

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
имени М. В. Ломоносова

---

На правах рукописи  
УДК 533.6.013.42

**Веденеев Василий Владимирович**

**ПАНЕЛЬНЫЙ ФЛАТТЕР  
ПРИ НИЗКИХ СВЕРХЗВУКОВЫХ СКОРОСТЯХ**

Специальность 01.02.05 – Механика жидкости, газа и плазмы

**А В Т О Р Е Ф Е Р А Т**  
диссертации на соискание учёной степени  
доктора физико-математических наук



Москва 2012 г.

Работа выполнена на кафедре гидромеханики механико-математического факультета и в лаборатории аэромеханики и волновой динамики НИИ механики Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова.

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук,  
профессор И. А. Кийко  
доктор физико-математических наук,  
профессор А. Т. Ильичёв  
доктор технических наук  
В. И. Смыслов

Ведущая организация: Московский физико-технический институт  
(государственный университет)

Защита состоится 30 марта 2012 г. в 15:00 на заседании диссертационного совета Д.501.001.89 при Московском государственном университете имени М. В. Ломоносова по адресу: 119991, г. Москва, Ленинские горы, главное здание МГУ, механико-математический факультет, аудитория 16-10.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке механико-математического факультета МГУ имени М. В. Ломоносова

Автореферат разослан «\_\_\_» февраля 2012 г.

Учёный секретарь  
диссертационного совета Д.501.001.89,  
доктор физико-математических наук



А. Н. Осипов

# 1. Общая характеристика работы

**Актуальность темы.** Работа посвящена исследованию устойчивости плоских упругих пластин, обтекаемых потоком газа. Эта задача возникает при изучении явления панельного флаттера — потери устойчивости и интенсивных вибраций панелей обшивки самолётов и ракет, возбуждающихся при их взаимодействии с потоком воздуха на больших скоростях полёта. Панельный флаттер или потенциальные проблемы, связанные с ним, имели место на ряде сверхзвуковых летательных аппаратов со времён Второй мировой войны до наших дней: на немецких ракетах V-2 в 1944 г., нескольких опытных американских самолётах в 1950-х гг., гиперзвуковом летательном аппарате North American X-15, ракете «Сатурн V» американской лунной программы «Аполлон», самолётах Lockheed SR-71, F-117A, F-22. Из российских летательных аппаратов можно отметить проектирование гиперзвукового аппарата X-2000, при котором рассматривались вопросы панельного флаттера как самого аппарата в гиперзвуковом потоке, так и пилона для стендовых испытаний, обтекаемого локально трансзвуковым потоком. Обычно панельный флаттер, даже в случае разрушения отдельных панелей, непосредственно не приводит к крушению, но может приводить к существенному ухудшению управляемости самолёта, разрушению связанных с панелями гидравлических и других систем, а также к повышенному шумовому фону внутри самолёта.

В настоящее время явление панельного флаттера исследовано недостаточно, и его изучение остаётся актуальной задачей. Совершенствование характеристик летательных аппаратов требует уменьшения их массы, а следовательно, и жёсткости панелей обшивки, что повышает возможность возникновения панельного флаттера. Проектируются и испытываются самолёты с гибкими крыльями, адаптирующимися к условиям полёта, имеющими тонкую обшивку. Разработка летательных аппаратов новых геометрических форм, внедрение новых материалов, в том числе композитов и полимеров, активное управление схемой обтекания и пограничным слоем — всё это меняет параметры течения воздуха около панелей и их физические свойства, что также может привести к возникновению флаттера.

Слабо изученным остаётся панельный флаттер при трансзвуковых и низких сверхзвуковых скоростях. В настоящее время применяемые на практике критерии флаттера основаны на «поршневой теории» — приближении для возмущения давления, вызванного колебанием панели, справедливым при  $M \gg 1$ . Часто эти критерии применяются без обоснования и при низких сверхзвуковых скоростях.

**Цель работы.** Теоретическое и экспериментальное исследование устойчивости плоских упругих пластин, обтекаемых сверхзвуковым потоком газа, построение критериев устойчивости, выяснение механизмов возникновения растущих колебаний и влияния на них параметров задачи. Детальное исследование области низких сверхзвуковых скоростей ( $1 < M < 2$ ), которая до сих пор остаётся малоизученной, поскольку подходы, традиционно используемые в сверхзвуковой аэроупругости, в ней неприменимы.

## Научная новизна:

- Показано, что безграничная упругая пластина, обтекаемая с одной стороны потоком газа при наличии с другой стороны покоящегося газа, всегда неустойчива. Проанализировано поведение возмущений с различными длинами волн и выяснен физический механизм их усиления.
- В двумерной постановке асимптотическими методами исследована устойчивость пластины, имеющей форму широкой полосы. Показано, что неустойчивость может быть двух видов: связанным и одномодовым флаттером. Первый является классическим и хорошо изученным типом флаттера. Потеря устойчивости при нём происходит из-за взаимодействия двух собственных колебаний пластины и возможна лишь при достаточно большой плотности или скорости газа. Одномодовый флаттер возникает при низких сверхзвуковых скоростях и до работ автора практически не исследовался. В этом случае потеря устойчивости происходит без взаимодействия между собственными модами и может иметь место при сколь угодно малой плотности потока. Получены критерии устойчивости обоих типов флаттера и частоты, при которых происходит наибольшее усиление колебаний. Выявлены физические механизмы усиления колебаний и исследовано влияние параметров задачи.
- Исследовано влияние пограничного слоя, образующегося на обтекаемой поверхности, на устойчивость безграничной и конечной пластин при больших числах Рейнольдса. Показано, что пограничный слой, в зависимости от его профиля и толщины, может как подавлять, так и усиливать флаттер.
- Асимптотическими методами исследована устойчивость пластины, имеющей форму прямоугольника больших размеров, по отношению к одномодовому флаттеру. Получен критерий устойчивости, позволяющий для каждой собственной моды пластины определить, усиливается она в потоке или затухает. Исследованы возможные искажения растущих мод пластины в потоке по сравнению с собственными колебаниями в пустоте.
- В двумерной постановке численно исследована устойчивость пластины в потоке газа без дополнительных предположений о её размере. Построены границы устойчивости шарнирно опёртых и защемлённых пластин. Исследовано влияние параметров на границы разных видов неустойчивости.
- Аналитически исследовано развитие флаттерных колебаний в нелинейном приближении. Получены возможные виды установившихся колебаний и найдены их амплитуды. Показано, что при одних и тех же параметрах задачи могут существовать качественно различные установившиеся колебания — нерезонансные и с внутренним резонансом.
- Проведены экспериментальные исследования колебаний упругой пластины в сверхзвуковом потоке газа. Впервые зафиксировано возбуждение одномодового панельного флаттера в реальной конструкции.

**Достоверность результатов.** Достоверность обеспечена использованием строгих аналитических методов исследования (методы глобальной неустойчивости, ВКБ, разложения по малому параметру, гармонического баланса), надёжных численных методов с контролем сходимости (методы Бубнова-Галёркина и контрольных объёмов), использованием многократно проверенных методов измерений в экспериментальном исследовании, частичным совпадением результатов, полученных аналитически и численно, совпадением теоретических и экспериментальных результатов, а также частичным совпадением полученных результатов с результатами других авторов.

**Практическая ценность работы.** Результаты работы могут быть использованы при проектировании самолётов, ракет и других летательных аппаратов, движущихся со сверхзвуковой скоростью, а также других конструкций, взаимодействующих со сверхзвуковыми потоками газа.

**Апробация работы.** Результаты работы докладывались и обсуждались на семинаре под руководством академика РАН А. Г. Куликовского, профессора [А. А. Бармина], профессора В. П. Карликова и члена-корреспондента РАН О. Э. Мельника, совместном семинаре по аэрогидромеханике ЦАГИ – СПбПУ – ИТПМ – НИИ механики МГУ, семинаре кафедры теории упругости механико-математического факультета МГУ под руководством профессора И. А. Кийко, семинаре отдела флаттера ЦАГИ, семинаре НИИ механики МГУ под руководством профессора [С. Я. Герценштейна], XII школе-семинаре «Современные проблемы аэродинамики» (Туапсе, 2004), 1-й и 4-й Европейской конференции по аэрокосмическим наукам EUCASS (Москва, 2005 и Санкт-Петербург, 2011), 6-й и 7-й Европейской конференции по механике твёрдого тела ESMC (Будапешт, 2006 и Лиссабон, 2009), коллоквиуме Eurotech 483 «Геометрически нелинейные вибрации конструкций» (Порто, 2007), международной конференции «XVIII сессия Международной школы по моделям механики сплошной среды» (Саратов, 2007), всероссийской конференции «Современные проблемы механики сплошной среды» (Москва, 2007), международной конференции «Авиация и космонавтика – 2008» (Москва, 2008), IX всероссийской конференции молодых учёных по математическому моделированию и информационным технологиям (Кемерово, 2008), международной научно-практической конференции «Инженерные системы – 2009» (Москва, 2009), 9-й и 11-й международной школе-семинаре «Модели и методы аэродинамики» (Евпатория, 2009 и 2011), всероссийской конференции «Успехи механики сплошных сред» (Владивосток, 2009), международной конференции «Нелинейные задачи теории гидродинамической устойчивости и турбулентность» (Звенигород, 2010), восьмой международной конференции по неравновесным процессам в соплах и струях NPNJ'2010 (Алушта, 2010), 7-м международном симпозиуме ASME по взаимодействию жидкости с конструкциями, взаимодействию потоков со звуком, вибрациям и шуму (Монреаль, 2010), двустороннем российско-тайваньском симпозиуме по современным проблемам механики (Москва, 2010), 8-й Европейской конференции по механике жидкости EFMC (Бад Райхенхаль, 2010), международном форуме по аэроупругости и динамике конструкций IFASD (Париж, 2011), XVI Байкальской

всероссийской конференции «Информационные и математические технологии» (Иркутск, 2011), X Всероссийском съезде по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики (Нижний Новгород, 2011).

**Публикации.** Результаты диссертации опубликованы в 41 работе, из них 14 — статьи в журналах, рекомендованных ВАК.

**Структура и объём работы.** Диссертация состоит из введения, девяти глав, заключения и списка литературы из 180 наименований. Объём диссертации — 431 страница.

## 2. Содержание работы

### Введение

Во введении описано явление панельного флаттера, обоснована актуальность его исследования, описаны физические механизмы возбуждения флаттера. Дан обзор современного состояния литературы по панельному флаттеру. Изложена структура диссертации и вопросы, рассматриваемые в ней.

### Первая глава

Первая глава посвящена исследованию устойчивости безграничной по всем направлениям упругой изотропно растянутой пластины, обтекаемой с одной стороны однородным плоскопараллельным потоком газа. С другой стороны находится покоящийся газ, в общем случае отличный от движущегося (рис. 1).

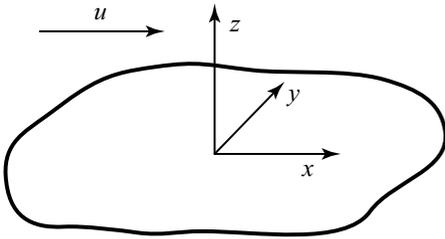


Рис. 1. Общий вид и система координат.

В разделе 1.1 приведена постановка задачи. Толщина пластины  $h$ , плотность материала  $\rho_m$ , растягивающее напряжение  $\sigma$  и изгибная жёсткость  $Eh^3/12(1-\nu^2)$  постоянны ( $E$  и  $\nu$  — модуль Юнга и коэффициент Пуассона). Газы невязкие и совершенные с плотностями  $\rho_1, \rho_2$  (индекс «1» соответствует движущемуся газу, «2» — покоящемуся) и скоростями звука  $a_1$  и  $a_2$ ; течение считается адиабатическим.

