МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ М. В. ЛОМОНОСОВА
МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

На правах рукописи

УДК 515.12

Павлов Олег Иванович

О свойствах типа нормальности и счётной компактности в топологических пространствах и группах

01.01.04 - геометрия и топология

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва - 2012

Работа выполнена на кафедре общей топологии и геометрии механико- математического факультета Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук, профессор Архангельский Александр Владимирович
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, профессор Семёнов Павел Владимирович, кандидат физико-математических наук Лейбо Илья Михайлович
Ведущая организация:	Московский государственный технологический университет «СТАНКИН»

Защита диссертации состоится 17 февраля 2012 г. в 16 часов 15 минут на заседании диссертационного совета Д.501.001.84 в Московском Государственном Университете имени М. В. Ломоносова по адресу: 119992, ГСП-2, Москва, Ленинские Горы, МГУ им. М. В. Ломоносова, механико-математический факультет, аудитория 14-08.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке механико-математического факультета Московского Государственного Университета им. М. В. Ломоносова (Главное здание, 14 этаж)

Автореферат разослан 16 января 2012 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета Д.501.001.84
доктор физико-математических наук,
профессор А.О. Иванов

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Известно, что многие свойства типа компактности и свойства Линделёфа влекут компактность в присутствии псевдокомпактности. Например, паралинделёфовое псевдокомпактное пространство компактно[1] (Теорема 9.7). Скотт[2] и Ватсон[3] независимо показали, что каждое метакомпактное псевдокомпактное пространство является компактом. В.В. Успенский[4] доказал, что всякое псевдокомпактное пространство с σ-точечно конечной базой метризуемо, следовательно, является компактом. С другой стороны, металинделёфово псевдокомпактное не компактное пространство было построено Яном Три[5]. Более сильные (и также весьма сложные технически) примеры принадлежат Ватсону[6] и Д.Б. Шахматову[7]. Ватсон сконструировал псевдокомпактное пространство с точечно-счётной базой (последнее условие автоматически влечёт металинделёфовость), не являющееся компактом. Шахматов усилил этот результат, показав, что любое тихоновское пространство, обладающее точечно-счётной базой из открыто-замкнутых множеств может быть вложено в качестве замкнутого подмножества в псевдокомпактное пространство с точечно-счётной базой.

Для каждого кардинала τ, такого, что $\tau^\omega = \tau$, Е.А. Резниченко[8] построил G_δ-

[1]Burke D., Covering properties // Handbook of set-theoretic topology / ed. K. Kunen и J. Vaughan. Amsterdam: North-Holland Publishing, 1984. pp. 347–422.

[2]Scott B., Pseudocompact, metacompact spaces are compact // Topology Proceedings. 1979. v. 4 № 2. pp. 577–587.

[3]Watson S., Pseudocompact metacompact spaces are compact // Proc. Amer. Math. Soc. 1981. v. 81. № 1. pp. 151–152.

[4]Успенский В.В., Pseudocompact spaces with a point-finite base are metrizable // Commenationes Math. Univ. Carolinae. 1984. v. 25. № 2. pp. 261–264.

[5]Tree I., Constructing regular 2-starcompact spaces that are not strongly 2-star-Lindelöf // Topology and its Applications. 1992. v. 47. № 2. pp. 129–132.

[6]Watson S., A pseudocompact meta-Lindelöf space which is not compact // Topology and its Applications. 1985. v. 20. № 3. pp. 237–243.

[7]Шахматов Д.Б., Псевдокомпактные пространства с точечно-счетной базой // Докл. Акад. наук СССР. 1984. Вып. 279. № 4. С. 825–829.

[8]Резниченко Е.А., Псевдокомпактное пространство в котором только множества полной мощ-

плотное в тихоновском кубе I^τ (следовательно, псевдокомпактное и связное) подпространство X_τ, в котором любое подмножество мощности меньшей τ дискретно и замкнуто.

В §1 главы 1 показано, что пример Резниченко металинделёфов. Более, того, имеет место аналог теоремы Шахматова о вложении (наследственно) металинделефова пространства в псевдокомпактное наследственно металинделефово пространство в качестве замкнутого подмножества. В §2 главы 1 этот результат переносится на случай нульмерных пространств.

