**МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ имени М.В. ЛОМОНОСОВА**

Механико-математический факультет

На правах рукописи

УДК 517.521

Поляков Игорь Викторович

**СХОДИМОСТЬ И РАСХОДИМОСТЬ ПОЧТИ ВСЮДУ
РЯДОВ ФУРЬЕ ПО ПЕРЕСТАВЛЕННЫМ
СИСТЕМАМ УОЛША И ВИЛЕНКИНА**

Специальность 01.01.01. - вещественный, комплексный
и функциональный анализ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

МОСКВА

2012

Работа выполнена на кафедре Теории функций и функционального анализа
Механико-математического факультета Московского Государственного Университета
имени М.В. Ломоносова.

Научный руководитель: доктор физико-математических наук,
профессор Скворцов Валентин Анатольевич

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук,
профессор Бочкарев Сергей Викторович,
кандидат физико-математических наук,
доцент Щербаков Виктор Иннокентьевич

Ведущая организация: Институт Математики и Механики
Уральского отделения РАН

Защита диссертации состоится 16 марта 2012 года в 16 часов 40 минут на заседа-
нии диссертационного совета Д 501.001.85 при Московском государственном универси-
тете имени М.В. Ломоносова по адресу: 119991, ГСП-1, Москва, Ленинские горы, МГУ,
механико-математический факультет, ауд. 16-24.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке механико-математического фа-
культета МГУ (Главное здание, 14 этаж).

Афтореферат разослан 15 февраля 2012 года.

Ученый секретарь диссертационного
совета Д 501.001.85 при МГУ,
доктор физико-математических наук,
профессор

В.Н. Сорокин

Общая характеристика работы

Актуальность темы.

Система Уолша была введена в 1923 году¹. Данное ей изначально определение было рекурсивным и не использовало функции, введенные Радемахером в 1922 году². Первым, кто понял, что функции Уолша являются произведениями функций Радемахера, был Пэли. Нумерация, предложенная им в 1932 году Также широко известна нумерация Качмажа, введенная Шнейдером в 1948 году³. Шиппу⁴ принадлежит понятие кусочно-линейных перестановок системы Уолша-Пэли, с помощью которых могут быть получены нумерация Качмажа и оригинальная нумерация самого Уолша. Система Виленкина⁵ была введена в 1947 году как система характеров топологической группы, удовлетворяющей специальным свойствам. Она может быть рассмотрена как на группе, так и на отрезке. Ее частным случаем является система Уолша.

В настоящее время функции Уолша получили широкое распространение в области передачи сигналов и сжатия изображений, что связано с их более простым устройством по сравнению с тригонометрической системой и меньшей вычислительной сложностью алгоритма быстрого преобразования Фурье, обусловленной тем фактом, что функции Уолша принимают лишь 2 значения: 1 и -1.

¹Walsh J.L. A closed set of normal orthogonal functions // Amer. J. Math. 1923. V. 45. p. 5-24.

²H.A. Rademacher Einige Satze Uber Reihen von allgemeinen Orthogonalenfunctionen // Math. Annalen 1922. V. 87. p. 112-138.

³А. А. Шнейдер, О рядах по функциям Вальша с монотонными коэффициентами, Изв. АН СССР. Сер. матем., 1948, 12:2, 179-192

⁴F. Schipp, Некоторые перестановки системы Уолша, Мат. заметки 18 (1975) 193-201.

⁵Виленкин Н.Я. Об одном классе полных ортогональных систем // Изв. АН СССР Сер. мат. 1947. Т. 11. с. 363-400

Изучение проблемы поточечной сходимости рядов Фурье впервые началось в теории тригонометрических рядов. В 1915 году Н.Н. Лузин публикует свою диссертацию "Интеграл и тригонометрический ряд"⁶, к числу основных результатов которой принадлежит критерий сходимости почти всюду ряда Фурье интегрируемой с квадратом функции. На основании анализа этого критерия Лузин выдвигает гипотезу, что тригонометрический ряд Фурье любой функции из $L^2[0, 2\Pi)$ сходится почти всюду.

