МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М. В. ЛОМОНОСОВА
МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

На правах рукописи
УДК 517.986.4, 517.987.4

ДОСОВИЦКИЙ АЛЕКСЕЙ АЛЕКСЕЕВИЧ

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ И ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ГРУППЫ ДИФФЕОМОРФИЗМОВ ОКРУЖНОСТИ

Специальность 01.01.01 — Вещественный, комплексный и функциональный анализ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

МОСКВА
2011

Работа выполнена на кафедре математического анализа
механико-математического факультета Московского
государственного университета имени М. В. Ломоносова

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук, профессор Шавгулидзе Евгений Тенгизович
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, профессор Смолянов Олег Георгиевич; кандидат физико-математических наук Телятников Илья Вячеславович
Ведущая организация:	Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана

Защита диссертации состоится 16 марта 2012 г. в 16 ч. 40 мин. на заседании диссертационного совета Д 501.001.85 при Московском государственном университете имени М. В. Ломоносова по адресу: Российская Федерация, 119991, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, Главное здание МГУ им. М. В. Ломоносова, механико-математический факультет, аудитория 16-24.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке механико-математического факультета МГУ (Главное здание, 14 этаж)

Автореферат разослан 15 февраля 2012 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета Д 501.001.85 при МГУ
доктор физико-математических наук,
профессор В. Н. Сорокин

Общая характеристика работы

Актуальность темы

Целью работы является исследование двух областей, связанных с интегрированием в бесконечномерных пространствах. Это, во-первых, изучение мер на множествах кусочно-гладких гомеоморфизмов отрезка и окружности и связанных с ними представлений, соответственно, групп диффеоморфизмов отрезка и окружности, и, во-вторых, математическое обоснование диаграммной техники Фейнмана в гильбертовых пространствах и в суперпространствах.

Исследования мер, квазиинвариантных относительно действия групп диффеоморфизмов многообразий, и связанных с ними представлений, начались в начале 1970-х годов в работах Р. С. Исмагилова[1,2]. В первой из этих статей вводится мера на пространстве сходящихся последовательностей на окружности, доказывается ее квазиинвариантность относительно действия группы диффеоморфизмов окружности, а также неприводимость и унитарность соответствующих представлений; во второй близкие построения проводятся для компактного многообразия. В статье того же автора[3] вводится пуассоновская мера на пространстве конфигураций (локально конечных множеств) в $\mathbb{R}^n$ и с ее помощью исследуются представления группы финитных (тождественных вне компакта) диффеоморфизмов.

Другими методами меры (в том числе пуассоновские) на пространстве конфигураций на некомпактном многообразии и связанные с ними представления изучаются в статье А. М. Вершика, И. М. Гельфанда, М. И. Граева[4]. Различным способам построения представлений группы диффеоморфизмов окружности посвящены статьи Ю. А. Неретина[5,6] (представления со старшим весом) и отчасти — обширная работа[7] того же автора.

Мера, квазиинвариантная относительно действия группы диффеоморфизмов окружности и заданная не на пространстве последовательностей, а на

[1] Р. С. Исмагилов, "Об унитарных представлениях группы диффеоморфизмов окружности", Функциональный анализ и его приложения, **5**, N. 3, 1971, с. 45–53.

[2] Р. С. Исмагилов, "Об унитарных представлениях группы диффеоморфизмов компактного многообразия", Известия Академии Наук СССР, Серия математическая, **36**, 1972, с. 180–208.

[3] Р. С. Исмагилов, "Об унитарных представлениях группы диффеоморфизмов пространства $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$", Математический сборник, **98(140)**, N. 1(9), 1975, с. 55–71.

[4] А. М. Вершик, И. М. Гельфанд, М. И. Граев, "Представления группы диффеоморфизмов", Успехи математических наук, **30**, N. 6, 1975, с. 3–50.

[5] Ю. А. Неретин, "Дополнительная серия представлений группы диффеоморфизмов окружности", Успехи математических наук, **37**, N. 2(224), 1982, с. 213-–214.

[6] Ю. А. Неретин, "Унитарные представления со старшим весом группы диффеоморфизмов окружности", Функциональный анализ и его приложения, **17**, N. 3, 1983, с. 85-–86.

[7] Ю. А. Неретин, "Представления алгебры Вирасоро и аффинных алгебр", Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. М.: ВИНИТИ, **22**, 1988, с. 163-224.

пространстве непрерывных функций на окружности, построена в работе Е. Т. Шавгулидзе[8]. Тем же автором[9] другими методами построены квазиинвариантные меры на группах диффеоморфизмов многообразий, в том числе окружности. Позже в работах Е. Т. Шавгулидзе[10,11] развит новый подход к построению меры: вводится оператор A, задающий взаимно-однозначное соответствие между группой C^1-диффеоморфизмов окружности и множеством непрерывных функций на отрезке, равных нулю в концах отрезка, и доказывается квазиинвариантность образа меры Винера при этом отображении. Та же тематика изучается в работах П. Малявена и М. П. Малявен[12]. В статье А. В. Косяка[13] рассматривается серия представлений группы диффеоморфизмов окружности, построенных с помощью мер типа Шавгулидзе, доказывается их неприводимость и неэквивалентность. В работе П. А. Кузьмина[14] доказывается квазиинвариантность мер Шавгулидзе относительно более широкого класса диффеоморфизмов, чем это сделано в оригинальных работах. В настоящей диссертации развивается подход Е. Т. Шавгулидзе к построению квазиинвариантных мер и представлений групп диффеоморфизмов.

Во второй половине двадцатого века в квантовой механике и, в частности, в квантовой теории поля, широкое распространение получило континуальное интегрирование, в том числе — интеграл Фейнмана. Этот подход к квантовой механике был предложен Р. Фейнманом в его знаменитой статье[15], но без соответствующего математического обоснования. В дальнейшем теория интеграла Фейнмана получила развитие в работах С. Альбеверио, Ф. А. Березина, Х. фон Вайцзеккера, Э. Виттена, И. М. Гельфанда, Р. Камерона, В. П. Маслова, Э. Нельсона, Б. Саймона, О. Г. Смолянова, А. В. Угланова, А. Трумена, Р. Хег-Крона, А. Хибса, А. Ю. Хренникова, А. М. Чеботарева, Е. Т. Шавгулидзе, П. Экснера, А. М. Яглома и многих других. Существует несколько определений интеграла Фейнмана: восходящее к самому Фейнману

[8]Е. Т. Шавгулидзе, "Один пример меры, квазиинвариантной относительно действия группы диффеоморфизмов окружности", Функциональный анализ и его приложения, **12**, N. 3, 1978, с. 55-60.

[9]Е. Т. Шавгулидзе, "Об одной мере, квазиинвариантной относительно действия группы дифеоморфизмов конечномерного многообразия", Доклады Академии Наук СССР, **303**, N4, 1988, с. 811-814.

[10]Е. Т. Шавгулидзе, "Распределения на бесконечномерных пространствах и вторичное квантование в струнных теориях", V международная Вильнюсская конференция по теории вероятносткй и математической статистике. Июнь 1989: тезисы кратких сообщений. Вильнюс, 1990. с. 359-360.

[11]Е. Т. Шавгулидзе, "Квазиинвариантные меры на группах диффеоморфизмов", Труды МИАН им. Стеклова, **217**, 1997, с. 189–208.