Многие свойства типа компактности можно определить в терминах звёзд покрытий. Например, хаусдорфово пространство X счётно-компактно если и только если для каждого открытого покрытия $\mathcal{U}$ существует такое конечное подмножество $F \subset X$, что $St(F,\mathcal{U}) = X$[9]. М. В. Матвеев[10] ввёл понятие *абсолютно счётно-компактного* пространства: пространство X называется абсолютно счётно-компактным, если для любого открытого покрытия $\mathcal{U}$ пространства X и любого всюду плотного множества $F \subset X$ существует конечное подмножество $G \subset F$ такое, что $St(G,\mathcal{U}) = X$. Было доказано[10], что в классе всех хаусдорфовых пространств абсолютная счётная компактность заключена строго между компактностью и счётной компактностью. В начале 1990-х годов А.В. Архангельский[10] сформулировал вопрос (повторен в [11], [12] и [13]), который заметное время оставался открытым:

Вопрос. Существует ли нормальное счётно-компактное не абсолютно счётно-компактное пространство?

ности не дискретны и замкнуты // Вестник МГУ, Сер. I: Матем. Мех. 1989. Вып. 44. № 6. С. 70–71.

[9]Fleischman W. M. A new extension of countable compactness // Fund. Math. 1970, v. 67, pp. 1-9.

[10]Michael V. Matveev Absolutely countably compact spaces // Topology Appl. 1994, v. 58, pp. 81-92.

[11]Winfried Just, Michael V. Matveev, and Paul J. Szeptycki Some results on property (a), препринт.

[12]Mary Ellen Rudin, Ian S. Stares and Jerry E. Vaughan From countable compactness to absolute countable compactness // Proc. Amer. Math. Soc, 1997, v. 125, pp. 927-934.

[13]Jerry E. Vaughan On the product of a compact space with an absolutely countably compact space // Proceedings of the Papers on General Topology and Applications, New York Academy of Sciences, 1996, v. 788, pp. 203-208.

Главный результат второй главы – положительное решение этого вопроса в предположении аксиом ZFC. В некоторую противоположность, показано, что каждое *наследственно нормальное* счётно-компактное пространство *является* абсолютно счётно-компактным (этот результат был ранее доказан Паком[14] в предположении PFA). Кроме того, построена серия новых примеров (наследственно) нормальных пространств, не обладающих свойством (a).

Третья глава диссертации посвящена исследованию вопроса о нормальности свободной топологической группы $F(X)$. Следующее важное свойство свободных топологических групп было установлено А.В. Архангельским[15] (так же см.[16]): для каждого натурального числа n, $F(X)$ содержит замкнутую копию X^n. В частности, необходимым условием нормальности свободной группы $F(X)$ является нормальность всех конечных степеней пространства X. Естественным является вопрос: является ли данное необходимое условие достаточным? О.Г. Окунев заметил, что данный вопрос решается отрицательно, если существует счётно компактное пространство X такое, что все конечные степени X нормальны, а квадрат X^2 не псевдокомпактен. В главе 3 такой пример построен в предположении континуум-гипотезы.

Для каждого $n \in \omega$, $F_n(X)$ обозначает множество всех несократимых слов длины, не превосходящей $\leq n$. Известно[17], что каждое множество $F_n(X)$ замкнуто в $F(X)$. Усилив результат Граева[17], Ткаченко[18] доказал, что для псевдокомпактного пространства X свободная группа $F(X)$ является индуктивным пределом множеств $\{F_n(X) : n \in \omega\}$ тогда и только тогда, когда степени X^n счётно-компактны и строго коллективно нормальны для каждого натурального n и поставил вопрос о существенности условия счётной компактности конечных степеней. В силу указан-

[14]Absolutely countably compact topological groups, препринт.

[15]Архангельский А. В., Об отображениях, связанных с топологическими группами // ДАН СССР, 1968, v. 181, № 6, pp. 1303-1306.

[16]B. Thomas, Free topological groups // General Topology and Appl., 1974, № 4, pp. 51-72.

[17]Граев М. И., Свободные топологические группы // Изв. АН СССР. Сер. матем., 1948, v. 12, pp. 279-324.

[18]Michael G. Tkachenko, Free topological groups and inductive limits // Topology Appl., 1994, v. 60, pp. 1-12.