Массовые силы отсутствуют. При этих условиях для исследования устойчивости достаточно рассматривать потенциальные возмущения обоих газов.

Декартова система координат  $xuz$  выбирается так, что оси  $x$  и  $y$  лежат в плоскости невозмущённой пластины, причём ось  $x$  направлена вдоль вектора скорости газа  $u$ , а ось  $z$  направлена в сторону движущегося газа (рис. 1).

Раздел 1.2 посвящён выводу уравнений движения, записанных относительно возмущений. Безразмерные параметры задачи определяются так:

$$M = \frac{u}{a_1}, D = \frac{E}{12(1-\nu^2)a_1^2\rho_m}, M_w = \frac{\sqrt{\sigma/\rho_m}}{a_1}, \mu_1 = \frac{\rho_1}{\rho_m}, \mu_2 = \frac{\rho_2}{\rho_m}, \chi = \frac{a_2}{a_1} \quad (1)$$

Здесь  $M$  — число Маха движущегося газа,  $D$  — безразмерная изгибная жёсткость пластины,  $M_w$  — параметр, характеризующий натяжение пластины,  $\mu_1, \mu_2$  — отношения плотностей газов к плотности материала пластины,  $\chi$  — отношение скорости звука покоящегося газа к скорости звука движущегося.

Обозначим потенциалы возмущения газов  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$ , прогиб пластины —  $w$ . Тогда замкнутая система уравнений в безразмерных переменных имеет вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t^2} + (M^2 - 1) \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x^2} + 2M \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x \partial t} - \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial z^2} &= 0, \quad z > 0 \\ \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial t^2} - \chi^2 \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x^2} - \chi^2 \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial y^2} - \chi^2 \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial z^2} &= 0, \quad z < 0 \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} = M \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial t}, \quad \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial t}, \quad z = 0 & \\ \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \mu_1 \left( \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} + M \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \right) - \mu_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial t} + & \\ + M_w^2 \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) - D \left( \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right), \quad z = 0 & \end{aligned} \quad (2)$$

Первые две строки в (2) — волновые уравнения для движущегося и покоящегося газов, третья — условия непротекания, две последние — уравнение движения пластины. Для выделения однозначного решения также ставятся условия достаточно быстрого затухания возмущений при  $x, y, z \rightarrow \pm\infty$  и гладкие начальные условия.

В разделе 1.3 доказано, что решение системы (2) с указанными граничными и начальными условиями существует и единственно. Доказано, что пластина устойчива тогда и только тогда, когда она устойчива в классе возмущений типа бегущих волн  $e^{i(k_x x + k_y y - \omega t)}$ , где  $k_x, k_y \in \mathbb{R}$ . Получено дисперсионное уравнение — связь между волновым вектором  $\{k_x; k_y\}$  и частотой  $\omega$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(k, \alpha, \omega) = (Dk^4 + M_w^2 k^2 - \omega^2) - & \\ - \mu_1 \frac{(\omega - Mk \cos \alpha)^2}{\sqrt{k^2 - (\omega - Mk \cos \alpha)^2}} - \mu_2 \frac{\chi \omega^2}{\sqrt{\chi^2 k^2 - \omega^2}} = 0. & \quad (3) \end{aligned}$$

Здесь  $k = \sqrt{k_x^2 + k_y^2}$  и  $\alpha = \arccos(k_x / \sqrt{k_x^2 + k_y^2})$  — длина и угол волнового вектора с осью  $x$ . Первое слагаемое выражает вклад пластины, второе и третье — соответственно движущегося и покоящегося газов.

Таким образом, исследование устойчивости сводится к исследованию корней дисперсионного уравнения: система устойчива тогда и только тогда, когда для любых вещественных  $k, \alpha$  величина  $\text{Im } \omega(k, \alpha) \leq 0$ .

В разделах 1.4 – 1.6 исследуется устойчивость рассматриваемой системы, а также два частных случая: отсутствие пластины (тангенциальный разрыв между двумя слоями газа) и отсутствие покоящегося газа. В этих случаях дисперсионные уравнения получаются из (3) отбрасыванием соответственно первого и третьего слагаемого.

После перехода от  $\omega$  к фазовой скорости  $c = \omega/k$  и умножения дисперсионного уравнения на произведение входящих в него радикалов поведение его корней изучается с помощью принципа аргумента. Рассмотрим на комплексной плоскости  $c$  замкнутую кривую  $\mathcal{L}$ , состоящую из отрезка вещественной оси и полуокружности бесконечно большого радиуса (рис. 2, а). Построим образ  $\mathcal{L}$  под действием левой части дисперсионного уравнения. Тогда число его корней  $c(k, \alpha)$ , лежащих внутри  $\mathcal{L}$  (а значит, во всей верхней полуплоскости), будет равно числу оборотов, совершаемых образом  $\mathcal{L}$  вокруг точки 0. Таким образом, для устойчивости необходимо и достаточно, чтобы этот образ не совершал ни одного обхода.

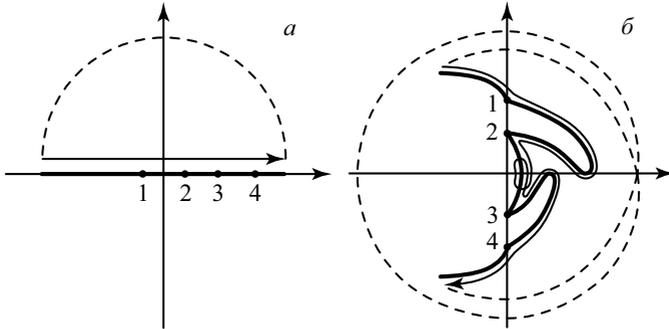


Рис. 2. Кривая  $\mathcal{L}$  на комплексной плоскости  $c$ , расположение точек ветвления квадратных корней 1 – 4 условно (а). Возможный образ  $\mathcal{L}$  под действием левой части дисперсионного уравнения (б). Стрелкой показано направление обхода.

Пример построения образа  $\mathcal{L}$  показан на рис. 2, б в одном из возможных случаев. Видно, что он совершает 1 обход вокруг нуля, и система в этом случае неустойчива.

В разделе 1.4 изучается частный случай — устойчивость тангенциального разрыва. Эта задача, во-первых, представляет самостоятельный интерес, а во-вторых, является первым этапом исследования общего случая. Без ограничения общности считается, что  $\chi \leq 1$ . Введён безразмерный параметр  $\varkappa = \mu_1/\mu_2 = \rho_1/\rho_2$ , после чего в задаче остаются лишь три независимых параметра —  $M, \chi, \varkappa$ .

Результатом являются следующие достаточные условия устойчивости и неустойчивости:

- Условия неустойчивости:  $M < 1 + \sqrt{2} \sqrt{\sqrt{1 - \varkappa^2 \chi^4} + 1} / (\varkappa \chi)$  при  $\varkappa \chi^2 \leq 1$ ;  
 $M \leq \sqrt{2} \chi + 1$  или  $\sqrt{2} \chi + \sqrt{2} \leq M < \chi + \sqrt{2 \varkappa \chi} \sqrt{\sqrt{\varkappa^2 \chi^4 - 1} + \varkappa \chi^2}$  при  $\varkappa \chi^2 > 1$
- Условия устойчивости:  $M \geq \sqrt{2} + \sqrt{2} \sqrt{\sqrt{1 - \varkappa^2 \chi^4} + 1} / (\varkappa \chi)$  при  $\varkappa \chi^2 \leq 1$ ;  
 $M \geq \sqrt{2} \chi + \sqrt{2 \varkappa \chi} \sqrt{\sqrt{\varkappa^2 \chi^4 - 1} + \varkappa \chi^2}$  при  $\varkappa \chi^2 > 1$ .

В случае  $\varkappa \chi^2 > 1$  в интервале  $\sqrt{2} \chi + 1 < M < \sqrt{2} \chi + \sqrt{2}$  может существовать

область устойчивости, не связанная с приведённой выше. При этом в трёхмерном пространстве параметров  $(M, \chi, \varkappa)$  вся область устойчивости односвязна.

При  $\varkappa\chi^2 = 1$  дисперсионное уравнение решается в явном виде и даёт классический критерий устойчивости  $M \geq (1 + \chi^{2/3})^{3/2}$ , полученный Л. Д. Ландау.

Все приведённые выше результаты относятся к плоским возмущениям, параллельным потоку ( $\alpha = 0$ ). Учитывая, что при малых  $M$  тангенциальный разрыв неустойчив, а в дисперсионное уравнение  $M$  и  $\alpha$  входят в комбинации  $M \cos \alpha$ , получаем, что по отношению к произвольно ориентированным возмущениям разрыв неустойчив при любых параметрах задачи.

В разделе 1.5 изучается устойчивость в общем случае. Доказывается, что влияние первого слагаемого в (3) при малых  $k$  приводит к появлению обходов образа  $\mathcal{L}$  вокруг нуля, то есть длинноволновые возмущения всегда неустойчивы. Если  $M \cos \alpha - 1 < \chi$ , то коротковолновые возмущения устойчивы, если же  $M \cos \alpha - 1 > \chi$ , то и они являются растущими.

Рассмотрен случай малых  $\mu_j$  (для реальных систем они имеют порядок  $10^{-4}$ ). В этом случае при не слишком большой длине волны можно отделить волны, порождённые пластиной, от волн, порождённых покоящимся и движущимся газами. Показано, что волны, порождённые пластиной, могут усиливаться, только если  $c_0 < M \cos \alpha - 1$ , где  $c_0$  — фазовая скорость волны, бегущей по пластине. Описан физический механизм усиления таких волн.

В разделе 1.6 рассматривается случай одностороннего обтекания. Критерий устойчивости — условие  $M \leq M_w$ , причём растущими являются длинные волны. Короткие волны всегда затухают. При  $\mu_1 \ll 1$  критерием усиления не слишком длинных волн является неравенство  $c_0 < M \cos \alpha - 1$ , причём в случае неустойчивости растущими являются волны, порождённые пластиной.

В разделе 1.7 кратко сформулированы результаты главы 1.

## Вторая глава

В этой главе в двумерной постановке проводится исследование устойчивости пластины, имеющей форму широкой полосы бесконечного размаха, обтекаемой с одной стороны сверхзвуковым потоком газа при постоянном давлении с другой (рис. 3). Для решения задачи на собственные значения применяется асимптотический метод глобальной неустойчивости.

В разделе 2.1 приводится постановка задачи и уравнения для возмущений, аналогичные (2). Отличие состоит в том, что покоящийся газ отсутствует, рассматриваются плоские возмущения, размеры пластины ограничены, а вне неё поверхность  $z = 0$  абсолютно жёсткая. В этой и следующей главах число Маха вычисляется для скорости, спроектированной на ось  $x$ :  $M = u \cos \theta / a_1$ . Кроме того, переобозначено  $\mu \equiv \mu_1$ . Параметры  $D, M_w$  совпадают с (1).

В разделе 2.2 описывается общий асимптотический метод, разработанный А. Г. Куликовским, с помощью которого решается задача на собственные значения. При достаточно больших размерах системы её собственные функции можно разбить на два типа. Первые, односторонние собственные функции, определяются граничными условиями, заданными на одной из кромок

пластины, и близки к собственным функциям полубесконечной в одном из направлений пластины.

