

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М. В. ЛОМОНОСОВА

Механико–математический факультет

На правах рукописи
УДК 519.216



Спиряев Максим Александрович

О СТОХАСТИЧЕСКИХ СВОЙСТВАХ
МОДЕЛЕЙ КАГИ И РЕНКО

01.01.05 — теория вероятностей и математическая статистика

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико–математических наук

МОСКВА
2012

Работа выполнена на кафедре теории вероятностей механико-математического факультета Московского Государственного Университета имени М. В. Ломоносова.

Научный руководитель академик РАН,
доктор физико-математических наук, профессор
Ширяев Альберт Николаевич

Официальные оппоненты доктор физико-математических наук,
профессор
Бутов Александр Александрович
кандидат физико-математических наук,
доцент
Бурнаев Евгений Владимирович

Ведущая организация Центральный экономико-математический
институт РАН

Защита диссертации состоится «16» марта 2012 г. в 16 часов 45 минут на заседании диссертационного совета Д 501.001.85 при Московском государственном университете имени М. В. Ломоносова по адресу: 119991, ГСП-1, Москва, Ленинские горы, МГУ, механико-математический факультет, аудитория 16–24.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке механико-математического факультета (Главное здание, 14 этаж).

Автореферат разослан «16» февраля 2012 г.

Ученый секретарь диссертационного
совета Д 501.001.85 при МГУ,
доктор физико-математических наук,
профессор



Сорокин В. Н.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы

Настоящая диссертация посвящена вероятностному исследованию моделей Каги и Ренко. Модели и построения Каги и Ренко являются одними из методов технического анализа, под которым понимается прогнозирование будущего поведения цен, основываясь на статистическом анализе изменений цен в прошлом.

На сегодняшний день технический анализ включает в себя огромное количество методов и техник для прогнозирования цен, определения трендов и построения трейдинговых стратегий. Одним из наиболее известных методов технического анализа является техника японских свечей, описанный в работах Р. Бенсигнора¹ и С. Нисона^{2,3,4}, во многом благодаря наглядности и простоте для понимания, а также более эффективному распознаванию поворотов рынка по сравнению с традиционными индикаторами. Альтернативным японским свечам методом анализа поведения цен служат графики трехлинейного прорыва, а также графики Ренко и Каги, которые являются объектом исследования настоящей диссертации.

Ключевое отличие графиков Каги и Ренко от японских свечей заключается в том, что эти методы учитывают только изменения цен, игнорируя время. В отличие от японских свечей графики Каги и Ренко позволяют акцентировать внимание трейдера только на значительных колебаниях цен и не рассматривать “шумы”, а также дают лучшее представление об общих тенденциях рынка. В отличие от используемого в классических методах анализа “римановского подхода” построения Каги и Ренко реализуют “лебеговский подход”, когда за единицу отсчета времени принимается случайный период времени, за который изменение цены превышает некоторое заданное пороговое значение.

Происхождение методов Каги и Ренко связано с появившимися в Японии в 1870-х годах методами технического анализа, основанных на анализе колебаний цен. Впервые в литературе подробное описание методов Каги и Ренко, а также связанных с ними трейдинговых стратегий, было дано в книге С. Нисона². Следующий шаг в этом направлении был сделан в работах С.В. Пастухова^{5,6,7}, где приводится строгая математическая формализация

¹Bensignor R. *New thinking in Technical Analysis: Trading models for the masters*. Bloomberg Press, Princeton, 2000

²Nison S. *Beyond candlesticks: new Japanese charting techniques revealed*. Wiley, New York, 1994.

³Nison S. *Japanese Candlestick Charting Techniques: A Contemporary Guide to the Ancient Investment Techniques of the Far East*, New York Institute of Finance, New York, 1991.

⁴Nison S. *The candlestick course* Wiley, New Jersey, 2003.

⁵Пастухов С.В. *О некоторых вероятностно-статистических методах в техническом анализе*. ТВП, 49:2(2004), 297-316.

⁶Пастухов С.В. *Об Н-волатильности в финансовой математике*. Успехи мат. наук, 58:1 (2003), 191-192

⁷Пастухов С.В. *О некоторых вероятностно-статистических методах в техническом анализе*. Дис. канд. физ-мат. наук. Москва. 2004. 104 с.

построений Каги и Ренко, а также проводится статистический анализ соответствующих стратегий.