[12]M. P. Malliavin, P. Malliavin, "Integration on loop groups. I. Quasi invariant measures", Journal of Functional Analysis, **93**, N1, 1990, pp. 207-237.

[13]A. V. Kosyak, "Irreducible Regular Gaussian Representations of the Groups of the Interval and Circle Diffeomorphisms", Journal of Functional Analysis, **125**, 1994, pp. 493–547.

[14]P. A. Kuzmin, "On circle diffeomorphisms with discontinuous derivatives and quasi-invariance subgroups of Malliavin-Shavgulidze measures", Journal of Mathematical Analysis and Applications, **330**, 2007, pp. 744–750.

[15]R. P. Feynman, "Space-time approach to non-relativistic quantum mechanics", Reviews of Modern Physics, 1948, **20**, №2, pp. 367-387.

определение через предел конечнократных интегралов; предложенное Р. Камероном определение через аналитическое продолжение интегралов по гауссовским мерам в комплексную плоскость; разработанное в статьях и книгах В. П. Маслова[16], С. Альбеверио и Р. Хег-Крона[17], А. М. Чеботарева определение интеграла через равенство Парсеваля. Хотя бы факт наличия такого количества определений, связи между которыми не вполне ясны, говорит о том, что теория интеграла Фейнмана далека от завершения. По-видимому, наиболее систематическое и строгое изложение математических результатов, связанных с интегралами Фейнмана, содержится в книге О. Г. Смолянова и Е. Т. Шавгулидзе[18].

Суть диаграммной техники состоит в том, чтобы наглядным образом графически представлять сложные интегралы (обычно по бесконечномерным пространствам, часто — интегралы Фейнмана), возникающие при использовании теории возмущений в физических вычислениях. Впервые подобный метод был предложен в 1930х гг. Э. Штюкельбергом при построении ковариантной теории возмущений для квантовой теории поля. Но широкое распространение и признание диаграммная техника получила после работы Р. Фейнмана[19], где она была применена для вычислений в области квантовой электродинамики. К настоящему времени диаграммный метод — стандартный инструмент для различных физических вычислений, описанный в множестве стандартных текстов по квантовой теории поля. Тем не менее, в большинстве случаев использование диаграмм Фейнмана не сопровождается удовлетворительным с математической точки зрения обоснованием.

Имеются, однако, и работы о диаграммах Фейнмана, выполненные на математическом уровне строгости. В книге О. И. Завьялова[20] детально рассмотрены различные подходы к перенормировкам диаграмм Фейнмана. В работе А. Конна и Д. Креймера[21] для рассмотрения структуры диаграмм применяется аппарат алгебр Хопфа, та же тема развивается в работах К. Эбрагими-Фарда и Д. Креймера, а также К. Брудера с соавторами. В книге Д. Креймера[22] изучается связь между диграммной техникой и теорией узлов. В работе С. Х. Джаха, Г. Готтшалка и Х. Эрдиана[23] диаграммная техника применяется

[16] В. П. Маслов, "Комплексные цепи Маркова и интеграл Фейнмана для нелинейных систем", М.: Наука, 1976.

[17] S. Albeverio, R. Hoegh-Krohn, "Mathematical theory of Feynman path integrals", Lecture notes in math, Berlin: Springer, 1976.

[18] О. Г. Смолянов, Е. Т. Шавгулидзе,"Континуальные интегралы", М.: Изд-во МГУ, 1990.

[19] R. P. Feynman, "Space-Time Approach to Quantum Electrodynamics", Physical Review, 1949, **76**, pp. 769–789.

[20] О. И. Завьялов, "Перенормированные диаграммы Фейнмана", М.: Наука, 1979.

[21] A. Connes, D. Kreimer, "Renormalization in quantum field theory and the Riemann-Hilbert problem I:the Hopf algebra structure of graphs and the main theorem", Communications in Mathematical Physics, 2000, **210**, №1, pp. 249-273.

[22] D. Kreimer, "Knots and Feynman diagrams", Cambridge: University Press, 2000.

[23] S. H. Djah, H. Gottschalk, H. Ouerdiane, "Feynman graph representation of the perturbation series for general functional

для вычисления интегралов по функциональным мерам типа Леви.

В физической литературе[24] известна так называемая linked-cluster theorem, утверждающая, что при вычислении диаграммным методом логарифма от некоторого интеграла можно ограничиться суммированием лишь по связным диаграммам среди всех соответствующих этому интегралу. Этот факт носит комбинаторный характер и доказательство его не слишком сложно, но на достаточно формальном уровне, особенно в случае интегрирования по антикоммутирующим переменным (о которых сказано ниже), он не доказывался.

В физических теориях изучаются как бозонные (коммутирующие), так и фермионные (антикоммутирующие) поля. Последним естественным образом соответствуют интегралы по антикоммутирующим (в частности, грассмановым) переменным. Теория, изучающая функции антикоммутирующих переменных, получила название "суперанализ". Впервые попытки построить такую теорию на математическом уровне строгости предпринимаются в начале 1960-х годов. Первыми работами в этой области принято считать статьи Дж. Л. Мартина. В дальнейшем предложенный Дж. Л. Мартином подход развивался в работах Ф. А. Березина[25], Д. А. Лейтеса[26] и других авторов. Сейчас это направление называют алгебраическим суперанализом. Другой взгляд на антикоммутирующие переменные основан на понятии суперпространства, введенном в работах А. Салама и Дж. Стратди[27]. Такой подход получил развитие в работах Б. Де Витта[28], А. Роджерс[29], В. С. Владимирова и И. В. Воловича[30,31], О. Г. Смолянова и Е. Т. Шавгулидзе[32,33], А. Ю. Хренникова[34] и других. Это направление носит название функциональный суперанализ. Именно этот подход используется в диссертации при вычислении интегралов по антикоммутирующим переменным.

Все сказанное определяет актуальность темы диссертации.

measures", Journal of Functional Analysis, 2005, **227**, №1, pp. 153-187.

[24]R. D. Mattuck, "A Guide to Feynman Diagrams in the Many-Body Problem", McGraw-Hill, New York, 1967.

[25]Ф. А. Березин, "Введение в алгебру и анализ с антикоммутирующими переменными", М.: Изд-во МГУ, 1983.

[26]Д. А. Лейтес, "Теория супермногообразий", Петрозаводск: АН СССР, Карельский филиал, 1983.

[27]A. Salam, J. Strathdee, "Feynman rules for superfields", Nuclear Physics B, 1975, **86**, №1, p. 142-152.

[28]B. S. De Witt, "Supermanifolds", Cambrige: U.P., 1984.

[29]A. Rogers, "Fermionic path integration and Grassmann Brownian motion", Communications in Mathematical Physics, 1980, **113**, №3, pp. 353-368.

[30]В. С. Владимиров, И. В. Волович, "Суперанализ. I. Дифференциальное исчисление", ТМФ, 1984, **59**, №1, с. 3-27.

[31]В. С. Владимиров, И. В. Волович, "Суперанализ. II. Интегральное исчисление", ТМФ, 1984, **60**, №2, с. 169-199.

[32]О. Г. Смолянов, Е. Т. Шавгулидзе, "Преобразование Фурье и псевдодифференциальные операторы в суперанализе", Доклады РАН, 1989, **299**, №4, с. 816-820.