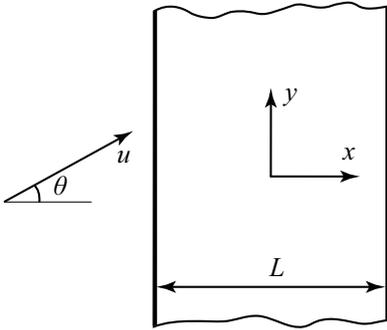


Рис. 3. Общий вид и система координат.

Вторые, глобальные собственные функции, слабо зависят от граничных условий и определяются только свойствами системы внутри рассматриваемой области. Соответствующие собственные частоты на комплексной плоскости лежат в окрестности некоторой кривой  $\Omega$ , тем ближе к ней и тем плотнее заполняя эту окрестность, чем больше протяжённость системы  $L$ . Кривая  $\Omega$  определяется уравнением  $\text{Im } k_l(\omega) = \text{Im } k_m(\omega)$ , где  $k_{l,m}(\omega)$  — ветви корней дисперсионного уравнения безграничной системы  $\mathcal{D}(k, \omega) = 0$ , отобранные определённым образом.

Таким образом, критерием устойчивости является следующее условие: кривая  $\Omega$  и все частоты односторонних собственных функций должны лежать в нижней полуплоскости

В разделе 2.3 исследуются свойства дисперсионного уравнения. Доказано, что только четыре ветви его решений  $k_j(\omega)$ , порождённые пластиной, являются физическими и должны использоваться при решении задачи на собственные значения.

В разделе 2.4 изучается глобальная неустойчивость высокочастотных возмущений, когда  $|k| \gg \mu$ ,  $|\omega| \gg \mu$ . Аналитически получено условие неустойчивости (флаттера):  $M > M_w + 1$ . Построена часть кривой  $\Omega$ , лежащая в высокочастотной области и найдена частота  $\omega_{\max} = (M - 1) \sqrt{((M - 1)^2 - M_w^2)/D}$ , которой соответствует наибольший рост возмущения. Для примера на рис. 4, б показана часть кривой  $\Omega$  для параметров  $M = 1.5$ ,

$$D = 23.9, \quad M_w = 0, \quad \mu = 1.2 \cdot 10^{-4}, \quad (4)$$

соответствующих стальной пластине в потоке воздуха на высоте 3 км.

Возбуждение высокочастотных собственных функций происходит так. Пусть, например, на передней кромке возникает возмущение в виде бегущей волны. При достижении ею задней кромки она отражается от неё и порождает две волны, бегущие в противоположную сторону. Однако, одна из них быстро затухает, и только вторая волна возвращается к передней кромке. При отражении от последней она превращается в исходную волну и затухающую волну, амплитуда которой при подходе к задней кромке становится пренебрежимо малой. Циклическое повторение этого процесса приводит к образованию собственной функции. Если усиление волны, бегущей по потоку, превысит затухание волны, бегущей против потока, то после каждого цикла отражений амплитуда волн будет увеличиваться, и вся собственная функция будет растущей. Усиление волны, бегущей по потоку, происходит при  $c_0 < M - 1$ , где  $c_0$  — её фазовая скорость в отсутствии газа. В случае, когда  $c_0$  совпадает

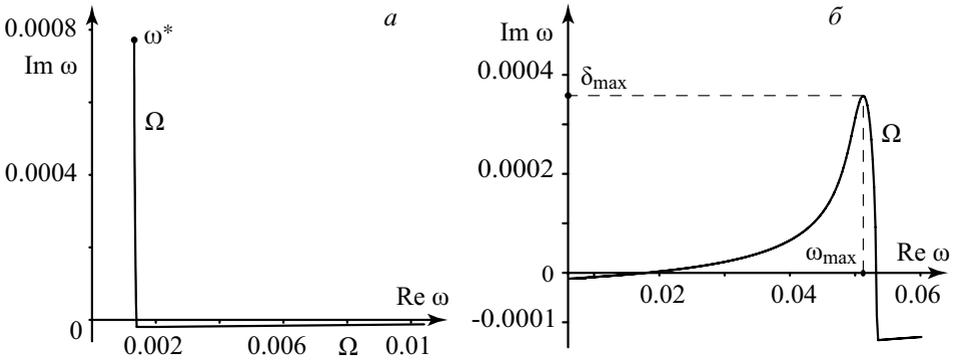


Рис. 4. Части кривой  $\Omega$ , лежащие в области малых  $|\omega|$  (а) и в области  $|\omega| \gg \mu$  (б), для параметров (4),  $M = 1.5$ .

со скоростью распространения заднего фронта звукового возмущения в газе  $M - 1$  (это происходит при частоте  $\omega_{\max}$ ), возникает резонанс между волной в пластине и в газе, приводящий к наибольшему усилению волны и всей собственной функции, «составной частью» которой является эта волна.

В **разделе 2.5** изучается глобальная неустойчивость низкочастотных возмущений. Здесь также возможна неустойчивость (флаттер), но её тип отличен от высокочастотной. Получено условие неустойчивости и частота, соответствующая наибольшему усилению:

$$M_w < \left( \frac{\sqrt{54}}{4} \right)^{1/3} \left( \mu \frac{M^2}{\sqrt{M^2 - 1}} \right)^{1/3} D^{1/6}, \quad \omega = A \left( \mu \frac{M^2}{\sqrt{M^2 - 1}} \right)^{2/3} D^{-1/6},$$

здесь  $A$  зависит от параметров задачи и меняется в диапазоне  $0.433 \leq A \leq 0.595$ . Вид кривой  $\Omega$  в низкочастотной области для случая неустойчивости показан на рис. 4, а.

В **разделе 2.6** показано, что пластина, обтекаемая потоком газа, при используемых обычно граничных условиях заземления, шарнирного опирания и свободного края не имеет односторонних собственных функций.

В **разделе 2.7** обсуждается физический смысл полученных результатов. Показано, что низкочастотный флаттер является флаттером связанного типа, при котором происходит взаимодействие двух собственных колебаний пластины (рис. 5, а). Он подробно исследован в литературе с помощью приближения поршневой теории. Указанное взаимодействие колебаний и переход к неустойчивости возможны лишь при достаточно большой плотности газа.

Высокочастотный флаттер имеет одномодовый характер: потеря устойчивости происходит без взаимодействия между собственными модами колебаний (рис. 5, б). Этот тип флаттера не может быть получен при использовании поршневой теории и практически не исследован. Характерной особенностью одномодового флаттера является то, что он может иметь место при сколь угодно малой плотности потока газа.

Объяснено известное в литературе отличие результатов исследования

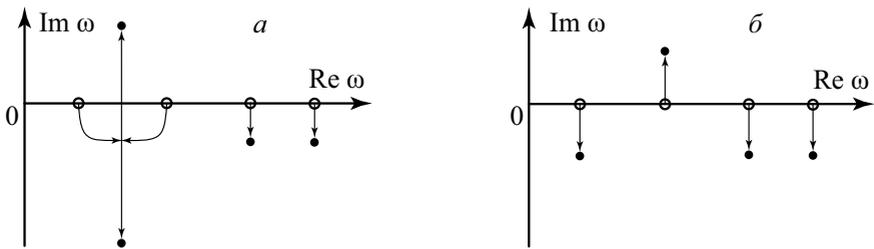


Рис. 5. Качественный вид траекторий движения собственных частот колебаний пластины при увеличении плотности газа и потери устойчивости: при связанном типе флаттера (а), при одномодовом флаттере (б). Кружками показаны частоты в отсутствии газа, точками — в потоке.

устойчивости безграничных пластин и конечных пластин, имеющих большую протяжённость в направлении потока.

В разделе 2.8 обобщены и кратко сформулированы результаты главы 2.

## Третья глава

В третьей главе оценивается применимость асимптотических результатов главы 2, касающихся одномодового флаттера, к пластинам конечной длины. (связанный тип флаттера не изучается, так как он подробно исследован в литературе). Рассмотрены четыре источника погрешности: неточность в определении давления, действующего на колеблющуюся пластину, использование метода глобальной неустойчивости при решении задачи на собственные значения, пренебрежение демпфированием колебаний пластины и наличием покоящегося газа со стороны пластины, противоположной обтекаемой.

В разделах 3.1 и 3.2 показано, что неточности при вычислениях давления, действующего на колеблющуюся пластину, и при использовании метода глобальной неустойчивости, вне окрестности частоты максимального усиления  $\omega_{\max}$  пренебрежимо малы, если отношение ширины пластины к её толщине превышает несколько десятков. Практически все пластины, используемые в технике, удовлетворяют этому условию.

В разделе 3.3 исследовано влияние рассеяния энергии в материале пластины и конструкционного демпфирования на собственные функции и получено условие их роста при учёте демпфирования. Достаточно большое рассеяние в материале предотвращает флаттер пластин любой ширины, в то время как конструкционное демпфирование при достаточно большой ширине может быть сделано сколь угодно малым и не может подавить флаттер. Приведены примеры обтекания стальных, титановых и алюминиевых пластин, для которых показатель усиления колебаний при одномодовом флаттере в несколько раз больше, чем декремент затухания, вызванный рассеянием в материале.

В разделе 3.4 исследовано влияние покоящегося газа, находящегося со стороны пластины, противоположной потоку, и показано, что при  $M - 1 < \chi$  он не оказывает влияния на устойчивость, а при  $M - 1 > \chi$  он обладает демпфирующим действием и может частично или полностью подавить флаттер.

В разделе 3.5 кратко сформулированы результаты главы 3.

## Четвёртая глава

В четвёртой главе в двумерной постановке изучается влияние пограничного слоя, образующегося на поверхности пластины, на её устойчивость (рис. 6).

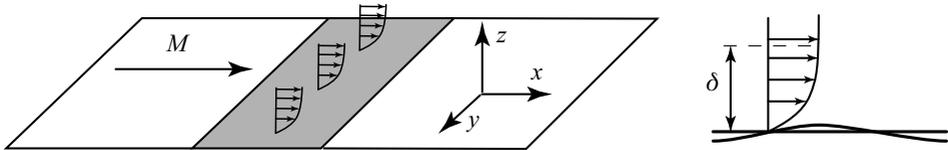


Рис. 6. Течение около пластины.

В разделе 4.1 приведена постановка задачи. Уравнение движения пластины такое же, как в главах 1–3:

$$D \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - M_w^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + p = 0, \quad (5)$$

отличие заключается в наличии пограничного слоя толщины  $\delta$ , влияющего на возмущение давления  $p$ .

**Раздел 4.2** посвящён выводу дисперсионного уравнения для безграничной пластины, находящейся в потоке газа с пограничным слоем. Считается, что возмущение имеет вид бегущей волны,  $w(x, t) = e^{i(kx - \omega t)}$ . Профили скорости и температуры в пограничном слое считаются заданными. Течение плоскопараллельное (нарастание пограничного слоя не учитывается) и ламинарное (влияние турбулентности учитывается только в виде изменения профиля пограничного слоя), такая постановка традиционна в теории гидродинамической устойчивости. Возмущения описываются в невязком приближении, что можно обосновать следующим образом. При больших числах Рейнольдса, характерных для сверхзвуковых течений, влияние вязких решений системы уравнений для возмущений пограничного слоя (аналога уравнения Орра-Зоммерфельда в несжимаемой жидкости) существенно лишь при большой длине волны, когда критический слой находится близко к поверхности пластины. Поскольку длины волн, характерные для колебаний пластины, определяются её собственными модами и ограничены сверху, то при больших  $Re$  длинноволновые возмущения не могут реализоваться. В результате критический слой находится вдали от дна пограничного слоя, и решение имеет пятипалубную асимптотическую структуру, описываемую невязким уравнением — «сжимаемым уравнением Рэлея»

$$\frac{d}{dz} \left( \frac{(u_0 - c) \frac{dv}{dz} - \frac{du_0}{dz} v}{T_0 - (u_0 - c)^2} \right) - \frac{1}{T_0} k^2 (u_0 - c) v = 0, \quad (6)$$

где  $u_0(z)$  и  $T_0(z)$  — безразмерные профили скорости и температуры,  $c = \omega/k$  — фазовая скорость волны,  $v(z)$  — возмущение вертикальной компоненты скорости газа.