В 1922 году А.Н. Колмогоров⁷, исследуя проблему Лузина, построил пример интегрируемой функции, ряд Фурье которой по тригонометрической системе расходится почти всюду. Им же было отмечено, что построенная функция не принадлежит $L^2[0, 2\Pi)$. Колмогоровым, Селиверстовым⁸ и Плеснером⁹ впервые была получена оценка в положительном направлении: если f принадлежит $L^2[0, 2\Pi)$, то почти всюду выполнено

$$S_n(f, x) = o((\ln n)^{\frac{1}{2}}).$$

Дж. Литтлвуд и Р. Пэли¹⁰ обобщили эту оценку для более широких классов функций: если f принадлежит $L^p[0, 2\Pi)$, $p > 1$, то почти всюду выполнено

$$S_n(f, x) = o((\ln n)^{\frac{1}{p}}).$$

Этот результат до середины 60-х годов прошлого века оставался наиболее сильным и общим результатом в положительном направлении изучения

⁶Лузин Н.Н. Интеграл и тригонометрический ряд. М. 1915. Докт. дисс. 242 с.

⁷Kolmogoroff A. Une serie de Fourier-Lebesgue divergente preque partout // Fund. math. 1923 V.4 p. 324-328

⁸Kolmogoroff A., Seliverstoff G. Sur la convergence des series de Fourier // Rend. Acad. Naz. Lincei. 1926 V.3 p. 307-310

⁹Plessner A. Uber Konvergenz von trigonometrischen Reihen // Journal fur reine und angew. Math. 1926 V. 155 p. 15-25

¹⁰Littlewood J.E., Paley R.E.A.C. Theorems on Fourier series and power series // (1) Proc. London. Math. Soc. 1936. V. 42. p. 52-89, (2) Proc. London. Math. Soc. 1937. V. 43. p. 105-126.

проблемы Лузина. Истинность гипотезы Лузина не была даже установлена для непрерывных функций.

В 1966 году Л. Карлесон, используя новый метод, установил справедливость гипотезы Лузина. В его работе¹¹ было установлено несколько результатов.

1. Если $f \in L(\ln^+ L)^{1+\delta}([0, 2\Pi))$, $\delta > 0$, то почти всюду

$$S_n(x, f) = o(\ln \ln n).$$

2. Если $f \in L^{1+\delta}([0, 2\Pi))$, $\delta > 0$, то почти всюду

$$S_n(x, f) = o(\ln \ln \ln n).$$

3. Если $f \in L^2[0, 2\Pi)$, то ее ряд Фурье сходится к ней почти всюду.

Исследования Карлесона были развиты Хантом¹² в 1968 году. Пусть $M(f, x) = \sup_{n \geq 1} |S_n(f, x)|$ - мажоранта частичных сумм тригонометрического ряда Фурье функции f . Пусть $\chi_F(x)$ - характеристическая функция измеримого множества $F \subset [0, 2\Pi)$, $|F|$ - его мера по Лебегу. Хантом была получена оценка

$$|\{x \in [0, 2\Pi) : M(\chi_F, x) > y\}| \leq (B_p)^p y^{-p} |F|, \quad (1)$$

где $y > 0$, $1 < p < \infty$, $B_p \leq C \frac{p^2}{p-1}$. Из нее были получены следствия.

¹¹L. Carleson, On the convergence and growth of partial sums of Fourier series, Acta. Math. 116 (1966), 135-157.

¹²Hunt R.A. On the convergence of Fourier series // Orthogonal expansions and their continuous analogues. SIU Press, Carbondale, Illinois. 1968. p 235-255

1. $\|M(f, *)\|_p \leq C_p \|f\|_p$ при $1 < p < \infty$, $f \in L^\infty([0, 2\Pi))$,
2. $\|M(f, *)\|_1 \leq C \int_{-\Pi}^{\Pi} |f(x)| (\ln^+ |f(x)|)^2 dx + C$
при $f \in L(Ln^+L)^2([0, 2\Pi))$,
3. $|\{x \in [0, 2\Pi) : M(\chi_F, x) > y\}| \leq C \exp(-\frac{Cy}{\|f\|_\infty})$ при $y > 0$, $f \in L^\infty([0, 2\Pi))$.