[33]О. Г. Смолянов, Е. Т. Шавгулидзе, "Представление решений линейных эволюционных супердифференциальных уравнений второго порядка континуальными интегралами", Доклады РАН, 1989, **309**, №3, с. 545-549.

[34]А. Ю. Хренников, "Функциональный суперанализ", Успехи математических наук, 1988, **43**, №2(260), с. 87-144.

Цель работы

Заключается, во-первых, в построении новой серии мер, квазиинвариантных относительно действия групп диффеоморфизмов окружности и отрезка и изучении регулярных представлений этих групп, построенных в пространствах функций, квадратично интегрируемых по этим мерам; во-вторых — в строгом математическом обосновании диаграммного метода вычисления интегралов по фейнмановским мерам в гильбертовых пространствах и по гауссовским супермерам в суперпространствах.

Научная новизна

Основные результаты диссертации являются новыми и заключаются в следующем:

1. Построены две серии мер: на множествах кусочно-гладких гомеоморфизмов окружности и отрезка. Доказана квазиинвариантность построенных мер относительно действия C^3-диффеоморфизмов, соответственно, окружности и отрезка, причем приведена явная формула для плотности преобразованной меры относительно исходной.

2. Доказана квазиинвариантность построенных мер относительно более широкого класса диффеоморфизмов, а именно, C^1-диффеоморфизмов окружности и отрезка с ограниченной борелевской второй производной.

3. В пространствах функций, квадратично интегрируемых по построенным мерам, введены регулярные представления групп C^3-диффеоморфизмов, соответственно, окружности и отрезка. Доказана неприводимость и попарная неэквивалентность построенных представлений.

4. Обоснован метод диаграмм Фейнмана вычисления интегралов в двух следующих случаях: интегралы по гауссовским супермерам в суперпространствах и интегралы по фейнмановским мерам в гильбертовых пространствах.

5. Для диаграммного метода вычисления интегралов от экспонент от полиномов в обоих приведенных случаях доказано, что при переходе от интеграла к его натуральному логарифму перебор диаграмм ограничивается лишь связными диаграммами.

Основные методы исследования

В работе используются методы математического анализа, бесконечномерного анализа, теории случайных процессов.

Теоретическая и практическая ценность работы

Диссертация носит теоретический характер. Её результаты, касающиеся представлений группы диффеоморфизмов окружности, могут быть использованы в струнных теориях; результаты, относящиеся к диаграммам Фейнмана, — для вычисления интегралов, возникающих в квантовой теории поля.

Апробация работы

Результаты диссертации докладывались на следующих научно-исследовательских семинарах и конференциях:

- Семинар механико-математического факультета МГУ "Бесконечномерный анализ и математическая физика" под руководством д.ф.-м.н. проф. О. Г. Смолянова и д.ф.-м.н. проф. Е. Т. Шавгулидзе (2007-2011 гг.)
- XV Международная конференция студентов, аспирантов и молодых учёных «Ломоносов» (2008 г.)
- XVII Международная конференция студентов, аспирантов и молодых учёных «Ломоносов» (2010 г.)
- XVIII Международная конференция студентов, аспирантов и молодых учёных «Ломоносов» (2011 г.)

Публикации

Основные результаты диссертации опубликованы в трех работах автора, список которых приведен в конце автореферата. Работ, написанных в соавторстве, нет. Все 3 публикации в изданиях, удовлетворяющих требованиям ВАК.

Структура и объем диссертации

Диссертация состоит из введения, 3 глав, заключения и списка литературы. Объем диссертации — 107 страниц, библиография включает 74 наименования. Диссератция содержит 4 иллюстрации.

Краткое содержание работы

Во **введении** приводится обзор ранее полученных результатов, близких к теме диссертации, и кратко формулируются основные положения диссертации. Это обосновывает актуальность диссертационной работы и научную новизну исследований.

Скажем кратко о содержании глав.

В первой главе строятся серии мер на множествах кусочно-гладких гомеоморфизмов отрезка и окружности и доказывается их квазиинвариантность относительно действия групп диффеоморфизмов, соответственно, отрезка и окружности.

Во второй главе с использованием этих мер строятся серии неприводимых неэквивалентных унитарных представлений групп диффеоморфизмов окружности и отрезка.

В третьей главе описывается диаграммная техника для интегралов по гауссовским супермерам Смолянова–Шавгулидзе в суперпространствах Владимирова–Воловича и для интегралов Фейнмана в гильбертовых пространствах.

Теперь изложим содержание глав подробнее.

Глава 1

В первой главе строятся серии мер на множествах кусочно-гладких гомеоморфизмов отрезка и окружности и доказывается их квазиинвариантность относительно действия групп диффеоморфизмов, соответственно, отрезка и окружности.

Ключевую роль в построении мер играет оператор A, введенный в статье Е. Т. Шавгулидзе[11], устанавливающий биекцию между множеством кусочно-гладких гомеоморфизмов отрезка и множеством кусочно-непрерывных функций на отрезке. А именно, обозначим $\mathrm{PDiff}^1_+([0,1]) = \{f : [0,1] \to [0,1];\ f(0) = 0,\ f(1) = 1;\ f \in \mathrm{C}([0,1]),\ \exists\, f^{-1} \in \mathrm{C}([0,1]); \exists\, r,\ \exists\, \tau_0 = 0 < \tau_1 < \ldots < \tau_r < 1 = \tau_{r+1} :\ f \in \mathrm{C}^1([0,1]\backslash\{\tau_j\}_{j=1}^r),\ f^{-1} \in \mathrm{C}^1([0,1]\backslash\{f(\tau_j)\}_{j=1}^r);\ f'(\tau_j \pm 0) < \infty,\ (f^{-1})'(\tau_j \pm 0) < \infty,\ j = 1, \ldots, r\}$ — множество сохраняющих ориентацию кусочно-C^1-гладких гомеоморфизмов отрезка $[0,1]$ и $\mathrm{PC}_0([0,1]) = \{x : [0,1] \to \mathbb{R};\ x(0) = 0; \exists\, r,\ \exists\, \tau_0 = 0 < \tau_1 < \ldots < \tau_r < 1 = \tau_{r+1} :\ x \in \mathrm{C}([0,1]\backslash\{\tau_j\}_{j=1}^r);\ x(\tau_j - 0) = x(\tau_j),\ x(\tau_j + 0) < \infty,\ j = 1, \ldots, r\}$ — множество кусочно-непрерывных функций на отрезке $[0,1]$, непрерывных слева. Зададим отображение $A\colon \mathrm{PC}_0([0,1]) \to \mathrm{PDiff}^1_+([0,1])$ следующей формулой:

$$(Ax)(t) = \frac{\int\limits_0^t e^{x(\tau)}d\tau}{\int\limits_0^1 e^{x(\tau)}d\tau}. \tag{1}$$

Прямая проверка показывает, что формула

$$(A^{-1}f)(t) = \ln f'(t) - \ln f'(0)$$

задает обратное отображение. Следовательно, A устанавливает взаимно-однозначное соответствие между $\mathrm{PC}_0([0,1])$ и $\mathrm{PDiff}^1_+([0,1])$.

