рядов и интегралов Фурье.

Научная новизна.

Основные результаты диссертации:

1. Получена оценка скорости сходимости к предельному распределению для неотрицательных случайных величин в терминах моментов и доказаны асимптотические формулы для дробных моментов неотрицательных случайных величин.

2. Изучено распределение больших значений аргумента дзета-функции Римана на коротких интервалах. Доказаны асимптотические формулы для распределений значений аргумента дзета-функции Римана на коротких интервалах с лучшими остаточными членами. Получена лучшая оценка снизу числа

перемен знака аргумента дзета-функции Римана на коротких интервалах. Доказаны омега-теоремы для аргумента дзета-функции Римана на очень коротких интервалах. Получена лучшая оценка снизу длины интервала, на котором аргумент дзета-функции Римана меняет свой знак.

3. Получена нетривиальная оценка сверху плотности нулей дзета-функции Римана, лежащих в прямоугольнике критической полосы. Доказаны качественно новые теоремы о распределении ординат последовательных нулей дзета-функции Римана, лежащих в прямоугольнике критической полосы. Получена оценка сверху числа промежутков Грама с номерами, изменяющимися в очень узких границах, и содержащих ординаты последовательных нулей дзета-функции Римана .

4. Изучено распределение больших значений специальных тригонометрических сумм. Доказаны предельные теоремы для специальных арифметических сумм.

Указанные здесь основные результаты являются новыми, полностью обоснованы математическими доказательствами и получены автором самостоятельно. Точные формулировки основных результатов приведены ниже.

Теоретическая и практическая ценность. Диссертация имеет теоретический характер. Ее результаты и методы могут быть использованы при решении различных задач теории чисел.

Апробация работы и публикации. Результаты диссертации докладывались и обсуждались на:

-семинарах «Аналитическая теория чисел» и «Избранные задачи математического анализа и теории чисел» под руководством проф. Г. И. Архипова, проф. В. Н. Чубарикова и проф. М.П. Минеева (2002-2011 г.г., МГУ);

-семинаре «Арифметические функции» под руководством проф. В. Н. Чубарикова, доц. Р. Н. Бояринова и доц. С.Н. Преображенского (2007-2010 г.г., МГУ);

-семинаре «Научно-исследовательский семинар по теории чисел» под руководством чл.-корр. РАН Ю. В. Нестеренко, проф. Н. Г. Мощевитина (октябрь, 2010 г., МГУ);

-семинаре отдела дискретной математики МИАН под руководством чл.-корр. РАН Б.А.Севастьянова, проф. А.М.Зубкова, проф. В.П. Чистякова и проф. В.А. Ватутина (апрель, 2011 г., МИАН);

-VII международной конференции "Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения", посвященной памяти профессора Анатолия Алексеевича Карацубы (май, 2010 г., Тула);

-научно-исследовательском семинаре «Современые проблемы математики и механики» под руководством академика РАН В. А. Садовничего, академика РАН А.Т. Фоменко, академика РАН Г. Г. Черного и проф. В.Н.Чубарикова (ноябрь 2011 г., МГУ);

-международной конференции "Комплексный анализ и его приложения в дифференциальных уравнениях и теории чисел" (октябрь, 2011 г., Белгород)

-всероссийском симпозиуме по прикладной и промышленной математике (Сочи, 2002-2008 г.г.).

Результаты опубликованы в 17 научных работах, среди них 14 статей из перечня ВАК. Список работ приведен в конце автореферата.

Структура диссертации. Диссертация состоит из введения, пяти глав и списка литературы. Список литературы содержит 175 наименований. Общий объем диссертации — 277 страниц.

Обзор содержания диссертации

Первая и вторая главы диссертации посвящены развитию метода моментов, созданного академиком А. А. Марковым. В первой главе получена оценка скорости сходимости к предельному распределению для неотрицательных случайных величин. Первый параграф данной главы посвящен доказательству утверждений, связанных со специальной характеристической функцией интервала. Во втором параграфе получена оценка скорости сходимости к предельному показательному распределению для неотрицательных случайных величин. В третьем параграфе получена оценка скорости сходимости к предельному нормальному распределению, а в четвертом — получена оценка скорости сходимости к предельному распределению в общем случае. Рассмотрим полное вероятностное пространство $(\Omega, \Sigma, \mathbb{P})$. Пусть $\xi_n : \Omega \to \mathbb{R}$ — случайная величина, а $F_n(x) = \mathbb{P}(\omega : |\xi_n(\omega)| < x)$ — функция распределения, где n — некоторый вещественный параметр, а $x > 0$. Обозначим

$$m_a(n) = \int\limits_0^{+\infty} x^a dF_n(x)$$

— a-ый момент случайной величины $|\xi_n|$. Пусть далее, $[x]$ — целая часть x. Доказаны следующие теоремы.