Из второй оценки следует, что для всякой $f \in L(\ln^+ L)^2([0, 2\Pi))$ ее ряд Фурье по тригонометрической системе сходится к ней почти всюду. После появления работ Карлесона и Ханта многие авторы начали развивать данные методы и переносить их на случай систем Уолша и Виленкина. Наиболее заметные в этом направлении результаты принадлежат П. Шелину¹³, который заметил, что путем выбора оптимального числа p для каждого y оценка (1) может быть приведена к виду

$$|\{x \in U, M(\chi_F, x) > y\}| \leq C \frac{1}{y} \ln \frac{1}{y} |F|, \quad 0 < y < \frac{1}{e}, \quad (2)$$

где U отрезок $[0, 2\Pi)$ для тригонометрических мажорант и $[0, 1)$ для мажорант по системе Уолша-Пэли, C - абсолютная константа. С помощью этой оценки Шелиным были получены новые результаты.

1. Для всякой $f \in L \ln^+ L \ln^+ \ln^+ L([0, 2\Pi))$ ее ряд Фурье по тригонометрической системе сходится к ней почти всюду.
2. Для всякой $f \in L \ln^+ L \ln^+ \ln^+ L([0, 1))$ ее ряд Фурье по системе Уолша-Пэли сходится к ней почти всюду.

¹³Sjolin P. An inequality of Paley and convergence a.e. of Walsh-Fourier series. // Arkiv for mat. 1969. V.7. p. 551-570

Антонов получал усиление данных результатов в 90-х годах¹⁴, ¹⁵ Он показал, что для любой $f \in L \ln^+ L \ln^+ \ln^+ \ln^+ L$ ее ряд Фурье по тригонометрической системе или системе Уолша-Пэли сходится к ней почти всюду. На данный момент этот результат является наиболее сильным в положительном направлении.

Гипотеза Лузина для системы Виленкина-Пэли в случае $p_i = p$ для всех i была доказана Хантом и Тейблсоном¹⁶. Для случая ограниченной последовательности $\{p_i\}$ - Госселином¹⁷.

Сходимость рядов Фурье по системе Уолша также изучалась для различных нумераций этой системы. Для системы Уолша-Качмажа В.С.Юнг показал¹⁸, что для всякой функции f из класса $L(\ln^+ L)^2([0, 1))$ ее ряд Фурье-Уолша-Качмажа сходится к ней почти всюду.

Сходимость рядов Фурье по произвольным-кусочно линейным перестановкам изучалась Шиппом¹⁹. Он показал, что для всякой функции f из класса $L^2([0, 1))$ ее ряд Фурье по произвольной кусочно-линейной перестановке системы Уолша сходится к данной функции почти всюду.

Госселин и Юнг ввели специальный класс перестановок системы Виленкина-Пэли, расширяющий понятие кусочно-линейных перестановок системы Уолша-

¹⁴Antonov N. Y. Convergence of Fourier series, East Journal on Approximations. 1996. V. 2. n. 2. P. 187-196.

¹⁵Антонов Н.Ю, Сходимость почти всюду рядов Фурье и смежные вопросы. Докт. дисс. Екатеринбург 2009. 162 с.

¹⁶Hunt. R.A., Taibleson M.H. Almost everywhere convergence of Fourier series on the ring of integers of local field // SIAM J. Math. Anal. 1971. V.2 p. 607-624.

¹⁷Gosselin J. Almost everywhere convergence of Vilenkin-Fourier series // Trans. Amer. Math. Soc. 1973. V.185. P. 345-370.

¹⁸Wo-Sang, Young, On a.e. Convergence of Walsh-Kaczmarcz-Fourier Series. Proc. Amer. Math. Soc. 44 (1974), 353-358. (From p. 635)

¹⁹F. Schipp On the dyadic derivative // Acta. Math. Hung. 1976. V. 28. p. 145-152.

Пэли²⁰. Они показали, что для всякой функции из L^2 ее ряд Фурье по перестановке системы Виленкина из данного класса сходится к ней почти всюду. В то же время, для некоторых перестановок, которые были названы ими "блочными", достаточно принадлежности функции классу $L(\ln^+ L)^2 \ln^+ \ln^+ L$.

Параллельно с этими исследованиями многими авторами были начаты попытки получения примеров функций с наложенными на них дополнительными условиями и плохим поведением частичных сумм их рядов Фурье по тригонометрической и другим системам. Исторически первым примером такого рода был, уже упомянутый выше, пример Колмогорова. Прохоренко²¹ и Чень²² построили примеры функций из классов $L(\ln^+ \ln^+ L)^\epsilon([0, 2\pi))$, $0 \leq \epsilon < 1$ с расходящимися почти всюду рядами Фурье по тригонометрической системе. Бочкарев²³ построил аналог конструкции Колмогорова для широкого класса ортонормированных систем. Тотик²⁴ показал, что если в некотором классе $F(L)([0, 2\pi))$ существует функция с тригонометрическим рядом Фурье, расходящимся на множестве положительной меры, то в этом же классе найдется функция, ряд Фурье которой неограниченно расходится всюду. Как показал Казарян²⁵, этот результат не может быть обобщен для произвольной ортонормированной системы.