Меры строятся на специальных подмножествах множества $\mathrm{PDiff}^1_+([0,1])$. Каждое такое подмножество задается натуральным числом r и наборами вещественных чисел $\{0 < t_1 < \ldots < t_r < 1\}$ и $\{\mathfrak{l}_1, \ldots, \mathfrak{l}_r\}$ и представляет из себя множество функций $f \in \mathrm{PDiff}^1_+([0,1])$, имеющих изломы в точках t_j, причем $\frac{f'(t_j+0)}{f'(t_j-0)} = e^{\mathfrak{l}_j}$. Обозначим его через $F(t_1, \ldots, t_r, \mathfrak{l}_1, \ldots, \mathfrak{l}_r)$. Снабдим F метрикой

$$r_F(f_1, f_2) = \sup_{t\in[0,1]\setminus\{t_j\}_{j=1}^r} |f_1'(t) - f_2'(t)|$$

и соответствующей топологией.

Опишем прообраз F относительно отображения A. Введем в пространстве $\mathrm{PC}_0([0,1])$ оператор B сдвига на ступенчатую функцию с скачками $\mathfrak{l}_j$ в точках t_j:

$$B = B_{t_1,\ldots,t_r,\mathfrak{l}_1,\ldots,\mathfrak{l}_r}\colon \mathrm{PC}_0([0,1]) \to \mathrm{PC}_0([0,1])\colon\ x(t) \mapsto x(t) + \sum_{j=1}^r \mathfrak{l}_j\theta(t - t_j), \tag{2}$$

$$\text{где} \qquad \theta(t) = \begin{cases} 1,\ t > 0, \\ 0,\ t \leqslant 0 \end{cases} \qquad \text{— функция Хевисайда.}$$

Положим $X = X(t_1, \ldots, t_r, \mathfrak{l}_1, \ldots, \mathfrak{l}_r) = B_{t_1,\ldots,t_r,\mathfrak{l}_1,\ldots,\mathfrak{l}_r}(\mathrm{C}_0([0,1]))$, где $\mathrm{C}_0([0,1]) = \{c \in \mathrm{C}([0,1]) :\ c(0) = 0\}$ и снабдим $X \ni x, y$ метрикой

$$r_X(x, y) = \sup_{t\in[0,1]\setminus\{t_j\}_{j=1}^r} |x(t) - y(t)|.$$

Несложно понять, что $F = F(t_1, \ldots, t_r, \mathfrak{l}_1, \ldots, \mathfrak{l}_r) = AX(t_1, \ldots, t_r, \mathfrak{l}_1, \ldots, \mathfrak{l}_r)$ — образ X при отображении A, и, более того, A — гомеоморфизм X в F.

Теперь можно задать на множестве F меру. Пусть W_σ — мера Винера с дисперсией σ в $\mathrm{C}_0([0,1])$. Борелевскую меру μ_σ определим как образ при отображении AB меры W_σ, т.е. $\mu_\sigma(U) = W_\sigma((AB)^{-1}U)$ для любого борелевского множества $U \subset F$.

Для натурального k положим $\mathrm{Diff}^k_+([0,1]) = \{g : [0,1] \to [0,1],\, g(0) = 0,\, g(1) = 1,\, g \in \mathrm{C}^k([0,1]),\, \exists\, g^{-1} \in \mathrm{C}^k([0,1])\}$ — группа сохраняющих ориентацию C^k-диффеоморфизмов отрезка $[0,1]$. Для любого k эта группа действует на F композицией: если $g \in \mathrm{Diff}^k_+([0,1])$, $f \in F$, то $(L_g f)(t) = g(f(t))$. Тот факт, что L_g не выводит за границы F, т.е. $\forall\, f \in F:\ L_g f \in F$, проверяется непосредственно. Следующие теоремы показывают, как преобразуется мера μ_σ при этом действии.

Теорема 1. *Мера μ_σ квазиинвариантна относительно действия группы $\mathrm{Diff}^3_+([0,1])$, т.е. для любого борелевского множества $U \subset F$ и любого $g \in \mathrm{Diff}^3_+([0,1])$ выполняется*

$$\mu_\sigma(L_g U) = \int\limits_U \rho_{\sigma,g}(f)\mu_\sigma(df),$$

причем плотность $\rho_{\sigma,g}$ дается формулой

$$\rho_{\sigma,g}(f) = \frac{1}{\sqrt{g'(0)g'(1)}}\, e^{\frac{1}{\sigma^2}\left(\frac{g''(0)}{g'(0)}f'(0) - \frac{g''(1)}{g'(1)}f'(1) + \sum\limits_{j=1}^{r} \frac{g''(f(t_j))}{g'(f(t_j))}(f'(t_j+0) - f'(t_j-0)) + \int\limits_0^1 S_g(f(t))(f'(t))^2 dt\right)},$$

где $S_g(s) = \frac{g'''(s)}{g'(s)} - \frac{3}{2}\left(\frac{g''(s)}{g'(s)}\right)^2$ — шварциан функции g.

Меры μ_σ квазиинвариантны и относительно действия более широкого класса диффеоморфизмов. Однако явно выписать формулу для плотности в этом случае уже не удается.

Теорема 2. *Пусть $g \in \mathrm{Diff}^1_+([0,1])$ и g'' — ограниченная борелевская функция. Тогда мера μ_σ квазиинвариантна относительно действия L_g. Кроме того, если последовательность диффеоморфизмов $g_n \in \mathrm{Diff}^4_+([0,1])$ такова, что $\{g''_n\}$ ограничены в совокупности и сходятся к g'' п.в. на $[0,1]$, то $\lim\limits_{n\to\infty} \rho_{\sigma,g_n} = \rho_{\sigma,g}$ по мере.*

Для случая мер, квазиинвариантных относительно действия группы диффеоморфизмов окружности, построения в основном повторяют приведенные только что. Обозначим через $F_0(t_1, \ldots, t_r, \mathfrak{l}_1, \ldots, \mathfrak{l}_r)$ множество функций $f \in F(t_1, \ldots, t_r, \mathfrak{l}_1, \ldots, \mathfrak{l}_r)$ с дополнительным условием $\frac{f'(1)}{f'(0)} = e^{\sum\limits_{i=1}^{r} \mathfrak{l}_i}$.

Легко понять, что

$$F_0 = AX_0, \text{ где } X_0 = X_0(t_1, \ldots, t_r, \mathfrak{l}_1, \ldots, \mathfrak{l}_r) = B_{t_1,\ldots,t_r,\mathfrak{l}_1,\ldots,\mathfrak{l}_r}(\mathrm{C}_{00}([0,1])),$$

а $\mathrm{C}_{00}([0,1]) = \{c \in \mathrm{C}([0,1]) : c(0) = c(1) = 0\}$. На $\mathrm{C}_{00}([0,1])$ задан броуновский мост (условная мера Винера) W_σ^0. Определим борелевскую меру μ_σ^0 как образ при отображении AB меры W_σ^0, т.е. $\mu_\sigma^0(U) = W_\sigma^0((AB)^{-1}U)$ для любого борелевского множества $U \subset F_0$.