Считая длину волны большой по сравнению с толщиной пограничного слоя и, соответственно, волновое число  $k$  — малым, можно пренебречь вторым слагаемым в (6), после чего это уравнение решается в явном виде. Удовлетворяя граничным условиям непротекания на поверхности колеблющейся пластины и склейки с решением волнового уравнения на внешней границе пограничного слоя, находим возмущение  $v(z)$ , и затем — возмущение давления  $p$  на поверхности пластины. Подставляя его в (5), приходим к дисперсионному уравнению

$$\mathcal{D}(k, \omega) = (Dk^4 + M_w^2 k^2 - \omega^2) - \mu \left( \left( \frac{(M_\infty k - \omega)^2}{\sqrt{k^2 - (M_\infty k - \omega)^2}} \right)^{-1} + \delta \left( \int_0^1 \frac{T_0(\eta) d\eta}{(u_0(\eta) - c)^2} - 1 \right) \right)^{-1} = 0. \quad (7)$$

При  $\delta \rightarrow 0$  оно в точности превращается в дисперсионное уравнение пластины в однородном потенциальном потоке (3) с  $\alpha = \mu_2 = 0$ .

В разделе 4.3 исследуются решения дисперсионного уравнения для волн, которые в однородном потоке усиливаются ( $0 < c < M_\infty - 1$ ). В случае, если профиль пограничного слоя обобщённо-выпуклый (то есть  $(u'_0/T_0)' < 0$ ), то волна остаётся усиливающейся при любой его толщине  $\delta$ , но скорость нарастания колебаний уменьшается. Если же профиль имеет обобщённую точку перегиба ( $(u'_0/T_0)' = 0$ ) в части пограничного слоя, сверхзвуковой относительно потока (то есть при  $u_0 < M_\infty - 1$ ), то усиление волны больше, чем в однородном потоке при  $0 < \delta < \delta_1$ , и меньше, чем в однородном потоке при  $\delta_1 < \delta < \delta_2$ ; при  $\delta > \delta_2$  волна затухает.

В разделе 4.4 рассмотрены примеры автотельных пограничных слоёв в сжимаемом газе и их действие на колебание пластины. Расчёты проведены при параметрах (4),  $M_\infty = 1.6$ . Пластина теплоизолирована, число Прандтля  $\text{Pr} = 1$ . Рассмотренные профили показаны на рис. 7, параметр автотельности  $\beta$  определяется градиентом давления вдоль потока: течение ускоряется при  $\beta > 0$  и замедляется при  $\beta < 0$ .

В разделе 4.5 исследована связь устойчивости пограничного слоя на упругой и на абсолютно жёсткой пластине. Построены примеры пограничных слоёв, устойчивых на недеформируемой пластине, приводящих к сколь угодно быстрому нарастанию колебаний упругой пластины.

В разделе 4.6 изучаются волны, которые в однородном потоке нейтрально устойчивы или затухают. Затухающие волны в пограничном слое остаются затухающими. Часть нейтральных волн остаётся нейтральной, часть — стабилизируется, часть — дестабилизируется. Последний случай аналогичен известной невязкой неустойчивости пограничного слоя Блазиуса в несжимаемой жидкости в случае упругой поверхности.

В разделе 4.7 методом глобальной неустойчивости исследуется устойчивость пластины конечной, но достаточно большой ширины, в потоке с пограничным слоем. Показано, что в случае обобщённо-выпуклого профиля сверхзвуковые (относительно потока) возмущения, растущие в однородном потоке, стабилизируются, но часть дозвуковых возмущений, нейтральных в однород-

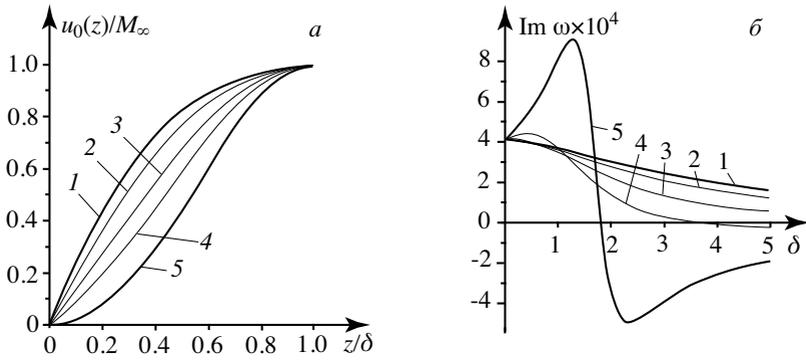


Рис. 7. Профили скорости для ускоряющихся и замедляющихся течений при параметрах (4),  $M_\infty = 1.6$ ; кривые 1–5:  $\beta = 2.0, 0.5, 0.0, -0.14, -0.199$  (а).  $\text{Im } \omega(\delta)$  для профилей 1–5 при  $k = 0.06$  (б).

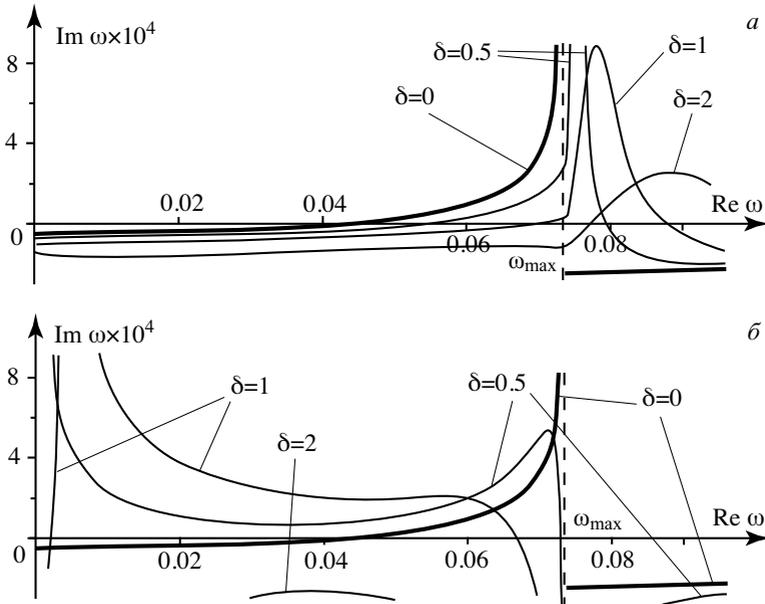


Рис. 8. Кривые  $\Omega$  для профилей 1 (а) и 5 (б) рис. 7. Вертикальная штриховая линия соответствует переходу через скорость звука:  $c(\omega) = M_\infty - 1$ .

ном потоке, становится растущей. В случае пограничного слоя с обобщённой точкой перегиба, расположенной в его дозвуковой части (именно так устроены автотельные профили), дозвуковые возмущения, нейтральные в однородном потоке, становятся затухающими, а инкремент растущих сверхзвуковых возмущений увеличивается в тонком пограничном слое; в достаточно толстом пограничном слое сверхзвуковые возмущения становятся затухающими.

В разделе 4.8 рассмотрены примеры — профили 1 и 5 на рис. 7. Для них построены асимптотические кривые  $\Omega$  (рис. 8). В первом случае при увеличе-

нии  $\delta$  происходит стабилизация сверхзвуковых возмущений и усиление дозвуковых. Во втором случае сверхзвуковые возмущения при достаточно тонком пограничном слое усиливаются быстрее, чем в однородном потоке, и затухают в толстом пограничном слое. Дозвуковые возмущения затухают.

## Пятая глава

В пятой главе рассматривается задача об устойчивости прямоугольной пластины, обтекаемой сверхзвуковым потоком газа, по отношению к одно-модовому флаттеру (рис. 9).

В разделе 5.1 приведена постановка задачи и система уравнений для возмущений. Она аналогична (2), за исключением того, что покоящийся газ заменён постоянным давлением, а вне пластины поверхность  $z = 0$  абсолютно жёсткая. Безразмерные параметры  $M$ ,  $D$ ,  $M_w$  совпадают с (1),  $\mu \equiv \mu_1$ .

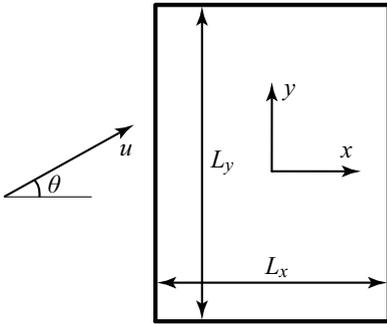


Рис. 9. Конфигурация рассматриваемой системы.

В разделе 5.2 получено условие усиления колебаний пластины в потоке. Пусть для рассматриваемой пластины справедлив динамический краевой эффект, то есть любое собственное колебание (имеющее вид стоячей волны) вне окрестности кромок записывается в виде

$$w(x, y, t) = \cos(k_x x + \varphi_x) \cos(k_y y + \varphi_y) e^{-i\omega t} \quad (8)$$

Представим его в виде суперпозиции четырёх бегущих волн:

$$\begin{aligned} w(x, y, t) &= \frac{1}{4} (e^{i\varphi_x} e^{ik_x x} + e^{-i\varphi_x} e^{-ik_x x}) (e^{i\varphi_y} e^{ik_y y} + e^{-i\varphi_y} e^{-ik_y y}) e^{-i\omega t} = \\ &= C_1 e^{i(k_x x + k_y y - \omega t)} + C_2 e^{i(k_x x - k_y y - \omega t)} + C_3 e^{i(-k_x x - k_y y - \omega t)} + C_4 e^{i(-k_x x + k_y y - \omega t)} \end{aligned} \quad (9)$$

Пронумеруем направления распространения волн соответственно номеру слагаемого в (9) (рис. 10). Тогда образование стоячей волны можно представить следующим образом. На одной из кромок возбуждается бегущая волна, движущаяся в направлении 1. Последовательно отражаясь от четырёх кромок пластины, она превращается в волны, движущиеся в направлениях 2, 3, 4. При последнем отражении она превращается в исходную волну, после чего процесс циклически повторяется. После нескольких циклов движение четырёх указанных волн приобретает установившийся характер, а их наложение приводит к образованию стоячей волны (8).

Пусть теперь пластина обтекается газом. Пренебрегая влиянием на него кромок пластины и зная его действие на бегущие волны, легко понять его действие и на собственное колебание в целом.

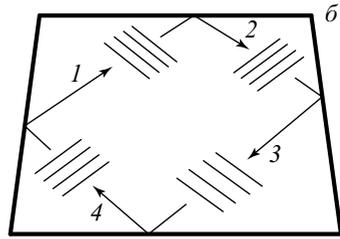
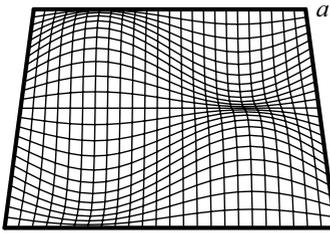


Рис. 10. Собственная форма колебаний пластины — стоячая волна (а) и её представление в виде суперпозиции четырёх бегущих волн (б). Цифрами обозначены направления распространения волн.