²⁰J.A. Gosselin, W.S. Young, On rearrangements of Vilenkin-Fourier series which preserve almost everywhere convergence, Trans. of the Amer. Math. Soc. 209, 1975, p. 157-174

²¹Прохоренко В.И. О расходящихся рядах Фурье // Мат. сборник. 1968. Т. 75. (117), 2, с. 185-198

²²Chen Y.M. An almost everywhere divergent Fourier series of class $L(Ln^+ Ln^+ L)^{1-\epsilon}$ // J. London Math. Soc. 1969. V. 44. p. 643-654.

²³Бочкарев С.В. Расходящийся на множестве положительной меры ряд Фурье для произвольной ограниченной ортонормированной системы // Мат. сб. 1975. Т. 98. н. 3, 436-449

²⁴Totik V. On the divergence of Fourier series // Publ. Math. (Debrecen) 1982. V. 29. p. 251-264

²⁵К. С. Казарян. О некоторых вопросах теории ортогональных рядов // Мат. сб. 1982. Т. 119. н. 2. С. 278-294.

Наилучший на сегодняшний день результат, касающийся расходимости всюду для рядов Фурье по тригонометрической системе, принадлежит Конагину²⁶.

Он показал, что для всякой функции $\varphi: [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ и последовательности $\{\psi(m)\}$ со следующими свойствами: функция $\varphi(u)/u$ является неубывающей на $(0, +\infty)$, $\psi(m) \geq 1$ ($m = 1, 2, \dots$) и $\varphi(m)\psi(m) = o(m\sqrt{\ln m}/\sqrt{\ln \ln m})$ при $m \rightarrow \infty$, найдется функция $f \in L[-\pi, \pi]$ такая, что

$$\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(|f(x)|) dx < \infty$$

и $\limsup_{m \rightarrow \infty} S_m(f, x)/\psi(m) = \infty$ для всех $x \in [-\pi, \pi]$. Здесь $S_m(f)$ это m -я частная сумма тригонометрического ряда Фурье функции f . В частности, верно, что для всякой функции $\varphi: [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ со следующими свойствами: функция $\varphi(u)/u$ является неубывающей на $(0, +\infty)$ и $\varphi(m) = o(m\sqrt{\ln m}/\sqrt{\ln \ln m})$ при $m \rightarrow \infty$, найдется функция $f \in L[-\pi, \pi]$ такая, что

$$\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(|f(x)|) dx < \infty,$$

и ее ряд Фурье неограниченно расходится всюду.

Для системы Уолша-Пэли наиболее сильный результат был получен Бочкаревым²⁷. Он показал, что для всякой $F(u) = uf(u)$, где $f(u)$ - неубывающая непрерывная на $[0, \infty)$ функция, $f(0) = 1$ и $f(u)$ удовлетворяет условию

$$f(u) = o(\sqrt{\log u}), \text{ при } u \rightarrow \infty,$$

²⁶S.V. Konyagin, On divergence of trigonometric Fourier series everywhere // C. R. Acad. Sci. Paris Ser. I. Math. 1999. V. 329. n. 8. P. 693-697

²⁷Бочкарев С. В. , Всюду расходящиеся ряды Фурье-Уолша // Докл. РАН. 2003. Т. 390. н. 1. С. 11-14.

существует такая функция $g \in F(L)$, ряд Фурье-Уолша-Пэли которой расходуется всюду на $[0, 1)$.

Для нумерации Уолша-Качмажа были получены более сильные результаты о расходимости всюду, чем для нумерации Пэли. Это связано с тем, что свойства ядер Дирихле в нумерации Качмажа существенно отличаются от свойств ядер Дирихле в нумерации Пэли. Балашов показал, что для всякого $\epsilon \in (0, 1)$ найдется функция f из класса $L(\ln^+ L)^{1-\epsilon}[0, 1]$, ряд Фурье-Уолша-Качмажа которой имеет монотонные коэффициенты и расходится почти всюду в $[0, 1]$. Отметим, что для системы Уолша-Пэли всякий ряд с монотонными коэффициентами, которые стремятся к нулю, сходится всюду за исключением, быть может, нуля. Результат Балашова показывает, что для нумерации Качмажа это свойство не выполняется.