Теорема 1. *Пусть существует абсолютная постоянная $n_0 \geq 1$ такая, что для любого $n > n_0$ существует натуральное число $N = N(n) \geq 3$ такое, что для любых целых чисел $1 \leq \nu \leq N$ справедливо следующее равенство:*

$$m_{2\nu}(n) = \sigma_{2\nu} \left(1 + \frac{\theta}{f(n)}\right), \quad |\theta| \leq 1,$$

где $f(\,\cdot)$ — вещественнозначная функция и $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, а $\sigma_{2\nu}$ — некоторая последовательность положительных чисел. Тогда найдется вещественное число $n_1 > n_0$ такое, что для любого $n > n_1$ и любого $a > 0$ справедливо равенство:

$$F_n(a) = F(a) + R_n,$$

$$\text{где} \quad |R_n| \leq 6 \left(\frac{134(\ln N + 1)}{\sqrt{N}} + \frac{1}{2^N} + \frac{3^N}{f(n)}\right),$$

$$F(a) \equiv \begin{cases} 1 - e^{-a^2}, & \text{если } \sigma_{2\nu} \equiv \nu!\,; \\ \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^a e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt, & \text{если } \sigma_{2\nu} \equiv \frac{(2\nu)!}{2^\nu \nu!}\,. \end{cases}$$

Следствие 1. *Если* $N = [\varkappa \ln f(n)] + 1$, *где* $0 < \varkappa \leq \frac{1}{\ln 6}$ — *некоторая постоянная, то*

$$|R_n| \leq \frac{1620 \ln\ln f(n)}{\sqrt{\varkappa \ln f(n)}}.$$

Замечание 1. *Подобного рода утверждение верно и в более общем случае–когда относительно предельного распределения* $F(x)$ *предполагается, что* $F(x)$ — *непрерывная функция, удовлетворяющая условию Липшица (существует такая абсолютная постоянная* $L > 0$, *что для любых* $x, y \in \mathbb{R}$ *выполняется неравенство:* $|F(x) - F(y)| \leq L|x - y|$).

Теорема 2. *Пусть существует абсолютная постоянная* $n_0 \geq 1$ *такая, что для любого* $n > n_0$ *существует натуральное число* $N = N(n) \geq 3$ *такое, что для любых целых чисел* $1 \leq \nu \leq N$ *справедливо следующее равенство:*

$$m_{2\nu}(n) = \sigma_{2\nu}\left(1 + \frac{\theta}{f(n)}\right), \qquad |\theta| \leq 1,$$

где $f(\cdot)$ — *вещественнозначная функция и* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. *Пусть для* $\sigma_{2\nu}$ *справедливы неравенства:* $0 < \sigma_{2\nu} \leq (C\nu)^{\nu(2-\delta)}$, *где* $C > 1$, $0 < \delta < 2$ — *некоторые постоянные. Тогда найдется вещественное число* $n_1 > n_0$ *такое, что для любого* $n > n_1$ *и любого* $a > 0$ *справедливо равенство:*

$$F_n(a) = F(a) + R_n,$$

$$|R_n| \leq M\left(\frac{224C(\ln N + 1)}{N^{\frac{\delta}{2}}} + \frac{1}{3^N} + \frac{N^{2BN}}{f(n)}\right),$$

где

$$M = \max(2B^2, 6L), \quad B = [4C] + 1.$$

Следствие 2. *Если* $N = \left[\frac{\varkappa \ln f(n)}{\ln\ln f(n)}\right] + 1$, *где* $0 < \varkappa \leq \frac{1}{8B}$ — *некоторая постоянная, то*

$$|R_n| \leq \frac{450MC(\ln\ln f(n))^2}{\varkappa(\ln f(n))^{\frac{\delta}{2}}}.$$

Во второй главе диссертации доказаны асимптотические формулы для дробных моментов неотрицательных случайных величин. В первом параграфе получены асимптотические формулы для случая показательного распределения, а во втором — для случая нормального распределения. В нижеследующей теореме будут рассмотрены два случая: случай предельного нормального распределения и случай предельного показательного распределения. В первом случае параметр $\delta = 0$, а во втором—$\delta = 1$.

Теорема 3. *Пусть существует абсолютная постоянная* $n_0 \geq 1$ *такая, что для любого* $n > n_0$ *и любых целых чисел* $1 \leq \nu \leq [\varrho \ln f(n)] + 1$, *где* $0 < \varrho \leq 0.1$ *— некоторая постоянная, а* $f(\cdot)$ *— вещественнозначная функция такая, что* $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, *справедливо следующее равенство:*

$$m_{2\nu}(n) = \sigma_{2\nu} \left(1 + \frac{\theta}{f(n)} \right), \quad |\theta| \leq 1,$$