Обозначим через $\mathrm{Diff}_{+,0}^k([0,1])$ множество диффеоморфизмов $g \in \mathrm{Diff}_+^k([0,1])$ таких, что $g^{(i)}(0) = g^{(i)}(1)$, $i = 1, \ldots, k$. Такие диффеоморфизмы естественно интерпретировать как диффеоморфизмы окружности, оставляющие на месте одну фиксированную точку (ноль). Несложно понять, что $\mathrm{Diff}_{+,0}^k([0,1])$ действует композицией на F_0. Мера μ_σ^0 преобразуется при этом действии следующим образом:

Теорема 3. *Мера μ_σ^0 квазиинвариантна относительно действия группы $\mathrm{Diff}_{+,0}^3([0,1])$, т.е. для любого борелевского множества $U \subset F_0$ и любого $g \in \mathrm{Diff}_{+,0}^3([0,1])$ выполняется*

$$\mu_\sigma^0(L_g U) = \int_U \rho_{\sigma,g}^0(f)\mu_\sigma^0(df),$$

причем плотность $\rho_{\sigma,g}^0$ дается формулой

$$\rho_{\sigma,g}^0(f) = \frac{1}{g'(0)}\, e^{\frac{1}{\sigma^2}\left(\frac{g''(0)}{g'(0)}(f'(0)-f'(1)) + \sum\limits_{j=1}^{r} \frac{g''(f(t_j))}{g'(f(t_j))}(f'(t_j+0)-f'(t_j-0)) + \int\limits_0^1 S_g(f(t))(f'(t))^2 dt\right)}.$$

Теорема 4. *Пусть $g \in \mathrm{Diff}_{+,0}^1([0,1])$ и g'' — ограниченная борелевская функция. Тогда мера μ_σ^0 квазиинвариантна относительно действия L_g. Кроме того, если последовательность диффеоморфизмов $g_n \in \mathrm{Diff}_{+,0}^4([0,1])$ такова, что $\{g_n''\}$ ограничены в совокупности и сходятся к g'' п.в. на $[0,1]$, то $\lim\limits_{n\to\infty} \rho_{\sigma,g_n}^0 = \rho_{\sigma,g}^0$ по мере.*

Далее в диссертации проводятся доказательства сформулированных теорем, при этом технически сложные моменты вынесены в отдельные леммы.

Глава 2

Во второй главе с использованием результатов главы 1 о мерах, квазиинвариантных относительно действия групп диффеоморфизмов, строятся серии неприводимых неэквивалентных унитарных представлений групп диффеоморфизмов окружности и отрезка.

Пусть $F_0(t_1, \ldots, t_r, \mathfrak{l}_1, \ldots, \mathfrak{l}_r)$ определено как в главе 1; $\lambda \in \mathbb{R}$, $\sigma \in \mathbb{R}_+$. Зададим представление $U^{\lambda,\sigma}$ группы $\mathrm{Diff}^3_{+,0}([0,1])$ в пространстве $\mathrm{L}_2(F_0, \mu^0_\sigma) \ni \Phi$ квадратично интегрируемых по мере μ^0_σ комплекснозначных функций следующей формулой:

$$(U_g^{\lambda,\sigma}\Phi)(y) = (\rho^0_{\sigma,g^{-1}}(y))^{\frac{1}{2}+\lambda\imath}\Phi(g^{-1}\circ y),$$

где $\imath$ — мнимая единица. Следующие утверждения описывают основные свойства этих представлений:

Предложение 4. *Представления $U^{\lambda,\sigma}$ унитарны и непрерывны.*

Теорема 5. *Представления $U^{\lambda,\sigma}$ неприводимы.*

Теорема 6. *Пусть $U_1^{\lambda_1,\sigma_1}$ и $U_2^{\lambda_2,\sigma_2}$ — построенные выше представления группы $\mathrm{Diff}^3_{+,0}([0,1])$ в пространствах $\mathrm{L}_2(F_0(t^1_1, \ldots, t^1_{r_1}, \mathfrak{l}^1_1, \ldots, \mathfrak{l}^1_{r_1}), \mu^0_{\sigma_1})$ и $\mathrm{L}_2(F_0(t^2_1, \ldots, t^2_{r_2}, \mathfrak{l}^2_1, \ldots, \mathfrak{l}^2_{r_2}), \mu^0_{\sigma_2})$ соответственно, причем $\mathfrak{l}^i_j \neq 0$, $i = 1, 2$, $j = 1, \ldots, r_i$. Эти представления эквивалентны тогда и только тогда, когда выполняются следующие равенства:*

$$r_1 = r_2; \quad t^1_j = t^2_j,\ \mathfrak{l}^1_j = \mathfrak{l}^2_j,\ j = 1, \ldots, r_1; \quad \lambda_1 = \lambda_2,\ \sigma_1 = \sigma_2. \tag{3}$$

Представления группы $\mathrm{Diff}^3_{+}([0,1])$ строятся совершенно аналогичным образом в пространстве $\mathrm{L}_2(F, \mu_\sigma)$, $F = F(t_1, \ldots, t_r, \mathfrak{l}_1, \ldots, \mathfrak{l}_r)$. Для них имеют место все сформулированные выше утверждения, причем доказательства совпадают практически дословно, с точностью до замены некоторых обозначений. Поэтому далее в диссертации доказываются лишь теоремы о свойствах представлений группы $\mathrm{Diff}^3_{+,0}([0,1])$. Снова технически сложные вычисления выносятся в отдельные леммы.

Глава 3

Третья глава состоит из двух разделов: в первом описывается диаграммная техника для интегралов по гауссовским супермерам Смолянова–Шавгулидзе в суперпространствах Владимирова–Воловича, во втором — для интегралов Фейнмана в гильбертовых пространствах. В каждом из разделов вначале даны предварительные сведения, затем описан формализм диаграммной техники, и наконец сформулированы и доказаны основные теоремы о переходе к суммированию по связным диаграммам.

Скажем подробнее о первом разделе. Вначале приводятся необходимые определения и утверждения из теории суперпространств[30,31], в частности — гауссовских супермер[32,33].

Суперaлгеброй называется $\mathbb{Z}_2$-градуированная алгебра $\Lambda = \Lambda_0 \oplus \Lambda_1$ с единицей $e \in \Lambda_0$ и четной операцией умножения, т.е. $p\,(ab) \equiv p\,(a) + p\,(b) (mod\, 2)$ для любых однородных a и b (однородными называются элементы из Λ_0 или Λ_1; функция четности $p(a)$ определена для однородных элементов и принимает значение 0, если $a \in \Lambda_0$ и значение 1, если $a \in \Lambda_1$). Супералгебра называется коммутативной, если суперкоммутатор любых двух элементов равен нулю, т.е.

$$[a, b\,] = ab - (-1)^{p\,(a) p\,(b)} ba = 0.$$

Наконец, супералгебра называется банаховой, если она является банаховым пространством с нормой $||\cdot||$, удовлетворяющей условиям

$$||\,fg\,|| \leqslant ||\,f\,||\,||\,g\,||, \quad f, g \in \Lambda; \qquad ||\,e\,|| = 1,$$

причем Λ_0 и Λ_1 — замкнутые подпространства Λ.