В связи с существованием большого количества примеров интегрируемых функций, ряд Фурье которых по различным системам расходится почти всюду или даже всюду, актуальным стал вопрос изучения методов суммирования ортогональных рядов. Наибольший интерес в этом отношении представляет метод $(C, 1)$. Для тригонометрической системы хорошо известен классический результат Лебега²⁸ о том, что чезаровские средние ряда Фурье интегрируемой функции сходятся к ней почти всюду. Попытки изучения данного метода для рядов Фурье-Уолша начались значительно позже. Доказательство аналога теоремы Лебега для системы Уолша-Пэли принадлежит Файну²⁹. Вопросы сходимости чезаровских средних рядов Уолша-Качмажа изучались Скворцовым³⁰. Долгое время оставалось неизвестным,

²⁸Lebesgue H. Recherches sur la convergence des series de Fourier M.F. 1905. V. 61. p. 251-280.

²⁹Fine N.J. Cesaro summability of Walsh-Fourier series // Proc. Nat. Acad. Sci. USA 1955. V.46 p. 588-591.

³⁰Skvorcov V. A., On Fourier series with respect to the Walsh-Kaczmarz system, Analysis Mathematica, 7 (1981), 191-201

является ли справедливой теорема Лебега для системы Уолша-Качмажа, до тех пор пока Гаттом³¹ не была исследована поточечная сходимость чезаровских средних рядов Фурье-Уолша-Качмажа и рядов Фурье-Виленкина-Качмажа, в случае системы Виленкина, построенной по постоянной последовательности простых чисел $(p, p, \dots)$.

Цель работы. Цель работы состоит в изучении поведения рядов Фурье по системам Уолша и Виленкина в различных нумерациях с точки зрения расходимости почти всюду.

Методы исследований. В работе использованы методы теории функций и теории аппроксимации.

Научная новизна. Основные результаты работы диссертации являются новыми и состоят в следующем:

1. Доказано, что в случае системы Виленкина-Качмажа, построенной по последовательности простых чисел, не стремящейся к бесконечности, найдется функция из класса $Lo(\sqrt{\ln^+ L})$, ряд Фурье-Виленкина которой расходится всюду.
2. Установлено, что для всякой положительной и возрастающей последовательности $\{\lambda_n\}$ такой, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\lambda_n}$ расходится, верхний предел отношения ядер Дирихле по системе Уолша-Качмажа к членам данной последовательности равен бесконечности почти всюду.
3. Показано существование функции из класса $Lo(\ln^+ L)$, ряд Фурье-Уолша-Качмажа которой имеет монотонные коэффициенты и расходится почти всюду.

³¹ *Gat G.*, Cesaro summability of the character system of the p-series field in the Kaczmarz rearrangement // *Anal. Math.* 2002 **28**, n. 1. 1–23.

4. Для кусочно-линейных перестановок системы Уолша-Пэли из специально выделенного множества P построены примеры функций из класса $Lo(\sqrt{\ln^+ L})$, у которых ряды Фурье-Уолша по данной перестановке расходятся всюду.
5. Установлено, что в случае системы Виленкина-Качмажа, построенной по ограниченной последовательности простых чисел, средние ряда Фурье-Виленкина-Качмажа интегрируемой функции сходятся к данной функции почти всюду.

Теоретическая и практическая ценность. Диссертация носит теоретический характер; результаты диссертации могут быть использованы специалистами по теории ортогональных рядов.

Аппробация работы. Результаты диссертации были доложены на следующих научных семинарах и конференциях:

- семинар "Теория ортогональных и тригонометрических рядов" под руководством профессора М.К. Потапова, профессора М.И. Дьяченко, профессора В.А. Скворцова, профессора Т.П. Лукашенко (2009-2010 гг., неоднократно);
- научно-исследовательский семинар по теории функций под руководством чл.-кор. РАН, профессора Б.С. Кашина, профессора С.В. Коягина, профессора М.И. Дьяченко, профессора Б.И. Голубова (2009 г.);
- конференция "Современные проблемы теории функций и их приложения" в Саратове (2010г.);

- конференция "Современные методы теории функций и смежные вопросы" в Воронеже (2009 г., 2011 г., неоднократно);
- конференция "Теория функций, ее приложения и смежные вопросы" в Казани (2011 г.).