где $\sigma_{2\nu}$ *— некоторая последовательность положительных чисел, определяемая ниже. Тогда найдется число* $n_1 > n_0$ *такое, что для любого* $n > n_1$ *и любого* $0 < a \leq 0.5\varrho \ln f(n)$ *справедливо равенство:*

$$m_a(n) = \mu(a) + \theta R_n,$$

где $\mu(a)$ *— некоторая функция параметра* a, *определяемая ниже,* $|\theta| \leq 1$ *и*

$$R_n = \begin{cases} R_1\,, & 0 < a < 30\,; \\ R_2\,, & 30 \leq a \leq \frac{\varrho}{2^{16+2\delta}} \sqrt{\ln f(n)}\,; \\ R_3\,, & \frac{\varrho}{2^{16+2\delta}} \sqrt{\ln f(n)} < a \leq 0.5\varrho \ln f(n)\,; \end{cases}$$

$$R_1 = \frac{2^{11-\delta}}{a}\left(\frac{2^{22}\ln\ln f(n)}{\varrho\ln f(n)}\right)^{\frac{a+1+\delta}{2}},$$

$$R_2 = 2^7\mu(a)\left(\frac{2^{12+2\delta}a^2\ln\left(\frac{\sqrt{\ln f(n)}}{a}\right)}{\varrho\ln f(n)}\right)^{\frac{a+1+\delta}{2}},$$

$$R_3 = 2^{2+\delta}\mu(a)\exp\left(-\frac{\varrho\sqrt{\ln f(n)}}{2^{20+2\delta}}\right),$$

$$\mu(a) \equiv \begin{cases} 2^{0.5a}\Gamma\left(0.5a+0.5\right)\pi^{-0.5}, & \textit{если } \sigma_{2\nu} \equiv \frac{(2\nu)!}{2^\nu \nu!} \quad \textit{и} \quad \delta = 0\,; \\ \Gamma\left(0.5a+1\right), & \textit{если } \sigma_{2\nu} \equiv \nu! \quad \textit{и} \quad \delta = 1\,, \end{cases}$$

где $\Gamma(\cdot)$ *— гамма-функция Эйлера.*

Замечание 2. *Подобного рода утверждение верно и в более общем случае. Относительно предельного распределения* $F(x)$ *будем предполагать, что в некоторой окрестности нуля верно неравенство* $|F(x)| \le Ax^\beta$*, для некоторых* $A > 0$ *и* $\beta > 0$*. Для* $\sigma_{2\nu}$ *будем предполагать выполнения неравенств* $0 < \sigma_{2\nu} \le (C\nu)^{\nu(2-\delta)}$*, где* $C > 1$*,* $0 < \delta < 2$ *— некоторые постоянные.*

Третья глава диссертации посвящена изучению свойств аргумента дзета-функции Римана. Первый параграф данной главы посвящен формулировке вспомогательных утверждений о свойствах $S(t)$. Во втором параграфе вычислены дробные моменты функций $|S(t)|$ и $|S_1(t+h) - S_1(t)|$ на коротких интервалах. В третьем параграфе получена оценка снизу числа перемен знака аргумента дзета-функции Римана на коротких интервалах. В четвертом параграфе изучено распределение значений функций $|S(t)|$ и $|S_1(t+h) - S_1(t)|$. В пятом параграфе доказаны новые омега-теоремы в теории аргумента дзета-функции Римана. В шестом параграфе получена оценка снизу длины интервала, на котором аргумент дзета-функции Римана меняет свой знак. Доказаны следующие теоремы.

Теорема 4. *Для любого $0 < \varepsilon < 10^{-3}$ существует число $T_1 = T_1(\varepsilon) > 0$ такое, что для любого $T \geq T_1$ при $H = T^{\frac{27}{82}+\varepsilon}$ и $x = T^{0,1\varepsilon}$ и любых вещественных $0 < \alpha \leq \frac{\ln\ln\ln T}{16\ln B}$ и $3(\ln\ln T)(\ln x)^{-1} < h \leq (\ln T)^{-0,5}$ выполняются следующие равенства:*

$$\int\limits_{T}^{T+H} |S(t)|^{\alpha} dt = \frac{(\ln\ln T)^{\alpha/2}}{(\pi\sqrt{2})^{\alpha}} H\left(\upsilon(\alpha) + \theta R_T(\alpha)\right),$$

$$\int\limits_{T}^{T+H} \left|S_1(t+h) - S_1(t)\right|^{\alpha} dt = \frac{\left(h\sqrt{\ln\frac{1}{h}}\right)^{\alpha}}{(\pi\sqrt{2})^{\alpha}} H\left(\upsilon(\alpha) + \theta_1 R_T(\alpha)\right),$$

где $B = e^{40}\varepsilon^{-3}$, $\upsilon(\alpha) = \frac{2^{\frac{\alpha}{2}}\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}}$, $|\theta| \leq 1$, $|\theta_1| \leq 1$, *а*

$$R_T(\alpha) = \begin{cases} R_1\,, & 0 < \alpha < 30\,; \\ R_2\,, & 30 \leq \alpha \leq \frac{\sqrt{\ln\ln\ln T}}{2^{18}\ln B}\,; \\ R_3\,, & \frac{\sqrt{\ln\ln\ln T}}{2^{18}\ln B} < \alpha \leq \frac{\ln\ln\ln T}{16\ln B}\,; \end{cases}$$

$$R_1 = \frac{2^{11}}{\alpha}\left(\frac{2^{25}(\ln B)\ln\ln\ln\ln T}{\ln\ln\ln T}\right)^{\frac{\alpha+1}{2}},$$

$$R_2 = 2^7 \cdot \upsilon(\alpha)\left(\frac{2^{15}\alpha^2(\ln B)\ln\left(\frac{\sqrt{\ln\ln\ln T}}{2\alpha}\right)}{\ln\ln\ln T}\right)^{\frac{\alpha+1}{2}},$$

$$R_3 = 4 \cdot \upsilon(\alpha)\exp\left(-\frac{\sqrt{\ln\ln\ln T}}{2^{22}\ln B}\right).$$