ного выше результата[18], пример, построенный в главе 3, даёт отрицательный ответ и на этот вопрос Ткаченко.

В. В. Ткачук определил[19] некоторую топологическую игру $RAP_A(\mathbf{R}^n)$ на подмножестве A евклидова пространства $\mathbf{R}^n$ и доказал ряд условий, которые гарантируют наличие выигрышной стратегии у Первого или Второго игрока в этой игре. В главе 4 мы усиливаем данные результаты В.В. Ткачука и доказываем критерий существования выигрышной стратегии у Первого и Второго в игре $RAP_X(\mathbf{R}^n)$, $n \in \mathbf{N}$, а также приводим примеры множеств $A_n \subset \mathbf{R}^n$, $n \in \mathbf{N}$, на которых игра $RAP_{A_n}(\mathbf{R}^n)$ не детерминирована. Тем самым даны ответы на несколько вопросов В.В. Ткачука.

Цель работы. Работа посвящена изучению свойств типа счётной компактности и их взаимосвязи с нормальностью в хаусдорфовых топологических пространствах и свободных топологических группах.

Научная новизна. Результаты работы являются новыми и заключаются в следующем:

- Показано, что пространство, построенное Резниченко, металинделёфово. Предложена конструкция для вложения произвольного (наследственно) металинделёфова пространства в псевдокомпактное (наследственно) металинделёфово пространство. (Если исходное пространство нульмерно, таким же можно сделать и объемлющее пространство.)

- Построен пример нормального счётно-компактного не абсолютно счётно-компактного пространства. Средствами ZFC доказано, что каждое наследственно нормальное счётно-компактно пространство является абсолютно счётно-компактным. Разработан метод построения примеров (наследственно) нормальных пространств, не обладающих свойством (a).

- В предположении CH построен пример счётно-компактного пространства,

[19]Ткачук В.В., Топологические приложения теории игр. М., 1992.

счётная степень которого строго коллективно нормальна, а квадрат не псевдокомпактен. Как следствие, нормальность X^n для каждого $n \in \mathbf{N}$, не влечёт нормальности $F(X)$, а также $F(X)$ не обязательно является индуктивным пределом множеств $F_n(X)$ для счётно-компактного пространства X, все конечные степени которого строго коллективно нормальны.

- Доказано, что Первый игрок имеет выигрышную стратегию в игре $RAP_A(\mathbf{R})$ тогда и только тогда, когда множество A не вполне несовершенно, а Второй игрок имеет выигрышную стратегию в игре $RAP_A(\mathbf{R}^n)$ тогда и только тогда, когда множество A содержится в счётном объединении гиперплоскостей пространства $\mathbf{R}^n$.

Методы исследования. В работе применяются методы общей теории топологических пространств, теории кардинальных инвариантов, топологической алгебры и дескриптивной теории множеств.

Теоретическая и практическая ценность работы. Диссертация имеет теоретический характер. Результаты диссертации могут найти применение в теоретико-множественной топологии, топологической алгебре, Ср-теории и топологической теории игр.

Апробация работы. Результаты диссертации неоднократно докладывались на кафедральном семинаре под руководством В.В. Федорчука, а так же на Весенней конференции 1998 г. по топологии и динамическим системам (12-14 марта 1998г., округ Фэрфакс, штат Виргиния, США), Специальной сессии Американского математического общества #936 (9-10 октября 1998г., г. Винстон-Салем, штат Северная Каролина, США) и Весенней конференции 2005 г. по топологии и динамическим системам (17-19 марта 2005 г., г. Маунт Берри, штат Джорджия, США).

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в 4 работах, список которых приведен в конце автореферата

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, 4 глав основной части и списка литературы. Текст диссертации содержит 54 страницы, библиография включает 35 наименований.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во **введении** приведён обзор основных результатов, связанных с темой диссертации, формулируются цели работы, дается краткое изложение основных результатов полученных в диссертации.

В **первой главе** рассматриваются металинделёфовость и наследственная металинделёфовость в классе псевдокомпактных пространств. Напомним, что пространство называется металинделёфовым, если в любое его открытое покрытие можно вписать точечно *счётное* открытое подпокрытие. Частным случаем металинделёфовости (и более сильным свойством, чем просто металинделёфовость) является наличие у пространства σ-точечно конечной базы.