Суперпространством размерности (n, m) над коммутативной банаховой супералгеброй Λ называется банахово пространство

$$\mathbb{R}^{n,m}_{\Lambda} = \underbrace{\Lambda_0 \times \ldots \times \Lambda_0}_{n} \times \underbrace{\Lambda_1 \times \ldots \times \Lambda_1}_{m} = \Lambda_0^n \times \Lambda_1^m$$

с нормой

$$||\,z\,||^2 = ||\,x\,||^2 + ||\,\theta\,||^2 = \sum_{i=1}^{n} ||\,x^i\,||^2 + \sum_{j=1}^{m} ||\,\theta^j\,||^2 = \sum_{k=1}^{n+m} ||\,z^k\,||^2,$$

причем здесь и далее для $z \in \mathbb{R}^{n,m}_{\Lambda}$ приняты следующие равносильные обозначения:

$$z = (x, \theta) = (x^1, \ldots, x^n, \theta^1, \ldots, \theta^m) = (z^1, \ldots, z^{n+m}).$$

Частные производные определим для функций вида

$$f(x)\theta^{i_1} \ldots \theta^{i_k}, \quad i_1, \ldots, i_k \in \{1, \ldots, m\}, \quad i_s \neq i_r,\ s \neq r. \tag{4}$$

следующим образом:

$$\frac{\partial}{\partial x^i} \left(f(x)\theta^{i_1} \ldots \theta^{i_k} \right) = \left(\frac{\partial}{\partial x^i} f(x) \right) \theta^{i_1} \ldots \theta^{i_k},$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta^j} \left(f(x)\theta^{i_1} \ldots \theta^{i_k} \right) = \begin{cases} 0, & j \notin \{i_1, \ldots, i_k\}, \\ (-1)^{k-l} f(x)\theta^{i_1} \ldots \theta^{i_{l-1}} \theta^{i_{l+1}} \ldots \theta^{k}, & j = i_l. \end{cases}$$

Интеграл определим для функций вида (4) отдельно по коммутирующим и антикоммутирующим переменным, а интеграл по всему пространству будем понимать как повторный. Пусть $V \subset \mathbb{R}^n$ — борелевское множество, $u = (u_1, \ldots, u_n)$ — прямоугольные декартовы координаты в $\mathbb{R}^n$. Тогда положим по определению

$$\int\limits_V f(x)\theta^{i_1}\ldots\theta^{i_k}dx = \left(\int\limits_V f(u_1 e, \ldots, u_n e)\, du\right)\theta^{i_1}\ldots\theta^{i_k},$$

если последний интеграл, понимаемый как интеграл Бохнера по мере Лебега, существует. Для интеграла по антикоммутирующим переменным естественным оказывается следующее определение:

$$\int\limits_{\Lambda_1} f(z)d\theta^j = \frac{\partial}{\partial\theta^j} f\bigg|_{\theta^j=0}.$$

Для так определенных производных и интегралов оказываются верными аналоги стандартных теорем анализа (правило Лейбница дифференцирования производной, формула интегрирования по частям, теорема о замене переменной в интеграле) , отличающиеся от своих классических аналогов лишь возникающими в некоторых местах знаками.

Пусть H — суперпространство с четной размерностью нечетной части, т.е. $H = \mathbb{R}^{n,2m}_\Lambda = \Lambda_0^n \times \Lambda_1^{2m}$. В таком случае удобно записывать элементы H в виде

$$z = (x, \theta, \bar\theta) = (x^1, \ldots, x^n, \theta^1, \ldots, \theta^m, \bar\theta^1, \ldots, \bar\theta^m) = (z^1, \ldots, z^{n+2m}).$$

Введем на H суперскалярное произведение по формуле

$$\langle\, z_1\, , z_2 \,\rangle = \sum_{k=1}^n x_1^k x_2^k + \sum_{l=1}^m \theta_1^l \bar\theta_2^l - \sum_{l=1}^m \bar\theta_1^l \theta_2^l, \quad z_i = (x_i, \theta_i, \bar\theta_i), \quad i = 1, 2. \tag{5}$$

Отметим, что этой же формулой можно задать форму $\langle\,\cdot\,,\cdot\,\rangle$ на всем включающем H пространстве Λ^{n+2m}.

Обозначим через $\mathcal{A}(H, H)$ пространство обратимых вещественно-линейных отображений из H в H, действие которых задается "умножением слева" на матрицы вида

$$A = \begin{pmatrix} A_{00} & 0 \\ 0 & A_{11} \end{pmatrix}, \qquad A_{00} \in e \otimes \mathrm{Mat}\,(n, n), \quad A_{11} \in \Lambda_0^1 \otimes \mathrm{Mat}\,(m, m),$$

где $\Lambda_0 = \Lambda_0^1 \oplus (I \cap \Lambda_0)$, $I = {}^{\perp}\Lambda_1$ — левый аннулятор Λ_1. Пусть $A \in \mathcal{A}(H, H)$. Обозначим через μ_A супермеру с плотностью

$$p_{\mu_A} = (2\pi)^{-\frac{n}{2}}(-1)^m(\text{sdet } A)^{-1}e^{-\frac{1}{2}\langle A^{-1}z\,, A^{-1}z\,\rangle},$$

т.е. положим $\int\limits_V \int\limits_{\Lambda_1^{2m}} f(z)\mu_A(dz) = \int\limits_V \int\limits_{\Lambda_1^{2m}} f(z)p_{\mu_A}(z)dz$, где последний интеграл по $dz = dx^1 \dots dx^n d\bar{\theta}^1 d\theta^1 \dots d\bar{\theta}^m d\theta^m$ понимается в описанном выше смысле. Напомним, что sdet — это супердетерминант, и для оператора $A \in \mathcal{A}(H, H)$ он вычисляется так: $\operatorname{sdet} A = \det A_{00} \cdot \det^{-1} A_{11}$.

На этом заканчиваются необходимые предварительные сведения. Далее доказывается несколько утверждений о вычислении некоторого класса интегралов по гауссовским супермерам, результаты этого раздела резюмируются в следующем обобщении известной теоремы Вика:

Теорема 11. *Пусть $H = \Lambda_0^n \times \Lambda_1^{2m}$ — суперпространство, $A \in \mathcal{A}(H, H)$, $\langle Az_1\,, z_2\,\rangle = \langle\, z_1\,, Az_2\,\rangle$ для любых $z_1, z_2 \in H$; $v_1, \dots, v_k$ — некоторые векторы пространства H, $v_{k+1}, \dots, v_{k+\kappa}$ — некоторые векторы пространства $\Lambda_1^n \times \Lambda_0^{2m}$. Положим $J = \int\limits_H \langle\, v_1\,, z\,\rangle \cdot \ldots \cdot \langle\, v_{k+\kappa}\,, z\,\rangle \mu_A(dz)$. Тогда, если нечетно хотя бы одно из чисел k и κ, имеем $J = 0$; в противном случае $J = \sum\limits_{\{(a_l, b_l)\}} \operatorname{sgn}(\rho) \prod\limits_{l=1}^{(k+\kappa)/2} \langle\, Av_{a_l}\,, Av_{b_l}\,\rangle$. Здесь символом $\{(a_l, b_l)\}$ обозначено спаривание, т.е. разбиение множества чисел от 1 до $k+\kappa$ на $(k+\kappa)/2$ пар $a_1, b_1, \dots, a_{(k+\kappa)/2}, b_{(k+\kappa)/2}$. Суммирование ведётся по всевозможным таким разбиениям. Кроме того, $\rho \in S_\kappa$ — перестановка, приводящая числа $k+1, \dots, k+\kappa$ в тот порядок, в котором они входят в упорядоченный набор $a_1, b_1, \dots, a_{(k+\kappa)/2}, b_{(k+\kappa)/2}$.*

Для наглядного перечисления всевозможных спариваний удобно изобразить $k + \kappa$ отрезков и соединять их пунктирными линиями попарно. Тогда соединенные отрезки означают спаренные индексы, а если каждый отрезок соединен с каким-то другим, то задано спаривание.