Теорема 5. *Для любого $0 < \varepsilon < 10^{-3}$ существует число $T_1 = T_1(\varepsilon) > 0$ такое, что для любого $T \geq T_1$ при $H = T^{\frac{27}{82}+\varepsilon}$ выполняется следующее неравенство*

$$M(T+H)-M(T) > H(\ln T)\exp\left(-\frac{C(\ln\ln T)\ln\ln\ln\ln T}{\ln\ln\ln T}\right),$$

где $C = 2^{41}\ln B,\ B = e^{40}\varepsilon^{-3}$.

Пусть h — произвольное число, удовлетворяющее неравенствам

$$3(\ln\ln T)(\ln x)^{-1} < h \le (\ln T)^{-0{,}5},$$

где $x = T^{0{,}1\varepsilon}$.

Рассмотрим две измеримые функции

$$\xi(t) = \frac{S(t)\pi\sqrt{2}}{\sqrt{\ln\ln T}}, \quad \eta(t) = \frac{(S_1(t+h)-S_1(t))\pi\sqrt{2}}{h\sqrt{\ln\frac{1}{h}}}.$$

Пусть $F_T(y) = \mathbb{P}(t : |\xi(t)| < y) = \frac{1}{H}\mathrm{mes}(t : |\xi(t)| < y)$ и $G_T(y) = \mathbb{P}(t : |\eta(t)| < y) = \frac{1}{H}\mathrm{mes}(t : |\eta(t)| < y)$ — функции распределения $|\xi(t)|$ и $|\eta(t)|$.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 6. *Для любого* $0 < \varepsilon < 10^{-3}$ *существует число* $T_1 = T_1(\varepsilon) > 0$ *такое, что для любого* $T \ge T_1$ *при* $H = T^{\frac{27}{82}+\varepsilon}$ *выполняются следующие равенства:*

$$F_T(y) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^y e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt + R_T,\ |R_T| \le \frac{2^{13}\sqrt{\ln B}\,\ln\ln\ln\ln T}{\sqrt{\ln\ln\ln T}};$$

$$G_T(y) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^y e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt + R'_T,\ |R'_T| \le \frac{2^{13}\sqrt{\ln B}\,\ln\ln\ln\ln T}{\sqrt{\ln\ln\ln T}},$$

где $B = e^{40}\varepsilon^{-3}$.

Теорема 7. *Существует абсолютная положительная постоянная* T_1 *такая, что для любых вещественных чисел* $T > T_1$ *и* $\sqrt{\ln\ln T} \le H \le (\ln T)(\ln\ln T)^{-3/2}$ *при справедливости гипотезы Римана будут верны неравенства*

$$\sup_{T-H\le t\le T+2H}(\pm S(t)) \ge \frac{1}{900}\frac{\sqrt{\ln H}}{\ln\ln H}\,.$$

Обозначим через $E(\lambda, T, H)$ множество принадлежащих промежутку $(T, T+H\,]$ значений t, для которых $|S(t)| \ge \lambda$.

Справедливы следующие утверждения.

Теорема 8. *Пусть* $0 < \varepsilon < 0,001$, $T > T_0(\varepsilon) > 0$, $H = T^{27/82+\varepsilon}$. *Тогда для любого* $\lambda \ge \ln\ln T$ *имеет место оценка*

$$\mathrm{mes}(E(\lambda, T, H)) \le e^2 H \exp(-\varkappa\lambda),\ \textit{где}\quad \varkappa = \pi\varepsilon^{1,5}e^{-19,5}.$$

Теорема 9. *При любом* $T > T_0 > 0$ *и* $\lambda \ge \ln\ln T$ *справедлива оценка*

$$\mathrm{mes}(E(\lambda, T, T)) \le e^{2,1}T\exp(-\varkappa_1\lambda), \textit{где}\quad \varkappa_1 = 27\pi 10^{-6}e^{-19,5}.$$

Теорема 10. *Пусть* $T > T_0 > 0$, *и пусть* E_j, $j = 0, 1$, *— множество значений* t, $T < t \le 2T$, *для которых*

$$(-1)^j S(t) > \frac{1}{300}\sqrt{\frac{\ln T}{\ln\ln T\ln\ln\ln T}}.$$

Тогда безусловно верна оценка сверху

$$\mathrm{mes}(E_0) + \mathrm{mes}(E_1) \le e^{2,1}T\exp\left(-\varkappa_2\sqrt{\frac{\ln T}{\ln\ln T\ln\ln\ln T}}\right),$$