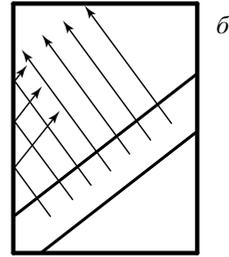
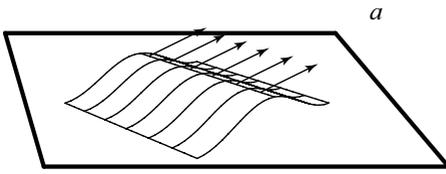


Рис. 11. Представление движения волны как движение отдельных участков (а) и их начальные траектории (б).

Действие газа на усиление волн согласно главам 1, 2 определяется фазовой скоростью волны в отсутствии потока  $c_0$  и углом  $\alpha$  между направлением её движения и потоком. Вектор скорости газа можно разложить на две компоненты: лежащую в плоскости волны  $M \cos \alpha$  и перпендикулярную ей  $M \sin \alpha$ . Тогда действие газа на бегущую по пластине волну определяется только первой компонентой: усиление волны происходит в том и только том случае, когда  $c_0 < M \cos \alpha - 1$ .

Рассмотрим теперь действие газа на собственное колебание. Для этого представим движение волны как движение её отдельных участков (рис. 11). Траектории этих участков между кромками являются отрезками прямых линий, имеющих одно из четырёх направлений (рис. 10, б), а от кромок происходит зеркальное отражение. В зависимости от рассматриваемой формы колебаний траектории могут быть замкнутыми (рис. 12, а и б) и незамкнутыми (рис. 12, в). Замкнутая траектория является замкнутой ломаной, а незамкнутая всюду плотна в прямоугольнике, очерчиваемом контуром пластины.

Будем называть циклом отражений участков волны период времени, за который их траектории вернуться в начальные точки (в случае замкнутой траектории) или близко к ним (в случае незамкнутой траектории). Вычисляя вдоль каждой траектории изменение амплитуды за такой цикл, найдём изменение амплитуды и для волны в целом, поскольку траектории покрывают всю поверхность пластины. Изменение амплитуды за цикл отражений происходит, во-первых, при движении волны от одной кромки до другой из-за наличия мнимой части волнового числа (движение вдоль звеньев траектории),

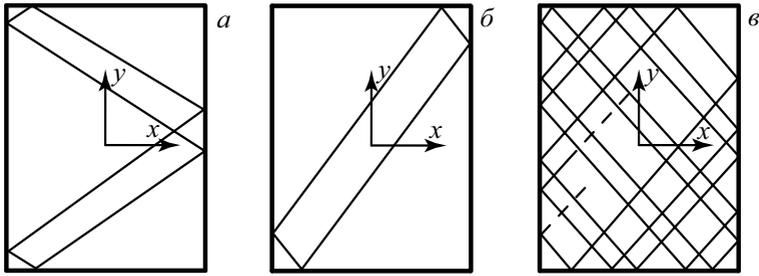


Рис. 12. Траектории движения участков волны. Замкнутая траектория, симметричная относительно одной из осей координат (а), замкнутая траектория, несимметричная относительно осей координат (б), незамкнутая траектория (в).

и во-вторых, при отражениях от кромок пластины. Производя вычисления, получаем условие усиления колебания:

$$l_1 \operatorname{Im}(\Delta(k_1) + \Delta(k_3)) + l_2 \operatorname{Im}(\Delta(k_2) + \Delta(k_4)) < 0 \quad (10)$$

Здесь  $l_1$  и  $l_2$  — суммарные расстояния, проходимые траекторией в направлениях 1 и 2,  $\Delta(k)$  — приращение волнового числа, вызванное наличием газа и вычисляемое из дисперсионного уравнения.

Условие (10) позволяет определить наличие или отсутствие роста амплитуды для каждой траектории заданной формы колебаний. Если такой рост будет происходить на всех траекториях, то и само колебание будет усиливаться, если же на всех траекториях амплитуда уменьшается, то колебание затухает. Если на части траекторий амплитуда увеличивается, а на части — уменьшается, то суммарное поведение будет определяться дифракцией волн, которая рассматривается в разделе 5.5.

В разделе 5.3 рассмотрен случай, когда поток направлен перпендикулярно одной из кромок пластины. В этом случае условие (10) не зависит от траектории и определяется только рассматриваемым собственным колебанием, которое усиливается равномерно. Рассмотрено влияние параметров задачи на рост колебания. Показано, что существует такое  $M_{\max}(D, M_w, \mu)$ , что при фиксированном  $M < M_{\max}$  и варьируемых размерах пластины быстрее всех будут расти собственные функции, имеющие одну полуволну в направлении, перпендикулярном потоку. При  $M > M_{\max}$  это, вообще говоря, не так.

В разделе 5.4 исследован случай произвольного направления потока и замкнутых симметричных траекторий. Искажения формы колебания в потоке при этом не происходит, критерий устойчивости — такой же, что в разделе 5.3.

Раздел 5.5 посвящён случаю замкнутых несимметричных траекторий. Форма колебаний в потоке по сравнению с пустотой изменяется: на разных траекториях усиление колебаний различно, экстремумы соответствуют траекториям, соединяющим противоположные углы пластины. В этом случае необходимо учитывать «расплывание» возмущений в направлениях, перпендикулярных траекториям. Наиболее содержательным является случай, когда на части траекторий возмущение усиливается, а на части — затухает: «методом траекторий» невозможно определить результирующее поведение возмущения.

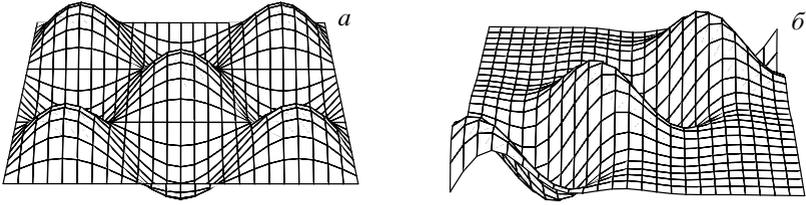


Рис. 13. Собственная мода пластины в пустоте (а) и в потоке (б) при неодинаковом усилении возмущений на траекториях.

Для этого случая выведено уравнение движения пластины с учётом расплывания. Методом ВКБ показано, что в потоке газа, вместо одной собственной моды пластины в пустоте, образуется счётное число качественно других мод, сконцентрированных в узкой полосе около одной из экстремальных траекторий (рис. 13). Найдены их собственные частоты и критерий устойчивости. Растущими может быть лишь конечное число таких мод.

В случае незамкнутых траекторий искажение колебаний в потоке возможно, только если траектория близка к замкнутой несимметричной траектории.

В разделе 5.6 оценено влияние покоящегося газа. Он не влияет на усиление колебаний при  $M - 1 < \chi$  и может демпфировать их в противном случае.

Раздел 5.7 посвящён обобщению полученных результатов и формулировке алгоритма расчёта одномодового флаттера пластины.

Проведены примеры расчёта панельного флаттера: дюралюминиевая панель обшивки летательного аппарата размером  $220 \times 750 \times 1.5$  мм и стальная пластина размером  $300 \times 540 \times 1$  мм, помещённая в аэродинамическую трубу А-7 НИИ механики МГУ. Результаты последнего расчёта используются при планировании эксперимента, описанного в главе 9.

В разделе 5.8 приведены основные результаты главы 5.

## Шестая глава

В шестой главе в двумерной постановке численно исследуются границы устойчивости упругой пластины в сверхзвуковом потоке при использовании точной линеаризованной аэродинамики и без каких-либо ограничения на размер пластины. Покоящийся газ отсутствует.

В разделе 6.1 приводится постановка задачи. За основу берутся уравнения главы 1. Волновое уравнение с граничным условием непротекания на колеблющейся пластине решается с помощью преобразования Лапласа. Вычисление возмущения давления на поверхности пластины, колеблющейся по закону  $w(x, t) = W(x)e^{-i\omega t}$ , приводит к выражению  $p(x, t) = P(x)e^{-i\omega t}$ , где

$$P(x) = \frac{\mu M}{\sqrt{M^2 - 1}} \left( -i\omega W(x) + M \frac{\partial W(x)}{\partial x} \right) + \frac{\mu \omega}{(M^2 - 1)^{3/2}} \int_0^x \left( -i\omega W(\xi) + M \frac{\partial W(\xi)}{\partial \xi} \right) d\xi.$$

$$\cdot \exp\left(\frac{iM\omega(x-\xi)}{M^2-1}\right) \left(iJ_0\left(\frac{-\omega(x-\xi)}{M^2-1}\right) + MJ_1\left(\frac{-\omega(x-\xi)}{M^2-1}\right)\right) d\xi. \quad (11)$$

Его подстановка в уравнение движения пластины (5) даёт одно интегродифференциальное уравнение относительно прогиба  $W(x)$ , которое вместе с граничными условиями шарнирного опирания или защемления определяет задачу на собственные значения  $\omega$ .

Поршневая теория получается из (11) отбрасыванием интегрального слагаемого и сводит задачу к дифференциальной.

В **разделе 6.2** описывается численный метод Бубнова-Галёркина и итерационная процедура вычисления собственных частот пластины в потоке. Частотное уравнение имеет вид  $\det(\mathbf{K} + \mathbf{P}(\omega) - L\omega^2\mathbf{I}/2) = 0$ , где  $\mathbf{K}$  — матрица жёсткости пластины,  $\mathbf{P}(\omega)$  — матрица аэродинамических сил,  $\mathbf{I}$  — единичная матрица, и решается численно. Исследуется сходимость метода и подбираются параметры расчёта, дающие решение с высокой точностью.

В **разделе 6.3** переформулируются асимптотические результаты главы 2: область одномодового флаттера  $n$ -й моды имеет вид  $M_n^* < M < M_n^{**}$ , где

$$M_n^* = 1 + \sqrt{\lambda_n}, \quad M_n^{**} = \sqrt{1 + \lambda_n + \sqrt{4\lambda_n + 1}}, \quad \lambda_n = \frac{\sqrt{4D\omega_{0n}^2 + M_w^4} + M_w^2}{2}, \quad (12)$$

а  $\omega_{0n}$  —  $n$ -я собственная частота пластины в пустоте.

В **разделе 6.4** рассматриваются результаты расчётов шарнирно-опёртой пластины. Расчёты проведены для параметров (4). Границы флаттера, полученные с помощью теории потенциального течения (11), показаны на рис. 14. Каждая мода имеет собственную область флаттера на плоскости  $M - L$ . С увеличением  $L$  границы флаттера  $M_n^*(L)$ ,  $M_n^{**}(L)$  уменьшаются и стремятся к асимптотическим значениям (12):  $M_n^* \rightarrow 1$ ,  $M_n^{**} \rightarrow \sqrt{2}$  при  $L \rightarrow \infty$ . При некотором  $L$  (жирная штрихованная линия на рис. 14) происходит слияние 1-й и 2-й собственных частот и переход к флаттеру связанного типа. Это, однако, не влияет на 3-ю и последующие частоты, так что их границы устойчивости продолжают в область более высоких  $L$ .