Основными свойствами примера Е.А. Резниченко[8] X^τ являются:

(i) X^τ G_δ-плотно в I^τ (следовательно, X_τ псевдокомпактно и связно),

и

(ii) любое подмножество X^τ мощности меньшей τ дискретно и замкнуто в X_τ (следовательно, X_τ в очень сильной степени не счётно-компактно).

Мы показываем в первой главе, что пример Резниченко является наследственно металинделёфовым. Кроме того, верен аналог теоремы Шахматова о вложении:

Теорема 7. Пусть $\tau^\omega = \tau$. Если $X_\tau \subset I^\tau$ есть пространство Резниченко веса τ, а Y является тихоновским (наследственно) металинделефовым пространством веса $\mu \leq \tau$, то Y может быть вложен в $I^\tau \setminus X_\tau$ так, что $X_\tau \cup Y$ является тихоновским (наследственно) металинделефовым псевдокомпактным подпространством I^τ и содержит Y в качестве замкнутого подмножества. Если, кроме того, $2^\mu \leq \tau$, то Y C^*-вложено в $X_\tau \cup Y$.

Следствие 8. Каждое тихоновское (наследственно) металинделефово пространство может быть вложено в качестве замкнутого подмножества в псевдокомпактное связное тихоновское (наследственно) металинделефово пространство.

Следствие 9. Пример Резниченко наследственно металинделефов.

Пример Резниченко X_τ построен таким образом, что множество $\{0,1\}^\tau \cap X_\tau$ G_δ-плотно в $\{0,1\}^\tau$, где $\{0,1\}^\tau$ есть канторовский куб – подпространство тихоновского куба I^τ. Обозначим $\{0,1\}^\tau \cap X_\tau$ через C_τ. Пространство C_τ обладает такими же свойствами (i) и (ii) как и X_τ, за исключением того, C_τ G_δ-плотно в $\{0,1\}^\tau$, а не в I^τ, и C_τ нульмерно, а не связно. В §2 доказательство Теоремы 7 переносится на нульмерный случай:

Теорема 10. Пусть $\tau^\omega = \tau$. Если $C_\tau \subset I^\tau$ есть нульмерное пространство Резниченко веса τ, а Y является нульмерным (наследственно) металинделёфовым пространством веса $\mu \leq \tau$, то Y может быть вложен в $\{0,1\}^\tau \setminus C_\tau$ так, что $C_\tau \cup Y$ является нульмерным (наследственно) металинделёфовым псевдокомпактным подпространством $\{0,1\}^\tau$ и содержит Y в качестве замкнутого подмножества. Если, кроме того, $2^\mu \leq \tau$, то Y C^*-вложено в $C_\tau \cup Y$.

Следствие 11. Каждое нульмерное (наследственно) металинделёфово пространство может быть вложено в качестве замкнутого подмножества в псевдокомпактное нульмерное (наследственно) металинделёфово пространство.

Следствие 12. Пусть $\tau^\omega = \tau$. Существует G_δ-плотное (следовательно, псевдокомпактное) подмножество C_τ канторовского куба $\{0,1\}^\tau$ в котором любое подмножество мощности меньшей τ дискретно и замкнуто в X_τ.

Отметим, что в настоящее время неизвестно, можно ли вложить каждое нульмерное пространство с точечно-счётной базой в псевдокомпактное нульмерное пространство с точечно-счётной базой. Как заметил Резниченко[8], его пример в каждой точке имеет псевдохарактер $\aleph_1$, поэтому не является пространством с первой аксиомой счётности и тем более с точечно-счётной базой.

Во **второй главе** рассматривается абсолютная счётная компактность в классе (наследственно) нормальных пространств. В §1 построен пример нормального счётно-компактного не абсолютно счётно-компактного пространства. Этим дано положительное решение основного вопроса теории абсолютно счётно-компактных пространств — Вопроса 2. Ценность данного примера заключается в том, что во многих случаях нормальность сама по себе (без присутствия счётной компактности) влечёт слабую форму асс, называемую свойством (a). Пространство X обладает свойством (a), если для каждого открытого покрытия $\mathcal{U}$ и каждого плотного подмножества $F \subset X$ существует дискретное (и замкнутое) подмножество $G \subset X$ такое, что $G \subset F$ и $St(G,\mathcal{U}) = X$. Единственный известный пример нормального (но не счётно-компактного) пространства, не обладающего свойством (a) был построен[11] в предположении существования Q-множества.