где $\varkappa_2 = 9\pi 10^{-8}e^{-19,5}$, *а при справедливости гипотезы Римана верны оценки снизу*

$$\mathrm{mes}(E_j) \ge 0,4\cdot T\exp\left(-\frac{\ln T}{\ln\ln T}\right)(\ln T)^{-0,5}(\ln\ln T)^{-1}, \quad j = 0, 1.$$

Теорема 11. *Для любого* $0 < \varepsilon < 0,001$ *существует вещественное положительное число* $T_0(\varepsilon)$ *такое, что для любых* $T \ge T_0(\varepsilon)$, $H = T^{27/82+\varepsilon}$ *и* $A = 4,39\ln\ln\ln\ln T$ *интервал* $(t - A, t + A)$

содержит точку перемены знака функции $S(t)$ *при любом* t, $T \le t \le T+H$, *за исключением значений из множества* E *с мерой*

$$\operatorname{mes}(E) = O\left(H(\ln\ln T)^{-1}(\ln\ln\ln T)^{-0,5}\right),$$

постоянная под знаком O *абсолютная.*

Четвертая глава диссертации посвящена изучению распределения нулей дзета-функции Римана, лежащих в критической полосе. В первом параграфе получена оценка сверху плотности нулей дзета-функции Римана, лежащих в прямоугольнике критической полосы и имеющих большую кратность. Во втором параграфе изучено распределение расстояний между ординатами последовательных нулей дзета-функции Римана, лежащих в прямоугольнике критической полосы. В третьем параграфе доказаны оценки сверху и снизу для специальных сумм с ординатами этих нулей. В четвертом параграфе получена оценка сверху числа промежутков Грама, содержащих ординаты последовательных нулей дзета-функции Римана. Доказаны следующие теоремы.

Теорема 12. *Пусть* $0 < \varepsilon < 0.001$, $T > T_0(\varepsilon) > 0$, $H = T^{27/82+\varepsilon}$. *Тогда для любого целого* $j \ge j_0$ *справедливо неравенство*

$$\sum_{k=j}^{+\infty}(N_k(T+H) - N_k(T)) \le \frac{2\varkappa e^{3.1}}{(1-e^{-3})^2}(N(T+H) - N(T))\exp(-\varkappa j),$$

где $\varkappa = \frac{2\varepsilon\sqrt{\varepsilon}}{3e\sqrt{B}}$, $B = e^{37}\pi^{-2}$, $j_0 = \left(3 + 0.1\varkappa + 2\,(1.5\varepsilon e)^{2/3}\right)/\varkappa$.

Следствие 3. *Пусть* $0 < \varepsilon < 0.001$, $T > T_0(\varepsilon) > 0$, $H = T^{27/82+\varepsilon}$. *Тогда для любого целого* $j \ge j_0$ *справедливо неравенство*

$$N_j(T+H) - N_j(T) \le \frac{2\varkappa e^{3.1}}{(1-e^{-3})^2}(N(T+H) - N(T))\exp(-\varkappa j),$$

где $\varkappa = \frac{2\varepsilon\sqrt{\varepsilon}}{3e\sqrt{B}}$, $B = e^{37}\pi^{-2}$, $j_0 = \left(3 + 0.1\varkappa + 2\,(1.5\varepsilon e)^{2/3}\right)/\varkappa$.

Замечание 3. *Неравенства из теоремы* 12 *и следствия* 3 *при* $H = X^{\varepsilon}$ *справедливы для всех* T *из промежутка* $(X, 2X)$, $X \geq X_0(\varepsilon)$, *за исключением значений из некоторого множества, мера которого не превосходит* $X^{1-0.04\varepsilon}$.

Замечание 4. *При* $H = T^{27/82+\varepsilon}$ *для любого целого* $j \geq j_0$ *справедливо неравенство*

$$\overline{\lim_{T\to+\infty}} \frac{\sum\limits_{k=j}^{+\infty}(N_k(T+H) - N_k(T))}{N(T+H) - N(T)} \leq \frac{2\varkappa e^3}{(1-e^{-3})^2}\exp(-\varkappa j),$$

где $\varkappa = \frac{2\varepsilon\sqrt{\varepsilon}}{3e\sqrt{B}}$, $B = e^{37}\pi^{-2}$, $j_0 = \left(3 + 0.1\varkappa + 2\,(1.5\varepsilon e)^{2/3}\right)/\varkappa$.

Теорема 13. *При любом целом* $j \geq \frac{3.1}{\alpha}$ *и* $T > T_0 > 0$ *справедлива оценка*

$$\sum_{k=j}^{+\infty} N_k(T) \leq \beta N(T)\exp(-\alpha j),$$

где

$$\alpha = \frac{\pi\sqrt{5}}{3}10^{-5}e^{-19.5}, \quad \beta = \frac{2\alpha e^{3.2}}{(1-e^{-3})^2}\,.$$

Перенумеруем мнимые части нулей $\zeta(s)$ в критической полосе в порядке возрастания, а в случае совпадения нескольких ординат – в произвольном порядке: $0 < \gamma_1 < \gamma_2 < \cdots \leq \gamma_n \leq \gamma_{n+1} \leq \cdots$.