Публикации. Результаты диссертации опубликованы в 8 работах автора, список которых приведен в конце автореферата [1-8]. Работы [1-3] опубликованы в журналах из действующего Перечня ВАК. Работ, написанных в соавторстве, нет.

Структура и объем работы. Диссертационная работа состоит из введения, четырех глав и списка литературы, содержащего 81 наименование. Общий объем диссертации составляет 75 страниц. Нумерация теорем в автореферате совпадает с нумерацией теорем в диссертации.

Краткое содержание работы

Во **введении** содержится обзор исследований по тематике диссертации и проводится краткий обзор содержания диссертации.

Первая глава посвящена определению основных понятий, используемых в тексте диссертации. В ней определяются системы Уолша и Виленкина и некоторые классы их перестановок. Введем понятие кусочно-линейной перестановки системы Уолша.

Определение 1.1. Пусть задано семейство невырожденных матриц $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ над полем Z_2 , причем A_n имеет размеры $n \times n$. Построим семейство отображений $\tau_n(x) : G \rightarrow G$, $y = \tau_n(x)$, $y_i = x_i$, при $i \geq n$, $y_i = \sum_{j=0}^{n-1} A_n^{i,j} x_j$ при $i < n$. Здесь сложение понимается по модулю 2. Все эти отображения бу-

дуг биективными в силу невырожденности матриц. Пусть $2^m \leq n < 2^{m+1}$, тогда положим

$$\chi_n(x) = r_m(x)\psi_{n-2^m}(\tau_m(x)) = \psi_n(\tau_m(x)).$$

Отметим, что если семейство $\{A_n\}$ состоит из матриц вида

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ \dots & & & & \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

то нумерация порождаемая этим семейством называется нумерацией Уолша-Качмажа. Если же матрицы $\{A_n\}$ имеют вид

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & & & & & & \\ \dots & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

то будет получена нумерация, в которой система функций изначально была введена самим Уолшем. Для системы Виленкина-Пэли, построенной по последовательности $\{p_0, p_1, \dots\}$, существует аналог кусочно-линейных перестановок. Положим $m_i = p_0 p_1 \dots p_{i-1}$. Пусть задано семейство перестановок $\{\sigma_{n,i}\}, \sigma_{n,i} : \{0, 1, \dots, n-1\} \rightarrow \{0, 1, \dots, n-1\}, i = 1, \dots, p_n - 1$.

Рассмотрим последовательность, полученную из последовательности P перестановкой первых n членов :

$$P_{n,i} = (p_{\sigma_{n,i}(0)}, \dots, p_{\sigma_{n,i}(n-1)}, p_n, \dots).$$

Пусть $G_{P_{n,i}}$ — P -ичная группа, построенная по ней, и $\psi_m^{n,i}$ — m -я функция Виленкина—Пэли на этой группе, которую будем обозначать ψ_m . По виду аргумента всегда можно будет определить, на какой группе она задана.

На группе $G_{P_{n,i}}$ определены ядра Дирихле и Фейера по системе Виленкина—Пэли, обозначаемые D_m^ψ , K_m^ψ (по аргументу видно, к какой группе они относятся). Определим отображение $\tau_{n,i} : G_P \rightarrow G_{P_n}$ равенством

$$\tau_{n,i}(x) = (x_{\sigma_{n,i}(0)}, \dots, x_{\sigma_{n,i}(n-1)}, x_n, \dots).$$

Тогда n -я функция Виленкина в новой нумерации имеет вид

$$\chi_n(x) = r_{|n|}^{n_{|n|}}(x) \psi_{n-n_{|n|}m_{|n|}}(\tau_{|n|,n_{|n|}}(x)) = e^{\sum_{i=0}^{|n|-1} \frac{2\pi i n'_i x_{|n|,n_{|n|}}(i)}{p_{\sigma_{|n|,n_{|n|}}(i)}} + \frac{2\pi i n_{|n|} x_{|n|}}{p_{|n|}}} = \psi_{n'}(x),$$