В §2 доказано, что каждое *наследственно нормальное* счётно-компактное пространство является абсолютно счётно-компактным:

Теорема 12. Наследственно нормальное счётно-компактное пространство абсолютно счётно-компактно.

Так же, приведена схема построения (наследственно) нормальных пространств, обладающих свойством (a):

Теорема 13. Пусть τ будет бесконечным кардиналом, $l(X) \geq \tau$, и предположим, что X содержит всюду плотное подмножество G, которое удовлетворяет одному из следующих условий:

$|G| < \tau$.

$|G| = \tau$ и для каждого $H \subset G$, $|H| = \tau \Rightarrow H$ имеет точку полного накопления в X.

Тогда существует объемлющее пространство $M \supset X$, не обладающее свойством (a) и такое, что все точки дополнения $M \setminus X$ изолированы. Если, кроме того, X (наследственно) нормально, то таковым является и M.

В **третьей главе** изучается нормальность свободных топологических групп. Согласно теореме 3 из [15], из нормальности свободной топологической группы $F(X)$ следует нормальность всех конечных степеней пространства X. Естественным является вопрос об обратимости данного утверждения:

Вопрос 4. Следует ли нормальность свободной группы $F(X)$ из нормальности всех конечных степеней топологического пространства X?

О.Г. Окунев предложил подход к решению Вопроса 4. Он заметил, что для счётно компактного пространства X, нормальность свободной группы $F(X)$ влечёт нормальность и счётную компактность всех конечных степеней X. Таким образом, Вопрос 4 решается отрицательно, если положительно решается следующий вопрос или его версия (которые были поставлены в связи с Вопросом 4 О.Г. Окуневым и О.В. Сипачёвой):

Вопрос 5. Существует ли счётно компактное пространство X такое, что все конечные степени пространства X нормальны, а квадрат X^2 не псевдокомпактен?

(Заметим, что так как пространство X^2 нормально, оно не псевдокомпактно если и только если не счётно-компактно.)

Версия Вопроса 5. Что если также X^ω нормально? Коллективно нормально? Строго коллективно нормально?[20]

Именно такой пример построен в главе 3 в предположении континуум-гипотезы.

[20]Пространство X является строго коллективно нормальным, если универсальная равномерность X содержит все окрестности диагонали. Конечно, каждое строго коллективно нормальное пространство коллективно нормально.

Теорема Граева[17] утверждает, что для компакта X свободная группа $F(X)$ является индуктивным пределом множеств $\{F_n(X) : n \in \omega\}$ (то есть, подмножество G группы $F(X)$ замкнуто в $F(X)$ если и только если множество $G \cap F_n(X)$ замкнуто для каждого $n \in \omega$). Ткаченко[18] ослабил требование на компактность X до нормальности и счётной компактности всех конечных степеней X и поставил следующий вопрос:

Вопрос 6. Является ли свободная группа $F(X)$ счётно-компактного пространства X индуктивным пределом множеств $\{F_n(X) : n \in \omega\}$, если все конечные степени X^n строго коллективно нормальны?

Согласно [18], Вопрос 6 эквивалентен следующему вопросу: *предположим, что все конечные степени счётно-компактного пространства X строго коллективно нормальны. Будут ли обязательно все конечные степени X^n псевдокомпактными?* Таким образом, результат главы 3 даёт отрицательный ответ и на Вопрос 6.

В **четвёртой главе** исследуется топологическая игра $RAP_A(\mathbf{R}^n)$. Игра ведётся двумя игроками, которых мы будем называть Первый и Второй, на подмножестве A вещественной прямой $\mathbf{R}$. На k-ом шаге, Первый выбирает любую точку $x_k \in \mathbf{R}$, а Второй — луч, H_k с вершиной в x_k. Игра завершается после ω шагов, при этом в партии $\{x_k,\ H_k : k \in \mathbf{N}\}$ побеждает Второй, если $A \subset \cup\{H_k : k \in \mathbf{N}\}$. В противном случае побеждает Первый. Аналогично определяется игра $RAP_A(\mathbf{R}^n)$ на подмножестве A евклидова пространства $\mathbf{R}^n$ (в этом случае Второй выбирает замкнутое полупространство, граница которой содержит точку x_k). Следующие утверждения были доказаны В.В. Ткачуком[19]:

Утверждение 0.4. Если множество A счётно, то в игре $RAP_A(\mathbf{R})$ Второй имеет выигрышную стратегию.