Теорема 14. *Пусть* ε *— сколь угодно малое фиксированное число,* $0 < \varepsilon < 0.001$, $T > T_0(\varepsilon) > 0$, $H = T^{27/82+\varepsilon}$. *Тогда для любого* $\lambda \geq 4\varkappa^{-1}$ *для количества* $\nu(\lambda; T, H)$ *ординат* γ_n *нулей* $\zeta(s)$, *удовлетворяющих условиям*

$$\gamma_{n+1} - \gamma_n \geq \frac{2\pi\lambda}{\ln(T/(2\pi))}, \quad T < \gamma_n,\, \gamma_{n+1} \leq T + H$$

имеет место оценка

$$\nu(\lambda; T, H) < \frac{e^3}{\lambda}(N(T+H) - N(T))\exp(-\varkappa\lambda),$$

где $\varkappa = \frac{\pi}{3}e^{-19.5}\varepsilon^{1.5}$.

Теорема 15. *При любом* $\lambda \geq 4/\varkappa_1$ *и* $T > T_0 > 0$ *для количества* $\nu(\lambda;T)$ *ординат* γ_n *нулей* $\zeta(s)$, *удовлетворяющих условиям*

$$\gamma_{n+1} - \gamma_n \geq \frac{2\pi\lambda}{\ln(T/(2\pi))}, \quad 0.5T < \gamma_n \leq T$$

имеет место оценка

$$\nu(\lambda;T) < \frac{e^3}{\lambda} N(T) \exp(-\varkappa_1 \lambda), \quad \text{где} \quad \varkappa_1 = \frac{9\pi}{e^{19.5} \cdot 10^{6}}.$$

Пусть

$$V_k(T) = \sum_{0.5T < \gamma_n \leq T} (\gamma_{n+1} - \gamma_n)^k.$$

Тогда справедливы следующие теоремы.

Теорема 16. *Пусть* $T \geq T_0 > 0$, k – *произвольное положительное число, а* $V_k(T)$ – *сумма, определенная выше. Тогда имеет место оценка:*

$$V_k(T) \leq \begin{cases} 4.1 \left(\frac{2\pi}{\varkappa_1 \ln(T/(2\pi))} \right)^k N(T), & 0 < k \leq 1; \\ \\ \left(4^k + 2.5 e^4 \varkappa_1 \Gamma(k)\right) \left(\frac{2\pi}{\varkappa_1 \ln(T/(2\pi))} \right)^k N(T), & k > 1; \end{cases}$$

где $\varkappa_1 = \frac{9\pi}{e^{19.5} \cdot 10^{6}}$, $\Gamma(\cdot)$ – *гамма функция.*

Теорема 17. *Пусть* $T \geq T_0 > 0$, k – *произвольное положительное число, а* $V_k(T)$ – *сумма, определенная выше. Тогда имеет место оценка:*

$$V_k(T) \geq \begin{cases} \frac{1}{34.24} \left(\frac{34.24\pi}{\ln(T/(2\pi))} \right)^k N(T), & 0 < k < 1; \\ \\ 4.1 \left(\frac{\pi}{4.1 \ln(T/(2\pi))} \right)^k N(T), & k \geq 1. \end{cases}$$

Обозначим через $\nu_k(N)$ — количество промежутков Грама G_n с номерами $n \leq N$, содержащих k ординат последовательных (одинаковые ординаты различных нулей получают различные номера) нулей дзета-функции Римана из критической полосы.

Теорема 18. *Пусть* $0 < \varepsilon < 0.001$, $N > N_0(\varepsilon) > 0$, $M = [N^{27/82+\varepsilon}]$. *Тогда для любого целого* $k \geq 4/\varkappa$ *справедливо неравенство*

$$\sum_{j=k}^{+\infty}(\nu_j(N+M)-\nu_j(N)) \leq \frac{e^{2,1}M}{15}\exp(-\varkappa k),$$

где $\varkappa = \frac{2\varepsilon^{1,5}}{3e^{18}}$.

Пятая глава диссертации посвящена доказательству предельных теорем для специальных арифметических сумм и изучению распределения больших абсолютных значений тригонометрических сумм. Доказаны следующие теоремы о распределении значений величин $\xi_n(\chi)$ и $\eta_n(\omega)$, определенных во введении.

Теорема 19. *Пусть* $\xi_n(\chi)$ *— величина, определенная выше. Если* $h(n) \leq 0,04(\ln n)^2$ *и* $\lim\limits_{n\to+\infty} h(n) = +\infty$, *то найдется натуральное число* n_1 *такое, что для любого* $n > n_1$ *и любого* $\lambda > 0$ *справедливо равенство:*

$$\frac{V_n(\lambda)}{\varphi(n)} = 1 - e^{-\lambda^2} + R_n,$$

$$|R_n| \leq \frac{3100\ln\ln h(n)}{\sqrt{\ln h(n)}},$$

где $\varphi(n)$ *— функция Эйлера.*

Рассмотрим функцию распределения величины $\eta_n(\omega) = \left|\frac{S(\omega;n)}{\sqrt{n}}\right|$:

$$F_n(x) = \operatorname*{meas}_{0\leq\omega\leq1}\left(\omega : \left|\frac{S(\omega;n)}{\sqrt{n}}\right| < x\right).$$