где $n - n_{|n|}m_{|n|} = \sum_{i=0}^{|n|-1} n'_i m'_i$, $m'_0 = 1$, $m'_i = p_{\sigma_{|n|,n_{|n|}}(0)} \cdots p_{\sigma_{|n|,n_{|n|}}(i-1)}$. Заметим, что $n' \in [n_{|n|}m_{|n|}, (n_{|n|} + 1)m_{|n|}]$. Таким образом, это просто перенумерация системы Виленкина—Уолша. Видно, что эта перенумерация происходит внутри P -ичных пачек, а это означает, что $D_m^\chi(x) = D_m^\psi(x)$, где D_n^χ — ядро Дирихле для системы $\{\chi\}$. Отметим, что в случае если $(\sigma_{n,i}(0), \sigma_{n,i}(1), \dots, \sigma_{n,i}(n-1)) = (n-1, n-2, \dots, 0)$ мы получаем систему Виленкина-Качмажа. Если для всех $n \in N, i = 1, \dots, p_n - 1, m = 0, \dots, n-1$ выполнено

$$(\sigma_{n,i}(0), \dots, \sigma_{n,i}(m)) = (K, K+1, \dots, K+m),$$

для некоторого целого неотрицательного K , то считается, что полученная перестановка системы Виленкина-Пэли удовлетворяет условию блочности.

В работе также выделяются специальные классы кусочно-линейных перестановок системы Уолша-Пэли, для которых исследуются вопросы расходимости почти всюду ряда Фурье.

Введем класс Шипповских перестановок P . Перестановка принадлежит этому классу, если для семейства матриц $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ найдутся последовательности $\{g_n\}$, $\{p_n\}$, $\{f_n\}$, для которых выполнено

$$A_{g_n}^{i,j} = 0 \text{ при } i \geq g_n - p_n, j < f_n, \quad (3)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = \infty,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = \infty,$$

$$g_{n+1} > g_n.$$

Пусть $k_n = \lfloor \frac{p_n - 1}{3} \rfloor$, тогда $\lim_{n \rightarrow \infty} k_n = \infty$. Переходя, если необходимо, к подпоследовательностям, можно считать, что выполнено

$$k_{n+1} > 2^{k_n},$$

$$f_{n+1} > g_n.$$

Для всякого натурального k определим класс Шипповских перестановок P_k . Перестановка принадлежит этому классу, если для семейства матриц $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ выполнено

$$A_n^{i,j} = 0, \text{ при } j > i + k$$

для всех натуральных $n > k, 0 \leq i < n - k$. Отметим, что систему Уолша в классической нумерации (в той, в которой ее изначально рассматривал Уолш) можно получить из нумерации Пэли, с помощью Шипповской перестановки класса P_1 .

Заметим, что при $k > t$ верно $P_m \subset P_k$. В то же время, класс P находится в общем положении с каждым классом P_k .

Вторая глава посвящена построению примеров функций, ряд Фурье-Уолша которых расходится почти всюду по некоторой перестановке системы Уолша-Пэли.

Параграф 2.1 посвящен доказательству следующего утверждения.

Лемма 2.1. *Для всякой положительной и возрастающей последовательности $\{\lambda_n\}$ такой, что*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\lambda_n} = \infty,$$

выполнено:

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{D_n^x(x)}{\lambda_n} = \infty \text{ для почти всех } x \in [0, 1].$$

С помощью нее в **параграфе 2.2** доказаны следующие теоремы.

Теорема 2.1. *Для всякой $F(u) = uf(u)$, где $f(u)$ - неубывающая непрерывная на $[0, \infty)$ функция, $f(0) = 1$ и $f(u)$ удовлетворяет условию*

$$f(u) = o(\log u), \text{ при } u \rightarrow \infty,$$

существует такая функция $g \in F(L)$, ряд Фурье-Уолша-Качмажа которой расходится почти всюду на $[0, 1)$.

Теорема 2.2. *Для всякой положительной и возрастающей последовательности $\{\lambda_n\}$, такой что*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\lambda_n} = \infty$$

найдется f из $L(G)$, такая что

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{S_n(x, f)}{\lambda_n} \right| = \infty \text{ для почти всех } x \in [0, 1]$$

В параграфе 2.3 доказывается

Теорема 2.3. Пусть k - произвольное неотрицательное целое число. Система $\{\chi_n\}$ получена из системы Уолша - Пэли с помощью некоторой перестановки из класса P_k . Для всякого $1 > \epsilon > 0$ найдется функция $f \in L(\ln^+ \ln^+)^{1-\epsilon}L$, такая что $S_n^\chi f$ расходится почти всюду в G .