Для понимания природы одномодовой и связанной неустойчивости рассмотрим движение собственных частота на комплексной плоскости  $\omega$ , рассчитанное по теории потенциального течения. Для простоты будем следить за первыми тремя частотами, качественное поведение более высоких частот такое же. При  $L = 250$ ,  $M = 1.6$  все три частоты лежат в нижней полуплоскости (рис. 15, а), и соответствующие моды затухают. Сохраняя постоянным  $L$ , будем уменьшать  $M$  от 1.6 до 1.05. При  $M = M_n^{**}$  (верхняя ветвь на рис. 14)  $n$ -я собственная частота пересекает вещественную ось  $\omega$  и переходит в верхнюю полуплоскость,  $n$ -я мода становится неустойчивой. Важной особенностью этого перехода является то, что частоты не сближаются друг к другу, поэтому будем называть такой переход к неустойчивости одномодовым флаттером. При дальнейшем уменьшении  $M$  значения  $\text{Im} \omega_n$  достигают максимума и уменьшаются. При  $M = M_n^*$  (нижняя ветвь на рис. 14) частоты снова пересекают вещественную ось; соответствующие моды снова становят-

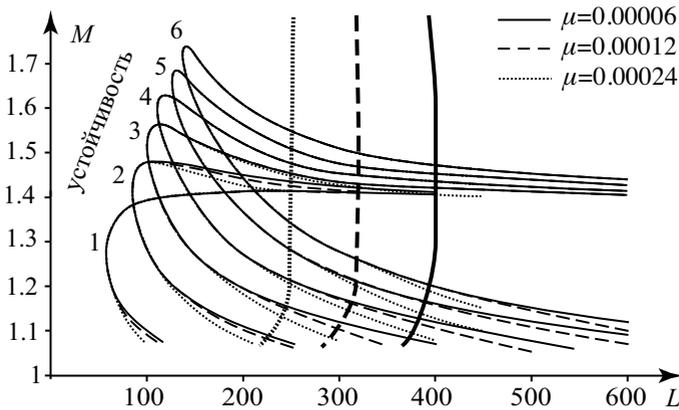


Рис. 14. Границы устойчивости на плоскости  $M - L$  при  $D = 23.9$ ,  $M_w = 0$ ,  $\mu = 6 \cdot 10^{-5}$ ,  $12 \cdot 10^{-5}$ ,  $24 \cdot 10^{-5}$ . Тонкие кривые: границы одномодового флаттера по модам 1-6, жирные кривые: границы связанного типа флаттера.

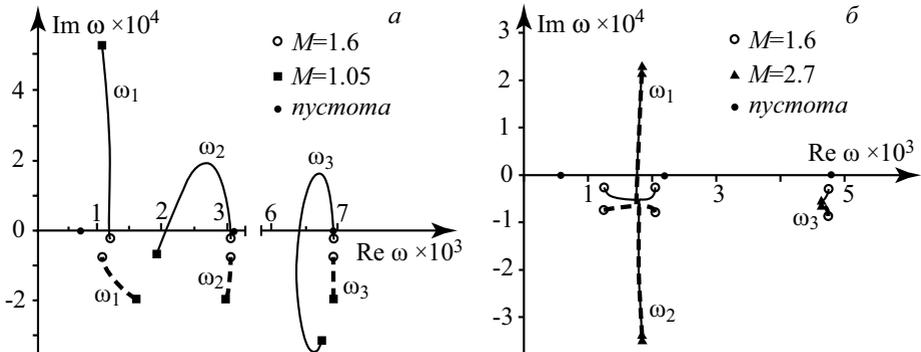


Рис. 15. Траектории первых трёх собственных частот на комплексной плоскости  $\omega$  при  $D = 23.9$ ,  $M_w = 0$ ,  $\mu = 12 \cdot 10^{-5}$ . (а):  $L = 250$ ,  $1.05 \leq M \leq 1.6$ , (б):  $L = 300$ ,  $1.6 \leq M \leq 2.7$ . Сплошные и штриховые линии — результаты, полученные по теории потенциального течения и по поршневой теории, соответственно.

ся затухающими. Таким образом,  $n$ -я мода находится в области одномодового флаттера при  $M_n^* \leq M \leq M_n^{**}$ .

При расчётах по поршневой теории в диапазоне  $1.05 < M < 1.6$  (штриховые линии на рис. 15, а) перехода к одномодовой неустойчивости нет: все собственные значения лежат в нижней полуплоскости при всех  $M$  из этого диапазона. Следовательно, поршневая теория «не видит» одномодового флаттера и не может его предсказать.

Рассмотрим переход к флаттеру связанного типа. Возьмём  $L = 300$  и будем увеличивать  $M$ . Изменяя  $M$  от 1.05 до 1.6, мы проходим через области одномодового флаттера первых шести мод, движение собственных частот качественно такое же, как на рис. 15, а. Траектории частот при дальнейшем увеличении  $M$  до 2.7 показаны на рис. 15, б. При  $M = 2.27$  происходит слияние первых двух частот, первая частота пересекает вещественную ось при

$M = 2.29$ , почти сразу после слияния. Показанные штриховыми линиями на рис. 15, б — траектории тех же частот, полученные в расчётах по поршневой теории. Видно, что они близки к траекториям, рассчитанным по теории потенциального течения. Флаттер связанного типа по поршневой теории возникает при  $M = 2.30$ , что близко к значению, рассчитанному по теории потенциального течения. При дальнейшем увеличении  $M$  разница частот, рассчитанных по двум теориям, практически исчезает, то есть поршневая теория очень хорошо приближает точную при больших  $M$ .

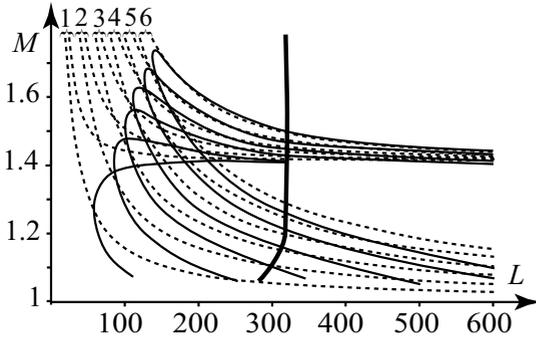


Рис. 16. Численные (сплошные) и асимптотические (штриховые) границы устойчивости первых шести мод при параметрах (4). Жирная линия — граница связанного типа флаттера.

$\text{Im } \omega = \text{const}$ . Фактически они являются границами устойчивости при наличии конструкционного демпфирования пластины.

На рис. 16 показано сравнение рассчитанных и асимптотических границ (12). Совпадение удовлетворительное при  $L > 150$ . Нижние ветви рассчитанных границ находятся несколько ниже асимптотических, в то время как верхние ветви коррелируют очень хорошо. Основным отличием рассчитанных границ от асимптотических является устойчивость пластины при малых  $L$ , в то время как асимптотические границы не исчезают при  $L \rightarrow 0$ .

В разделе 6.5 приведены аналогичные результаты расчётов для пластин, закреплённых по обоим краям.

В разделе 6.6 границы устойчивости сравниваются с другими работами.

В разделе 6.7 Сформулированы основные выводы главы 6.

## Седьмая глава

В седьмой главе предлагается упрощённый метод построения границ одномодового флаттера, не требующий решения связанной аэроупругой задачи.

В разделе 7.1 описывается суть метода. Основная идея заключена в том, что при одномодовом флаттере собственные моды пластины в пустоте и в потоке близки. Пусть воображаемая пластина расположена на поверхности

Исследовано влияние параметров задачи — жёсткости  $D$ , натяжения  $M_w$  и безразмерной плотности потока  $\mu$ . Существенная особенность асимптотических границ одномодового флаттера при  $L \rightarrow \infty$  (12) — их независимость от  $\mu$ ; расчёты при нескольких значениях  $\mu$ , показанные на рис. 14, подтверждают это свойство и при малых  $L$ . Для связанного типа флаттера, наоборот, это существенный параметр, поскольку связь двух мод пластины происходит через поток газа.

Рассчитаны линии уровня

расчётной области, в которой движется газ (рис. 17). Зададим движение поверхностных узлов сетки в виде собственного колебания пластины в пустоте

$$w(x, y, t) = W(x, y) \cdot \sin(\omega t),$$

где  $W(x, y)$  и  $\omega$  — собственная форма и частота, и будем рассчитывать нестационарное течение потока при таких колебаниях. Начальные и граничные

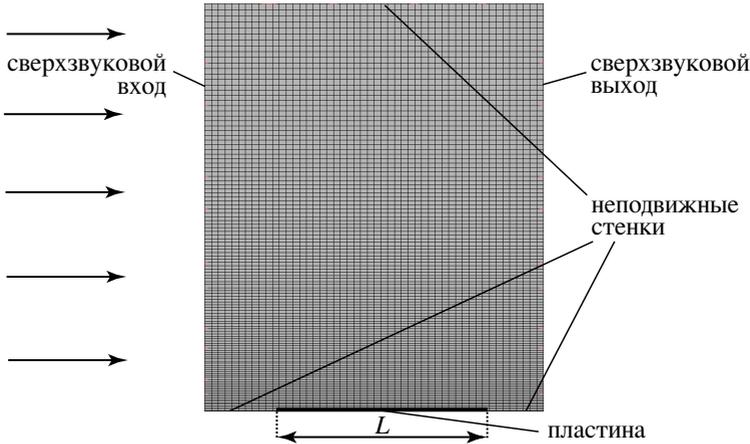


Рис. 17. Расчётная область.

условия соответствуют однородному потоку. Нестационарный газодинамический расчёт проводится в программе Ansys CFX методом контрольных объёмов. На каждом шаге происходит автоматическая деформация сетки (внутренних узлов) в соответствии с движением её поверхностных узлов. Колебания пластины (в терминах расчёта — движение границы области) приводят к возмущению давления газа. Расчёт продолжается до тех пор, пока отклик потока на гармоническое движение пластины не станет близким к гармоническому. После этого вычисляется работа, совершённая давлением газа на последнем периоде колебаний:

$$U = \int_0^T \int_S \vec{p}(x, y, z, t) \cdot \vec{v}(x, y, t) ds dt, \quad (13)$$

здесь  $T = 2\pi/\omega$ ,  $S$  — поверхность пластины,  $\vec{p}$  — давление, действующее на неё,  $\vec{v} = \{0; 0; \partial w/\partial t\}$  — скорость движения точек пластины.

Знак  $U$  является критерием флаттера. Если  $U > 0$ , то поток энергии направлен от газа к пластине, колебания которой будут усиливаться. Если же  $U < 0$ , то энергия передаётся от пластины к газу и рассеивается в нём, колебания по этой моде затухают. Этот критерий должен быть проверен для каждой потенциально «флаттерной» моды. Если хотя бы для одной моды работа (13) положительна, то пластина неустойчива.

Расчёт описанным методом двумерной задачи (**раздел 7.2**) дал хорошее совпадение с результатами, полученными в главах 2 и 6. Сравнение расчётов

трёхмерной задачи (**раздел 7.3**) для прямоугольной пластины с асимптотическими результатами главы 5 показало хорошее совпадение для колебаний по форме (2,1) и сильное различие для форм (1,1) и (2,2) (первое число в скобках — число полуволн прогиба пластины в направлении потока, второе — в перпендикулярном направлении). Последнее объясняется влиянием конусов Маха, выпущенных из передних угловых точек пластины, в которых распределение возмущённого давления отлично от принятого в асимптотической теории и в двумерных расчётах главы 6.

В **разделе 7.4** формулируются выводы седьмой главы.

## Восьмая глава

Восьмая глава посвящена исследованию нелинейных колебаний пластины в потоке газа и амплитуд установившихся одномодовых флаттерных колебаний.