Теорема 20. *Пусть* $0 \leq \omega \leq 1, n$ *— натуральное число и* u_x *— последовательность натуральных чисел такая, что* $\frac{u_{x+1}}{u_x} \geq \beta > 1$. *Пусть, далее,* $S(\omega;n) = \sum\limits_{x\leq n} e^{2\pi i\omega u_x}$, *где суммирование ведется по натуральным числам* x. *Тогда найдется натуральное число* n_1 *такое, что для любого* $n > n_1$ *и любого* $x > 0$ *для функции распределения* $F_n(x)$ *величины* $\eta_n(\omega) = \left|\frac{S(\omega;n)}{\sqrt{n}}\right|$

справедливо равенство:

$$F_n(x) = 1 - e^{-x^2} + R_n,$$

$$|R_n| \leq \frac{4600\sqrt{\ln c_0}\ln\ln n}{\sqrt{\ln n}},$$

где $c_0 = \frac{2\beta}{\beta-1}$.

Пусть

$$m_a(n) = \frac{1}{\varphi(n)}\sum_{\chi}\xi_n^a(\chi).$$

Тогда справедлива следующая теорема.

Теорема 21. *Пусть* $\xi_n(\chi)$ *— величина, определенная выше. Если* $h(n) \leq 0,04(\ln n)^2$ *и* $\lim\limits_{n\to+\infty} h(n) = +\infty$, *то найдется натуральное число* n_1 *такое, что для любого* $n > n_1$ *и любого* $0 < a \leq \frac{1}{2^7}\ln h(n)$ *справедливо равенство:*

$$m_a(n) = \Gamma\left(\frac{a}{2}+1\right) + \theta R_n,$$

где $\Gamma(\cdot)$ *— гамма-функция Эйлера,* $|\theta| \leq 1$ *и*

$$R_n = \begin{cases} R_1\,, & 0 < a < 30\,; \\ \\ R_2\,, & 30 \leq a \leq \frac{1}{2^{23}}\sqrt{\ln h(n)}\,; \\ \\ R_3\,, & \frac{1}{2^{23}}\sqrt{\ln h(n)} < a \leq \frac{1}{2^7}\ln h(n)\,; \end{cases}$$

$$R_1 = \frac{2^{10}}{a}\left(\frac{2^{28}\ln\ln h(n)}{\ln h(n)}\right)^{\frac{a+2}{2}},$$

$$R_2 = 2^7\cdot\Gamma\left(\frac{a}{2}+1\right)\left(\frac{2^{20}a^2\ln\left(\frac{\sqrt{\ln h(n)}}{2a}\right)}{\ln h(n)}\right)^{\frac{a+2}{2}},$$

$$R_3 = 2^3\cdot\Gamma\left(\frac{a}{2}+1\right)\exp\left(-\frac{\sqrt{\ln h(n)}}{2^{27}}\right).$$

Обозначим $m_a(n) = \int\limits_0^{+\infty} x^a\,dF_n(x)$ — a-ый момент случайной величины $\eta_n(\omega)$.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 22. *Пусть* $0 \le \omega \le 1, n$ *— натуральное число и* u_x *— последовательность натуральных чисел такая, что* $\frac{u_{x+1}}{u_x} \ge \beta > 1$. *Пусть, далее,* $S(\omega; n) = \sum\limits_{x\le n} e^{2\pi i\omega u_x}$, *где суммирование ведется по натуральным числам* x. *Тогда найдется натуральное число* n_1 *такое, что для любого* $n > n_1$ *и любого* $0 < a \le \frac{\ln n}{2^7\ln c_0}$, *где* $c_0 = \frac{2\beta}{\beta-1}$, *справедливо равенство:*

$$m_a(n) = \Gamma\left(\frac{a}{2}+1\right) + \theta R_n,$$

где $\Gamma(\cdot)$ *— гамма-функция Эйлера,* $|\theta| \le 1$ *и*

$$R_n = \begin{cases} R_1\,, & 0 < a < 30\,;\\[2ex] R_2\,, & 30 \le a \le \frac{1}{2^{23}\ln c_0}\sqrt{\ln n}\,;\\[2ex] R_3\,, & \frac{1}{2^{23}\ln c_0}\sqrt{\ln n} < a \le \frac{\ln n}{2^7\ln c_0}\,;\end{cases}$$

$$R_1 = \frac{2^{10}}{a}\left(\frac{2^{28}(\ln c_0)\ln\ln n}{\ln n}\right)^{\frac{a+2}{2}},$$

$$R_2 = 2^7\cdot\Gamma\left(\frac{a}{2}+1\right)\left(\frac{2^{20}(\ln c_0)a^2\ln\left(\frac{\sqrt{\ln n}}{2a}\right)}{\ln n}\right)^{\frac{a+2}{2}},$$

$$R_3 = 2^3\cdot\Gamma\left(\frac{a}{2}+1\right)\exp\left(-\frac{\sqrt{\ln n}}{2^{27}\ln c_0}\right).$$