В параграфе 2.4 получена

Теорема 2.4. Пусть $F(u) = uf(u)$, где $f(u)$ - неубывающая непрерывная на $[0, \infty)$ функция, $f(0) = 1$ и $f(u)$ удовлетворяет условию

$$f(u) = o(\sqrt{(\log u)}) \text{ при } u \rightarrow \infty.$$

Система $\{\chi_n\}$ получена из системы Уолша с помощью некоторой перестановки класса P . Тогда существует функция $g \in F(L)$, у которой ряд Фурье по данной системе расходится всюду в $[0, 1)$.

Третья глава полностью посвящена обобщению примера Бочкарева на случай системы Виленкина-Пэли

Теорема 3.1. Пусть $F(u) = uf(u)$, где $f(u)$ - неубывающая непрерывная на $[0, \infty)$ функция, $f(0) = 1$ и $f(u)$ удовлетворяет условию

$$f(u) = o(\sqrt{(\log u)}) \text{ при } u \rightarrow \infty.$$

Пусть система Виленкина построена по последовательности простых чисел, не стремящейся к бесконечности. Тогда существует функция $g \in F(L)$, у которой ряд Фурье по системе Виленкина расходится всюду в $[0, 1)$.

Четвертая глава посвящена вопросам суммируемости почти всюду рядов Фурье по системе Виленкина-Качмажа, а также вопросам равномерной сходимости $(C, 1)$ средних ряда Фурье непрерывной функции по произвольной кусочно-линейной перестановке системы Уолша-Пэли. В **параграфе 4.1** доказывается

Теорема 4.1. *Пусть α - произвольная кусочно-линейная перестановка системы Уолша-Пэли. Для всякой $f \in C(G)$ ее Чезаровские средние $\sigma_n^\alpha(x, f)$ равномерно сходятся к $f(x)$.*

В **параграфе 4.2** получена

Теорема 4.2. *Пусть $f \in L([0, 1))$, система Виленкина-Качмажа построена по ограниченной последовательности простых чисел. Тогда средние $\sigma_n^\chi f$ ряда Фурье-Виленкина-Качмажа функции f сходятся к f почти всюду.*

Благодарности. Автор благодарит научного руководителя профессора Валентина Анатольевича Скворцова за предложенную тему, постоянное внимание к работе и многочисленные обсуждения, а также участников семинара "Теория ортогональных и тригонометрических рядов" под руководством профессора М.К. Поталова, профессора М.И. Дьяченко, профессора В.А. Скворцова, профессора Т.П. Лукашенко за ценные замечания к работе.

Список публикаций автора по теме диссертации.

- [1] И. В. Поляков, Пример расходящегося ряда Фурье по системе Виленкина, Матем. заметки, 2011, том 89, выпуск 5, 780-787
- [2] И.В. Поляков, Пример расходящегося ряда Фурье по переставленной системе Уолша-Пэли, Вестник МГУ, 2010, том 65, номер 6, стр 229-232
- [3] И.В. Поляков, $(C, 1)$ - суммирование рядов Фурье по переставленной системе Виленкина, Вестник МГУ, 2010, том 65, номер 4, стр 140-147
- [4] И.В. Поляков, Равномерная $(C,1)$ суммируемость ряда Фурье непрерывной функции по переставленной системе Уолша-Пэли, Труды матем. центра им. Н.И. Лобачевского, 2011, т.43, 289-290
- [5] И.В. Поляков, Примеры расходящихся рядов Фурье для специального класса перестановок системы Уолша-Пэли, Материалы международной научной конференции, посвященной 105-летию академика С.М. Никольского, 2010, 32-33
- [6] И.В. Поляков, Примеры расходящихся рядов Фурье для широкого класса переставленных систем Уолша-Пэли, Материалы Воронежской зимней математической школы, 2011, 269-271
- [7] И.В, Поляков, Пример расходящегося ряда Фурье по системе Виленкина, Материалы Воронежской зимней математической школы, 2009, 145-146
- [8] И.В. Поляков, Расходящиеся почти всюду ряды Фурье по переставленной системе Уолша, Материалы 15-й Саратовской зимней школы, 2010, 142-143