Далее такой метод вычисления интегралов переносится сначала на одночлены вида $z^{i_1} \dots z^{i_d}$, $\quad i_l \in \{1, \dots, n\}$, $l = 1, \dots, c$; $i_l \in \{n+1, \dots, n+2m\}$, $l = c+1, \dots, d$, (т.е. зависящих от c четных переменных и $d - c$ нечетных), затем — на интегрирование многочленов вида

$$p(z) = \sum_{\substack{i_1=1\\ \cdots\\ i_c=1}}^{n} \sum_{\substack{i_{2c+1}=n+1\\ \cdots\\ i_d=n+1}}^{n+2m} p_{i_1\ldots i_d} z^{i_1}\ldots z^{i_d}. \qquad (6)$$

Такой многочлен, зависящий от c четных переменных и $d-c$ нечетных, назовем многочленом степени (d,c). От коэффициентов $p_{i_1\ldots i_d}\in\mathbb{R}$ потребуем (без ограничения общности), чтобы они были симметричны относительно перестановок первых c индексов и антисимметричны относительно перестановок последних $d-c$ индексов, т.е. чтобы для произвольных перестановок $\rho\in S_c$, $\sigma\in S_{d-c}$ и произвольного набора индексов $i_1,\ldots,i_d$ имели место равенства $p_{i_{\rho(1)}\ldots i_{\rho(c)}i_{c+1}\ldots i_d} = p_{i_1\ldots i_d}$, $p_{i_1\ldots i_c i_{\sigma(c+1)}\ldots i_{\sigma(d)}} = sgn(\sigma)\, p_{i_1\ldots i_d}$.

Затем приводится диаграммный способ вычисления интегралов от произведения нескольких многочленов вида (6). А именно, $\int\limits_H p_1(z)\ldots p_r(z)\mu_A(dz) =$

$$\sum_{\{(a_l,b_l)\}} \operatorname{sgn}(\sigma) \sum_{\substack{i_k^j=1\\ j\in\{1,\ldots,r\}\\ k\in\{1,\ldots,c_j\}}}^{n} \sum_{\substack{i_k^j=n+1\\ j\in\{1,\ldots,r\}\\ k\in\{c_j+1,\ldots,d_j\}}}^{n+2m} p^1_{i^1_1\ldots i^1_{d_1}}\ldots p^r_{i^r_1\ldots i^r_{d_r}} \langle\, Ae_{i_{a_1}}, Ae_{i_{b_1}}\,\rangle \ldots \langle\, Ae_{i_{a_{d/2}}}, Ae_{i_{b_{d/2}}}\,\rangle,$$

где $d=d_1+\ldots+d_r$, i_s с одним нижним индексом обозначают линейно упорядоченные i_k^j: по возрастанию j, а для одинакового j — по возрастанию k, т.е. $(i_1,\ldots,i_d) = (i^1_1, i^1_2,\ldots,i^1_{d_1}, i^2_1, i^2_2,\ldots,i^2_{d_2},\ldots,i^r_1,i^r_2,\ldots,i^r_{d_r})$; σ — перестановка, приводящая числа $c_1+1,\ldots,d_1, d_1+c_2+1,\ldots,d_1+d_2,\ldots,d_1+\ldots+d_{r-1}+c_r+1,\ldots,d_1+\ldots+d_r$ в тот порядок, в котором они встречаются в упорядоченном наборе $a_1,b_1,\ldots,a_{d/2},b_{d/2}$. Для перечисления спариваний удобно воспользоваться диаграммами: каждому многочлену p_j, $j=1,\ldots,r$ в соответствие ставится точка с выходящими из нее d_j отрезками. Каждый такой отрезок обозначает один индекс суммирования i_k^j, $k=1,\ldots,d_j$, причем из них c_j отрезков соответствуют четным переменным многочлена и называются "четными отрезками", а оставшиеся d_j-c_j соответствуют нечетным переменным и называются "нечетными отрезками". Далее отрезки попарно соединяются пунктирными линиями, причем четные с четными, а нечетные с нечетными.

Наконец, описывается интегрирование экспоненты от полинома и от суммы полиномов, а также формулируются и доказываются соответствующие теоремы о переходе к суммированию по связным диаграммам. Пусть требуется вычислить интеграл

$$\int\limits_H e^{p(z)} \mu_A(dz).$$

(считаем, что многочлен p таков, что этот интеграл существует). Полагаем

$$f(t) = \int\limits_H e^{tp(z)} \mu_A(dz). \tag{7}$$

Тогда интересующий нас интеграл есть $f(1)$. Будем приближать это значение начальным отрезком ряда Тейлора функции f в точке 0. При этом мы не будем обсуждать точность и правомерность такого приближения, а сосредоточимся на вычислении производных $f^{(r)}(0)$. Дифференцирование под знаком интеграла возможно:

Предложение 9. *Если функция f определена формулой (7), p — такой однородный многочлен степени (d, c) с четными коэффициентами, что интеграл для $f(t)$ сходится при всех $t \in \mathbb{R}_+$ и r — произвольное натуральное число, то*

$$f^{(r)}(0) = \int\limits_H (p(z))^r \cdot e^{tp(z)} \mu_A(dz) \Bigg|_{t=0} = \int\limits_H p^r(z) \mu_A(dz).$$

Последний интеграл вычисляется диаграммным методом. Кроме того, справедлива следующая теорема:

Теорема 12. *Пусть H — суперпространство; $A \in \mathcal{A}(H, H)$ — такой оператор, что $\langle\, Az_1\,, z_2\,\rangle = \langle\, z_1\,, Az_2\,\rangle$ для любых $z_1, z_2 \in H$; $f(t) = \int\limits_H e^{tp(x)} \mu_A(dx)$, где $t \in \mathbb{R}_+$; $p(x)$ — такой однородный многочлен степени (d, c) с четными коэффициентами, что указанный интеграл сходится при всех $t \in \mathbb{R}_+$; t_0 — такое число, что $||f(t) - 1|| < 1/2$ при $t \in [0, t_0]$. Положим $g(t) = \ln f(t)$ для $t \in [0, t_0]$. Тогда $g^{(r)}(0)$ вычисляется суммированием по всем связным диаграммам среди соответствующих $f^{(r)}(0)$.*

Аналогичное утверждение формулируется для интегрирования экспоненты от суммы полиномов:

Теорема 13. *Пусть H — суперпространство; $A \in \mathcal{A}(H, H)$ — такой оператор, что $\langle\, Az_1\,, z_2\,\rangle = \langle\, z_1\,, Az_2\,\rangle$ для любых $z_1, z_2 \in H$; $f(t_1, \ldots, t_l) = \int\limits_H e^{t_1 p_1(z) + \ldots + t_l p_l(z)} \mu_A(dz)$, где $t_j \in \mathbb{R}_+$, $j = 1, \ldots, l$; $p_j(x)$, $j = 1, \ldots, l$ — такие однородные многочлены степеней (d_j, c_j) с четными коэффициентами,* *что $d_j - c_j$ четно и указанный интеграл сходится при всех $t_j \in \mathbb{R}_+$; t_0 — такое число, что $||f(t_1, \ldots, t_l) - 1|| < 1/2$ при $t_j \in [0, t_0]$. Положим $g(t_1, \ldots, t_l) = \ln f(t_1, \ldots, t_l)$ для $t_j \in [0, t_0]$. Тогда для любого набора целых неотрицательных чисел $r_1, \ldots, r_l$ выражение $\frac{\partial^{r_1+\ldots+r_l}}{\partial t_1^{r_1}\ldots\partial t_l^{r_l}}\, g\,(0)$ вычисляется суммированием по связным диаграммам среди соответствующих выражению $\frac{\partial^{r_1+\ldots+r_l}}{\partial t_1^{r_1}\ldots\partial t_l^{r_l}}\, f\,(0)$.*

Доказательством этой теоремы заканчивается часть главы, посвященная диаграммной технике в суперпространстве.