Теорема 23. *Пусть даны лакунарные последовательности натуральных чисел $F_j(x)$, $1\le j\le k$, т.е. такие, что для любого $x\ge 1$ выполняются неравенства*

$$\frac{F_j(x+1)}{F_j(x)}\ge\beta_j>1,$$

где x,j,k—натуральные числа. Рассмотрим тригонометрическую сумму

$$S_k(\overline{\alpha}) = S_k(\alpha_1,\ldots,\alpha_k) = \sum_{x=1}^{P} e^{2\pi i(\alpha_1F_1(x)+\cdots+\alpha_kF_k(x))}.$$

Для любого $\lambda>0$ k–мерный куб $[0,1]^k$ разбивается на два непересекающихся подмножества $\mathfrak{M}_1(\lambda)$ и $\mathfrak{M}_2(\lambda)$. Множество $\mathfrak{M}_1(\lambda)$ определяется как множество тех $\overline{\alpha}\in[0,1]^k$, для которых $|S_k(\overline{\alpha})|\le\lambda\sqrt{P}$, а $\mathfrak{M}_2(\lambda)=[0,1]^k-\mathfrak{M}_1(\lambda)$. Тогда для меры второго множества $\mathfrak{M}_2(\lambda)$ справедлива оценка сверху

$$\operatorname{mes}\mathfrak{M}_2(\lambda) < \exp(1-\varkappa\lambda^2),$$

где $\varkappa=\frac{\beta-1}{e\beta}$, $\beta=\max\limits_{1\le j\le k}\beta_j$.

В заключение автор выражает глубокую благодарность научному консультанту профессору В.Н.Чубарикову, академику РАН

Ю.В.Прохорову и руководителям семинара по аналитической теории чисел профессору Г.И. Архипову и профессору М.П.Минееву за полезные обсуждения и внимание к работе.

Работы автора по теме диссертации из перечня ВАК

[1] *Бояринов Р. Н.* О распределении значений сумм, связанных с быстрорастущими последовательностями//Вестник МГУ. Сер.1, мат. мех., 2003. №2, с. 57-58.

[2] *Бояринов Р.Н., Нгонго И.С., Чубариков В.Н.* О моделировании случайных величин на последовательности конечных абелевых групп//Вестник МГУ. Сер.1, мат. мех., 2004. №2, с. 69-71 (диссертанту принадлежит постановка задачи в теореме 1).

[3] *Бояринов Р. Н.* О распределении значений аналога дзетовой суммы//Вестник МГУ. Сер.1, мат. мех., 2004. №3, с. 55-56.

[4] *Бояринов Р. Н.* Изменение знака функции $S(t)$ на коротких интервалах//Вестник МГУ. Сер.1, мат. мех., 2010, №3, с. 51-53.

[5] *Бояринов Р. Н.* О больших расстояниях между последовательными нулями дзета-функции Римана//Дискр. матем., 2010, 22, №3, с. 75-82.

[6] *Бояринов Р. Н.* О скорости сходимости распределений случайных величин//Доклады РАН. 2010. Т.435. №3. с. 295-297.

[7] *Бояринов Р. Н.* О распределении больших значений аргумента дзета-функции Римана//Вестник МГУ. Сер.1, мат. мех., 2010, №6, с. 55-58.

[8] *Бояринов Р. Н.* О дробных моментах случайных величин// Доклады РАН. 2011. Т.436. №3. с. 299-301.

[9] *Бояринов Р. Н.* О скорости сходимости к предельному распределению//Вестник МГУ. Сер.1, мат. мех., 2011, №2, с. 20-27.

[10] *Бояринов Р. Н.* О больших значениях функции $S(t)$ на коротких интервалах//Матем. заметки. 2011. Т.89 , вып. 4, с. 495-502.

[11] *Бояринов Р. Н.* О нулях дзета-функции Римана большой кратности//Матем. заметки. 2011. Т.89 , вып. 5, с. 652-657.

[12] *Бояринов Р. Н.* О распределении значений дзета-функции Римана//Доклады РАН. 2011. Т.438. №1. с. 14-16.

[13] *Бояринов Р. Н.* Омега-теоремы в теории дзета-функции Римана//Доклады РАН. 2011. Т.438. №2. с. 160-161.
[14] *Бояринов Р. Н.* Вероятностные методы в теории аргумента дзета-функции Римана//Теория вероятностей и ее применения, 2011. Т.56. №2. с. 209-223.

Другие работы автора по теме диссертации

[15] *Boyarinov R.N., Chubarikov V.N., Ngongo I.S.* Asymptotic formulas for fractional moments of special sums// Чебышевский сборник , т. 9, вып. 4, 2003, с. 173-183 (диссертанту принадлежит метод доказательства).
[16] *Бояринов Р. Н.* О скорости сходимости к предельному показательному распределению//Чебышевский сборник , т. 6, вып. 1, 2005, с. 50-57.
[17] *Бояринов Р. Н.* Аргумент дзета-функции Римана//Чебышевский сборник, 2010, т. 11, вып. 1, с. 54-67.