В **разделе 8.1** приведена постановка задачи. Нелинейность задачи вызвана геометрической нелинейностью поведения пластины — наличием мембранных напряжений, возникающих при изгибе (модель больших прогибов Кармана). Возмущение давления газа, действующее на пластину, считается линейно зависящим от прогиба, так как аэродинамическая нелинейность существенно влияет на колебания пластины лишь при очень больших числах Маха (порядка 10) и в трансзвуковом диапазоне скоростей. Безразмерное уравнение движения пластины имеет вид

$$D \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - \left( M_w^2 + K \frac{1}{2L} \int_{-L/2}^{L/2} \left( \frac{\partial w(\xi)}{\partial \xi} \right)^2 d\xi \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + p = 0, \quad (14)$$

$K$  — коэффициент нелинейности (для несмещающихся кромок  $K = 12D$ ).

В **разделе 8.2** приводятся результаты исследования линейной устойчивости, которые используются в разделе 8.4 для вычисления давления.

В **разделе 8.3** методом Бубнова-Галёркина выводится система уравнений (вообще говоря, бесконечная) для амплитуд каждой собственной моды.

В **разделе 8.4** выводится выражение для давления, полученное при следующих предположениях. Считается, что пластина находится в области параметров, где может возникать только одномодовый флаттер (нелинейный флаттер связанного типа детально исследован в литературе). При этом, поскольку собственные частоты пластины в потоке и в пустоте близки, действие потока сводится к аэродинамическому усилению (или демпфированию) колебаний. Система уравнений для амплитуд принимает вид

$$\frac{\partial^2 A_n}{\partial t^2} - 2p_{n2}(\omega) \frac{dA_n(t)}{dt} + \omega_{0n}^2 A_n + K \sum_{m,k,j=1}^{\infty} a_{mk} a_{jn} A_m A_k A_j = 0, \quad (15)$$

$A_n(t)$  — амплитуда  $n$ -й моды,  $n = 1, 2, \dots$ , коэффициенты  $a_{ij}$  — скалярные произведения собственных форм. Влияние потока выражено во втором слагаемом (15). Коэффициент аэродинамического усиления  $p_{n2}(\omega)$  зависит от

характерной частоты колебаний, причём имеется конечный диапазон частот  $\omega_n'' < \omega < \omega_n'$ , где его знак положителен (рис. 18), что соответствует одномодовой неустойчивости в линейном приближении. Значения  $\omega_n'$ ,  $\omega_n''$  различны для разных мод и найдены явном виде как функции параметров задачи и, в частности, числа Маха.

В разделе 8.5 рассматривается случай, когда растущей в линейном приближении является одна (для определённости — первая) мода, остальные — затухают. Эта ситуация имеет место при небольшом углублении в область флаттера. Показано, что если амплитуда колебаний не слишком большая, то в нелинейном приближении  $|A_n| \ll |A_1|$ ,  $n > 1$ , и система (15) сводится к одному уравнению

$$\frac{\partial^2 A_1}{\partial t^2} - 2p_{12}(\omega) \frac{\partial A_1}{\partial t} + \omega_{01}^2 A_1 + K a_{11}^2 A_1^3 = 0 \quad (16)$$

Методом гармонического баланса доказано, что это уравнение имеет единственный предельный цикл. Доказана его устойчивость. Его частота  $\omega = \omega_1'(M)$  обеспечивает  $p_{12} = 0$ , что эквивалентно отсутствию энергообмена между потоком газа и пластиной. Амплитуда колебания выражается через частоту также, как при свободных нелинейных колебаниях пластины в пустоте.

В частном случае шарнирного опирания амплитуда и частота зависят от  $M$  так ( $M = M^* -$  граница флаттера):

$$A = 4L\sqrt{M + M^* - 2} \cdot \sqrt{M - M^*}/(\pi\sqrt{3K}), \quad \omega_1' = (M - 1)(\pi/L)$$

В разделе 8.6 рассмотрен случай, когда растущими в линейном приближении являются две моды, внутренний резонанс отсутствует. Имеются три предельных цикла, в которых колебания происходят только по первой моде, только по второй, или по двум одновременно; частоты колебаний  $\omega_n = \omega_n'$ . Такие предельные циклы названы простыми, в них каждая мода колеблется на той частоте, при которой отсутствует энергообмен между этой модой и потоком газа (так как  $p_{n2}(\omega_n) = 0$ ). Предельный цикл, в котором участвуют обе моды, возникает не сразу после потери устойчивости второй моды, а при бóльших скоростях. Найдены области устойчивости предельных циклов. Обсуждается распространение результатов этого раздела на случай неустойчивости по трём и более модам одновременно.

В разделе 8.7 исследуется случай дробного внутреннего резонанса между собственными модами пластины. В случае чётного резонанса, когда между 1-й и 2-й модами возникает соотношение частот 1:2, при малых  $\mu$  рождается предельный цикл, названный резонансным. Доказана его устойчивость. В отличие от «простых» предельных циклов, в резонансных циклах отсутствует энергообмен между пластиной в целом и потоком газа, но каждая мода по

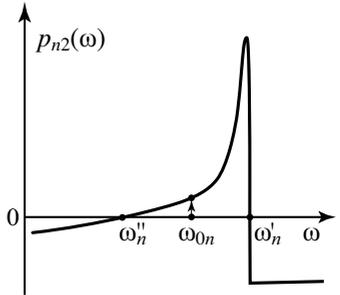


Рис. 18. Качественный вид зависимости  $p_{n2}(\omega)$ .

отдельности может получать или отдавать энергию в поток. А именно, 1-я мода получает энергию из потока, передаёт её второй моде, которая, в свою очередь, передаёт её обратно в поток.

В случае нечётного резонанса 1:3 и малых  $\mu$  доказано существование предельного цикла. Однако, область его существования устроена сложнее, чем при чётном резонансе: при незначительном увеличении скорости он может исчезнуть, затем появиться вновь.

Таким образом, возможно существование одновременно нескольких устойчивых предельных циклов — простых и резонансных. На рис. 19 показаны их амплитуды для заземлённой металлической пластины в потоке воздуха ( $D = 23.9$ ,  $M_w = 0$ ,  $L = 300$ ).

В разделе 8.8 рассматривается трёхмерная задача — нелинейные колебания прямоугольной пластины. При неустойчивости по одной моде результаты раздела 8.5 с незначительными изменениями переносятся на трёхмерный случай. В явном виде получена зависимость амплитуды предельного цикла от параметров задачи.

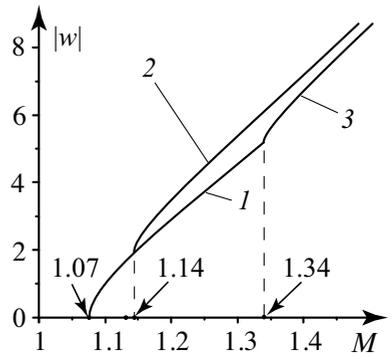


Рис. 19. Амплитуда одночастотного цикла (1), резонансного цикла 1:2 (2), простого двухчастотного цикла (3). Линейные границы флаттера:  $M_1^* = 1.07$ ,  $M_2^* = 1.13$ .

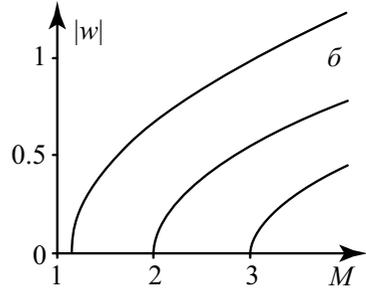
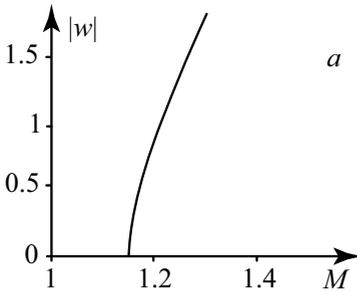


Рис. 20. Амплитуды колебаний стальной прямоугольной пластины в потоке воздуха на уровне моря, отнесённые к толщине. Одномодовый флаттер,  $L_x = 146.67$ ,  $L_y = 500$  (а). Связанный тип флаттера,  $L_x/L_y = 146.67/500$ ,  $M_{cr} = 1.15$ , 2 и 3 (б).

В разделе 8.9 сравниваются амплитуды установившихся флаттерных колебаний при одномодовом флаттере и при флаттере связанного типа. На рис. 20 приведены рассчитанные амплитуды для конкретных пластин. Видно, что рост амплитуды при одномодовом флаттере происходит намного быстрее, чем при связанном: для достижения амплитуды порядка толщины пластины нужно превысить  $M$  за границу флаттера на  $\Delta M \sim 0.1$ , в то время как для связанного типа флаттера — на  $\Delta M \sim 1$ .

В разделе 8.10 приведены основные выводы главы 8.

## Девятая глава

В девятой главе описывается постановка и результаты экспериментальных исследований флаттера. Цель эксперимента — подтверждение возникновения одномодового флаттера упругой пластины в сверхзвуковом потоке газа.

В **разделе 9.1** описана методика проведения эксперимента: конструкция модели, условия испытаний, использованная аппаратура, методика измерений и программа испытаний. На рис. 21 показана схема эксперимента: на стенку сверхзвуковой аэродинамической трубы А-7 НИИ механики МГУ устанавливается модель, включающая стальную прямоугольную пластину  $300 \times 540 \times 1$  мм, приваренную по периметру к раме модели. Пластина подобрана так, что в теоретическом анализе связанный тип флаттера возбуждаться не может, а одномодовый — может. Полость под пластиной перепускными каналами сообщается с областью течения, так что статический перепад давления на ней отсутствует.

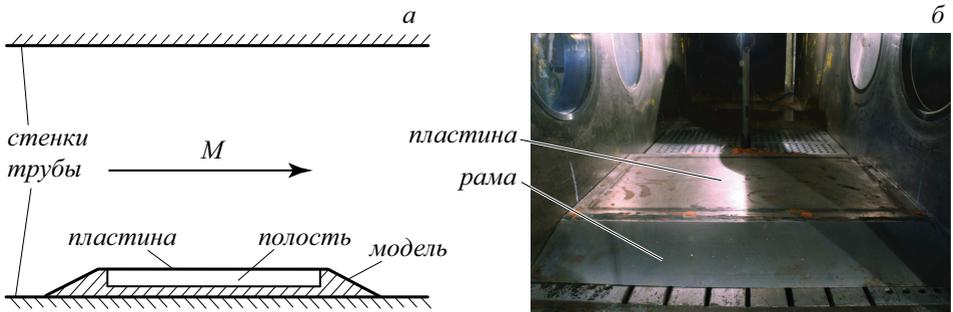


Рис. 21. Расположение модели в аэродинамической трубе, стрелкой показано направление потока воздуха (а). Фотография модели, установленной в трубу (б).

Колебания пластины контролируются 12 тензодатчиками, наклеенными на её поверхности, вибрации трубы — вибродатчиком, установленным на стенке рабочей части, высокочастотные перепады давления в потоке — датчиком пульсаций, установленным в рабочей части вблизи поверхности пластины.

При различных условиях течения в трубе, вообще говоря, возможно возникновение разных типов вибраций пластины — резонансов, вызванных воздействием трубы или потока, случайных вынужденных колебаний, флаттера связанного типа и одномодового флаттера. Для каждого типа вибраций сформулированы основные признаки, по которым его можно отличить при анализе спектральных и амплитудных характеристик измеренных данных.

В **разделе 9.2** приводится методика обработки результатов. Она включает как спектральный анализ и определение типа колебания пластины, так и сравнение с расчётом по теории главы 5.