Утверждение 0.5. Если множество A содержит хотя бы один несчётный компакт, то в игре $RAP_A(\mathbf{R})$ Первый имеет выигрышную стратегию.

Утверждение 0.6. Существует множество $A \subset \mathbf{R}$ такое, что игра $RAP_A(\mathbf{R})$ не детерминирована.

Утверждение 0.7. Пусть $A \subset \mathbf{R}$ и $|A| < 2^\omega$, тогда Первый не имеет выигрышной стратегии в игре $RAP_A(\mathbf{R})$.

Нами получены критерии существования выигрышной стратегии у каждого из игроков в игре $RAP_A(\mathbf{R}^n)$ и критерий недетерминированности игры $RAP_A(\mathbf{R})$. Эти результаты усиливают приведённые выше Утверждения 0.4-0.7 отвечают на несколько вопросов В.В. Ткачука.

Теорема 14. Первый имеет выигрышную стратегию в игре $RAP_A(\mathbf{R})$ тогда и только тогда, когда множество A не вполне несовершенно[21].

Теорема 15. Второй имеет выигрышную стратегию в игре $RAP_A(\mathbf{R}^n)$ тогда и только тогда, когда множество A содержится в счётном объединении $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} P_k$ гиперплоскостей пространства $\mathbf{R}^n$.

Теорема 16. Игра $RAP_A(\mathbf{R})$ не детерминирована тогда и только тогда, когда $|A| > \omega$ и множество A вполне несовершенно.

Теорема 17. Первый имеет выигрышную стратегию в игре $RAP_{A\times B}(\mathbf{R}^{n+m})$, где $A \subset \mathbf{R}^n$, $B \subset \mathbf{R}^m$, тогда и только тогда он имеет выигрышные стратегии в играх $RAP_A(\mathbf{R}^n)$ и $RAP_B(\mathbf{R}^m)$.

Отметим, что никакое *топологическое* свойство множества A не может гарантировать критерия существования выигрышной стратегии у Первого игрока в игре $RAP_A(\mathbf{R}^n)$ при $n \geq 2$ так как Первый имеет выигрышную стратегию в игре $RAP_{C^n}(\mathbf{R}^n)$ (где $C \subset \mathbf{R}$ обозначает Канторово совершенное множество) и не имеет выигрышной стратегии в игре $RAP_{C\times\{0\}\times\ldots\times\{0\}}(\mathbf{R}^n)$, в то время как множества C^n и $C \times \{0\} \times \ldots \times \{0\}$ гомеоморфны.

[21] То есть, содержит копию Канторова совершенного множества.

Благодарности. Автор выражает глубокую и искреннюю благодарность научному руководителю профессору Александру Владимировичу Архангельскому за постановку задач, многочисленные плодотворные обсуждения и помощь в работе. Автор благодарен профессору В.В. Федорчуку, профессору В.И. Пономарёву и участникам семинара по топологической алгебре О.В. Сипачёвой, Р.З. Бузяковой, К.Л. Козлову, М.М. Матвееву, О.Г. Окуневу, Е.А. Резниченко, М.Г. Ткаченко и В.В Ткачуку за поддержку и ценные советы.

ПУБЛИКАЦИИ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

[1] Павлов О.И. Об одной топологической игре // Вестник МГУ, Сер. I: Матем. Мех. 1993. № 5. С. 11–14.

[2] Pavlov O. A normal countably compact not absolutely countably compact space // Proc. Amer. Math. Soc. 2001. v. 129. № 9. pp. 2271–2275.

[3] Павлов О.И. Пример Резниченко металинделёфов // Вестник Самарского Государственного Университета - Естественнонаучная серия, 2009. № 2. С. 61–66.

[4] Нормальность в свободных топологических группах, депонировано в ВИНИТИ 30.05.2011, № 257-В2011.