Во второй части главы 3 излагается диаграммная техника для фейнмановских интегралов в гильбертовых пространствах.

Пусть H — сепарабельное гильбертово пространство над $\mathbb{R}$ и T — ядерный самосопряженный положительно определенный оператор на H. Обозначим через $\nu_{T,\sigma}$ семейство гауссовских мер на H с корреляционными операторами T/σ^2, где $\sigma \in \mathbb{R}_+$.

Приведем, следуя книге О. Г. Смолянова и Е. Т. Шавгулидзе[18], определение аналитического интеграла Фейнмана. Пусть $\mathcal{U}_r = \{\sigma \in \mathbb{C} : |\arg\sigma| < \pi/4,\ 1/r < |\sigma| < r\}$, $r > 1$. Назовем функцию f интегрируемой по мере Фейнмана Φ_T, если для некоторого $r > 1$ существуют интегралы $\int\limits_H f(x)\nu_{T,\sigma}(dx)$ при всех $\sigma \in [1/r; r]$ и непрерывная функция $\psi \colon \overline{\mathcal{U}_r} \to \mathbb{C}$, аналитическая на $\mathcal{U}_r$ и такая, что $\psi(\sigma) = \int\limits_H f(x)\nu_{T,\sigma}(dx)$ при $\sigma \in [1/r; r]$. При этом величину $\psi(e^{\frac{i\pi}{4}})$ называем интегралом Фейнмана и обозначаем через $\int\limits_H \varphi(x)\Phi_T(dx)$. Будем, кроме того, называть интегралами по (обобщенным) мерам Фейнмана $\Phi_{T,\sigma}$ значения $\psi(\sigma)$, $\sigma \in \overline{\mathcal{U}_r}$.

Для так определенных интегралов Фейнмана доказывается теорема Вика:

Теорема 14. *Пусть $v_1, \ldots, v_k$ — произвольные векторы пространства H, $\langle\,\cdot\,,\cdot\,\rangle$ — скалярное произведение в H, T — ядерный самосопряженный положительно определенный оператор на H, $\sigma \in \mathbb{C}$, $|\arg\sigma| \leqslant \pi/4$, $\sigma \neq 0$. Положим $J(\sigma) = \int\limits_H \langle\, v_1\,, x\,\rangle \ldots \langle\, v_k\,, x\,\rangle \Phi_{T,\sigma}(dx)$. Тогда при нечетном числе k сомножителей под знаком интеграла имеем $J = 0$, а при четном $J = \frac{1}{\sigma^k} \sum\limits_{\{(a_l,b_l)\}} \prod\limits_{l=1}^{k/2} \langle\, Tv_{a_l}\,, v_{b_l}\,\rangle$. Здесь символом $\{(a_l, b_l)\}$ обозначено спаривание, т.е. разбиение множества чисел от 1 до k на $k/2$ пар $(a_1, b_1), \ldots, (a_{k/2}, b_{k/2})$. Суммирование ведется по всевозможным таким разбиениям.*

Возьмем функцию $P\colon H^{\times d} \to \mathbb{R}$, линейную по каждому из d аргументов и непрерывную. Однородным многочленом степени d назовем функцию $p(x) = P(x, \ldots, x)$. Функцию P без ограничения общности будем считать симметричной. Через $\mathcal{P}(H)$ обозначим множество полиномов p, удовлетворяющих следующим условиям: степень p четна, $p(x) < 0$ при $x \neq 0$, функция p вогнутая, существует такое положительное число C, что для любых $x_1, \ldots, x_d$ выполняется неравенство

$$|P(x_1, \ldots, x_d)| \leqslant C|p(x_1)|^{\frac{1}{d}} \ldots |p(x_d)|^{\frac{1}{d}}. \tag{8}$$

Диаграммная техника в этом случае аналогична описанной в первой части главы, так что сразу формулируются теоремы о интегрировании экспоненты от полинома и от суммы полиномов, которые и завершают главу.

Теорема 15. *Пусть H — сепарабельное гильбертово пространство; T — ядерный самосопряженный положительно определенный оператор; $f(t) = \int\limits_H e^{tp(x)} \Phi_{T,\sigma}(dx)$, где $t \in \mathbb{R}_+$, $p(x) \in \mathcal{P}(H)$; t_0 — такое число, что $|f(t) - 1| < 1/2$ при $t \in [0, t_0]$. Положим $g(t) = \ln f(t)$ для $t \in [0, t_0]$. Тогда $g^{(r)}(0)$ вычисляется суммированием по всем связным графам среди соответствующих $f^{(r)}(0)$.*

Теорема 16. *Пусть H — сепарабельное гильбертово пространство; T — ядерный самосопряженный положительно определенный оператор; $f(t_1, \ldots, t_l) = \int\limits_H e^{t_1 p_1(x) + \ldots + t_l p_l(x)} \Phi_{T,\sigma}(dx)$, где $t_j \in \mathbb{R}_+$, $p_j(x) \in \mathcal{P}(H)$, $j = 1, \ldots, l$; t_0 — такое число, что $|f(t_1, \ldots, t_l) - 1| < 1/2$ при $t_j \in [0, t_0]$. Положим $g(t_1, \ldots, t_l) = \ln f(t_1, \ldots, t_l)$ для $t_j \in [0, t_0]$. Тогда для любого набора целых неотрицательных чисел $r_1, \ldots, r_l$ выражение $\frac{\partial^{r_1 + \ldots + r_l}}{\partial t_1^{r_1} \ldots \partial t_l^{r_l}} g(0)$ вычисляется суммированиям по связным диаграммам среди соответствующих выражению $\frac{\partial^{r_1 + \ldots + r_l}}{\partial t_1^{r_1} \ldots \partial t_l^{r_l}} f(0)$.*

В заключение выражаю глубокую признательность своему научному руководителю, доктору физико-математических наук, профессору Евгению Тенгизовичу Шавгулидзе за постановку задач, постоянное внимание к работе и многолетнюю поддержку.

Публикации автора по теме диссертации

[1] А. А. Досовицкий, *Об одном свойстве интеграла Фейнмана*, Вестник Московского Университета. Серия 1. Математика, механика, 2007, №5, с. 65-69.

[2] А. А. Досовицкий, *Некоторые меры на множестве кусочно-гладких гомеоморфизмов окружности и связанные с ними представления группы диффеоморфизмов окружности*, Математические заметки, 2010, **88**, №6, с. 946–949

[3] A. A. Dosovitskii, *Quasi-invariant measures on sets of piecewise smooth homeomorphisms of closed intervals and circles and representations of diffeomorphism groups* , Russian Journal of Mathematical Physics, 2011, **18**, №3, pp. 258-296, DOI: 10.1134/S1061920811030022.