**Раздел 9.3** посвящён исследованию собственных колебаний пластины. Приводятся результаты экспериментального определения собственных частот и форм, полученных методом ударного воздействия. Численными методами проанализировано влияние факторов, неконтролируемых в эксперименте —

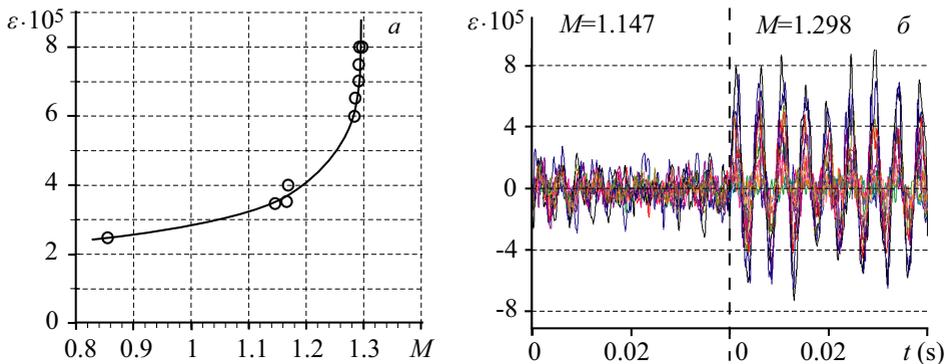


Рис. 22. Амплитуда динамических деформаций пластины как функция числа Маха. Кругами показаны экспериментальные точки, линия — интерполяция полученных значений (а). Процесс колебаний пластины при  $M = 1.147$  (устойчивость) и  $M = 1.298$  (флаттер) (б).

температурных напряжений пластины, воздуха в полости под пластиной (который работает как «аэродинамическая пружина» при симметричных колебательных модах), остаточных напряжений после сварки модели.

В разделе 9.4 приводятся и анализируются данные продувок. Анализом спектральных данных тензодатчиков, датчика вибраций и датчика пульсаций доказано, что в диапазоне  $1.2 < M < 1.3$  возбуждаются одномодовые флаттерные колебания пластины. При этом спектральные составляющие процесса колебаний при флаттере соответствуют собственным модам пластины, являющихся неустойчивыми в теории. На рис. 22 приведена амплитуда вибраций и процесс колебаний при разных числах Маха.

В разделе 9.5 приведены выводы девятой главы.

## Заключение

В заключении подведены итоги работы и её основные результаты.

## 3. Основные результаты и выводы

Исследована устойчивость безграничной пластины, когда со стороны, противоположной обтекаемой, поддерживается постоянное давление. Получен критерий устойчивости и описан его физический смысл. Учёт покоящегося газа приводит к дестабилизации возмущений и неустойчивости системы при любых параметрах. Как предельный случай рассмотрена устойчивость тангенциального разрыва и найдены условия его устойчивости и неустойчивости.

Показано, что флаттер пластины, имеющей форму широкой полосы, может быть одним из двух типов: связанным и одномодовым. Первый является «классическим» флаттером пластины и подробно исследован в литературе в приближении поршневой теории. Второй тип флаттера возникает при более низких скоростях, не описывается с помощью поршневой теории и ранее

практически не исследовался. Выяснены физические механизмы возбуждения обоих типов флаттера, получены критерии устойчивости, найдены частоты, при которых происходит наиболее интенсивный рост колебаний. Рассмотрено влияние внутреннего трения в материале пластины и конструкционного демпфирования на границы флаттера и приведены примеры, когда они не могут подавить одномодовый флаттер.

Исследовано влияние пограничного слоя, образующегося в потоке на поверхности пластины, на границы одномодового флаттера. При обобщённо-выпуклом профиле пограничного слоя он демпфирует колебания и при достаточно большой толщине слоя может их подавить. В то же время, могут возбуждаться моды, устойчивые в однородном потоке. В случае профиля с обобщённой точкой перегиба пограничный слой усиливает растущие колебания при малой толщине, и приводит к затуханию при достаточно большой толщине слоя. Приведены примеры профилей пограничных слоёв, дающих сколько угодно быстрое усиление колебаний упругой пластины, но устойчивых на недеформируемой пластине в невязком приближении (при  $Re \rightarrow \infty$ ).

Для прямоугольной пластины больших размеров получен критерий, позволяющий для каждой формы колебаний пластины определить, является ли она устойчивой по отношению к одномодовому флаттеру. Исследовано искажение колебаний при флаттере по сравнению с собственными колебаниями пластины в вакууме. Сформулирован алгоритм расчёта одномодового флаттера пластины и приведены примеры вычислений.

В двумерной постановке проведено численное исследование устойчивости шарнирно опертой и закреплённой пластин в сверхзвуковом потоке. Построены границы устойчивости и показано, что они состоят из областей одномодовой неустойчивости разных собственных мод и области связанной неустойчивости, при которой происходит взаимодействие 1-й и 2-й моды пластины. Исследовано влияние параметров задачи на границы разных видов флаттера. Построены линии уровня  $\text{Im } \omega = \text{const}$ , которые являются границами устойчивости пластины с учётом конструкционного демпфирования пластины и могут непосредственно использоваться при проектировании летательных аппаратов.

Предложен упрощённый метод расчёта одномодового панельного флаттера, основанный на вычислении работы нестационарных сил давления на заданном собственном колебании пластины. Метод не требует решения связанной задачи аэроупругости и применим к оболочкам произвольной формы.

Исследованы нелинейные колебания пластины при одномодовом флаттере. Растущие колебания приводят к формированию предельного цикла, амплитуда которого найдена в явном виде. При неустойчивости по нескольким модам возникают разные предельные циклы, состоящие из разного количества собственных мод, в том числе циклы с внутренним резонансом. Показано, что при увеличении скорости потока амплитуда при одномодовом флаттере растёт существенно быстрее, чем при связанном.

Проведены экспериментальные исследования процесса колебаний пластины в сверхзвуковой аэродинамической трубе. Впервые зафиксировано возникновение одномодового панельного флаттера.

С точки зрения практических приложений, главная особенность одноименного флаттера — то, что он может возникать при более низких числах Маха и на более коротких пластинах, чем связанный тип флаттера. Типичные методы расчётов, использующиеся в сверхзвуковой аэроупругости, основаны на поршневой теории, которая неадекватно описывают аэродинамику при низких сверхзвуковых скоростях и не позволяет обнаружить и предсказать одноименный флаттер. Результаты настоящей работы могут использоваться при проектировании сверхзвуковых летательных аппаратов, что повысит их безопасность и срок службы.

## Публикации по теме диссертации

Опубликована 41 работа по теме диссертации. Основные результаты изложены в публикациях, приведённых ниже. Все результаты получены автором самостоятельно, кроме главы 9, написанной по материалам работ [9,11-13,15]. В них автору принадлежит постановка и общее руководство экспериментами, проектирование модели, разработка программы испытаний, предварительные численные исследования, обработка и анализ результатов.

1. В. В. Веденеев. Неустойчивость безграничной упругой пластины, обтекаемой потоком газа// Известия РАН. МЖГ. 2004. № 4. С. 19-27.
2. В. В. Веденеев. Флаттер пластины, имеющей форму широкой полосы, в сверхзвуковом потоке газа// Известия РАН. МЖГ. 2005. № 5. С. 155-169.
3. V. V. Vedeneev. Analytical investigation of plate flutter in supersonic gas flow// European conference for aerospace sciences (EUCASS). Moscow, 2005.
4. В. В. Веденеев. О высокочастотном флаттере пластины// Известия РАН. МЖГ. 2006. № 2. С. 163-172.
5. Vasily V. Vedeneev. High-frequency flutter of rectangular plates// 6th European solid mechanics conference (ESMC). Budapest, 2006.
6. В. В. Веденеев. Высокочастотный флаттер прямоугольной пластины// Известия РАН. МЖГ. 2006. № 4. С. 173-181.
7. Vasily V. Vedeneev. Non-linear analysis of high-frequency panel flutter// Euromech Colloquium 483 «Geometrically non-linear vibrations of structures». Porto, 2007.
8. В. В. Веденеев. Нелинейный высокочастотный флаттер пластины// Известия РАН. МЖГ. 2007. № 5. С. 197-208.
9. В. В. Веденеев, С. А. Рыжов. Определение динамических характеристик экспериментальной установки для исследования панельного флаттера и их корреляция с динамическими испытаниями// Труды международной научно-практической конференции «Инженерные системы-2009». М.: РУДН, 2009. С. 90-96.
10. В. В. Веденеев. Численное исследование сверхзвукового флаттера пластины с использованием точной аэродинамической теории// Известия РАН. МЖГ. 2009. № 2. С. 169-178.

11. В. В. Веденеев, С. В. Гувернюк, А. Ф. Зубков, М. Е. Колотников. Экспериментальное наблюдение одномодового панельного флаттера в сверхзвуковом потоке газа// Доклады РАН. 2009. Т. 427. № 6. С. 768-770.
12. Vasily V. Vedeneev, Sergey V. Guvernyuk, and Mikhail E. Kolotnikov. Experimental observation of single mode panel flutter in supersonic gas flow// 7th European solid mechanics conference (ESMC). Lisbon, 2009.
13. В. В. Веденеев, С. В. Гувернюк, А. Ф. Зубков, М. Е. Колотников. Экспериментальное исследование одномодового панельного флаттера в сверхзвуковом потоке газа// Известия РАН. МЖГ. 2010. № 2. С. 161-175.
14. В. В. Веденеев. Исследование одномодового флаттера прямоугольной пластины в случае переменного усиления собственной моды вдоль пластины// Известия РАН. МЖГ. 2010. № 4. С. 163-174.
15. Vasily V. Vedeneev, Sergey V. Guvernyuk, Alexander F. Zubkov, Mikhail E. Kolotnikov. Experimental observation of single mode panel flutter in supersonic gas flow// Journal of fluids and structures. 2010. V. 26 (5). P. 764-779.
16. Аксенов А. А., Веденеев В. В., Кузнецов К. В., Шишаева А. С. Моделирование сверхзвукового флаттера пластины посредством прямого сопряжения программных комплексов Abaqus и FlowVision НРС// Материалы 8-й Международной конференции по неравновесным процессам в соплах и струях (NPNJ'2010). М.: МАИ-Принт, 2010. С. 288-290.
17. Vasily V. Vedeneev. Numerical analysis of single mode panel flutter in a viscous gas flow// Proceedings of the ASME 2010 3rd Joint US-European fluids engineering summer meeting. Montreal, 2010.
18. Vasily Vedeneev. Study of single mode panel flutter at low supersonic speeds// Proceedings of International forum of aeroelasticity and structural dynamics (IFASD). Paris, 2011.
19. Vasily Vedeneev. Flutter of aircraft panels at low supersonic flight speeds// Proceedings of 4th European conference for aerospace sciences (EUCASS). St. Petersburg, 2011.
20. В. В. Веденеев. Флаттер пластины в потоке газа при низких сверхзвуковых скоростях// Вестник Нижегородского университета им. Н. И. Лобачевского. 2011. № 4 (3). С. 680-682.
21. Веденеев В. В., Колотников М. Е., Макаров П. В., Фирсанов В. В. Трёхмерное моделирование флаттера лопаток компрессоров современных ГТД// Вестник СГАУ. 2011. № 3 (27). С. 47-56.
22. В. В. Веденеев. Одномодовый флаттер пластины с учётом пограничного слоя// Известия РАН. МЖГ. 2012 (принято к печати).
23. Vasily V. Vedeneev. Panel flutter at low supersonic speeds// Journal of fluids and structures. 2012 (принято к печати).