С построениями Каги и Ренко связаны трейдинговые стратегии, используемые на финансовых рынках. Основная идея стратегий Каги и Ренко состоит в том, что решения о продаже или покупке актива принимаются только в моменты смены тренда, которые, в свою очередь, определяются как моменты, когда отклонение цены от тренда превышает определенный порог. Этот подход позволяет акцентировать внимание инвестора только на достаточно больших колебаниях цены. На каждом шаге инвестор продает разницу в начале и конце восходящего тренда и покупает разницу посредством короткой продажи между началом и концом нисходящего тренда, надеясь на то, что эта разница будет отрицательной. Таким образом, стратегии Каги и Ренко ориентированы на получение прибыли на разнице в цене в начале и конце тренда, сигналы к смене которых поступают в случайные моменты времени, определяемые в дальнейшем как моменты Каги и Ренко.

Целью диссертационной работы является исследование методов Каги и Ренко теоретического характера, разработка методики для численного и аналитического анализа вероятностных характеристик моментов и стратегий Каги и Ренко, вывод свойств стратегий Каги и Ренко для наиболее известных в финансовой математике моделей для процесса цены.

Научная новизна. Основные результаты диссертации являются новыми. В диссертации получены следующие результаты:

- Получены выражения для математических ожиданий прибыли стратегий Каги и Ренко, и проведен качественный анализ полученных ответов для классических моделей финансовой математики.
- Получены выражения для преобразований Лапласа для моментов времени Каги и Ренко, позволяющие обобщить выражения для ожидаемой прибыли на случай произвольного временного интервала.
- Получены явные выражения для конечномерных распределений процесса цены в моменты Каги и Ренко, позволяющие найти распределение прибыли стратегий Каги и Ренко.

Методы исследования. В работе используются традиционные методы теории вероятностей, математического анализа и теории случайных процессов (теория марковских процессов, предельные теоремы, преобразование Лапласа).

Практическая значимость. Диссертация носит теоретический характер. Полученные результаты могут найти применение в финансовой математике, а также на практике при анализе доходности стратегий Каги и Ренко.

Апробация работы. Результаты работы докладывались автором на научных семинарах и конференциях:

- Семинар “Случайные процессы и стохастический анализ и теория мартингалов” под руководством член-корр. РАН, проф. А.Н. Ширяева механико-математический факультет, МГУ им. М.В. Ломоносова, неоднократно в 2008– 2011гг.
- “Большой семинар кафедры теории вероятностей”, рук. Ширяев А. Н., механико-математический факультет, МГУ им. М.В. Ломоносова, 2011 г.
- “Visions in Stochastics”, международный симпозиум, Москва, МИАН им. В. А. Стеклова РАН, 2010 г.

Публикации. Результаты диссертации опубликованы в 4 работах автора, в том числе в 3 журналах, входящих в список ВАК. Работ, написанных в соавторстве, нет. Список публикаций приведен в конце автореферата.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, 4 глав, разбитых на 16 параграфов, и списка литературы. Общий объем диссертации составляет 115 страниц. Список литературы включает в себя 23 наименования, включая 4 работы автора по теме диссертации.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении кратко говорится о происхождении и применении построений Каги и Ренко на практике, объясняется актуальность исследования этих методов инструментами теории вероятностей и теории случайных процессов. Приводится краткий обзор диссертации.

В Главе 1 дается определение моментов времени Каги и Ренко, а также определение соответствующих им стратегий, используемых на финансовых рынках. Дается строгая математическая формализация построений Каги и Ренко, основанная в работах С. Нисона⁸ и С.В. Пастухова⁹, дается опреде-

⁸Nison S. *Beyond candlesticks: new Japanese charting techniques revealed*. Wiley, New York, 1994.

⁹Пастухов С.В. *О некоторых вероятно-статистических методах в техническом анализе*. Дис. канд. физ-мат. наук. Москва. 2004. 104 с.

ление моментов Каги и Ренко, а также приводятся определения связанных с ними стратегий Каги и Ренко.

В параграфе 1.1 дается индуктивное определение моментов Каги $(\kappa_n)_{n \geq 0}$:

$$\kappa_0 = \inf\{u \geq 0 : \sup_{[0,u]} X - \inf_{[0,u]} X \geq H\}$$

- Если $X_{\kappa_0} = \sup_{[0,\kappa_0]} X$

$$\kappa_n = \begin{cases} \inf\{u \geq \kappa_{n-1} : X_u - \inf_{[\kappa_{n-1},u]} X \geq H\}, & \text{если } n - \text{четное} \\ \inf\{u \geq \kappa_{n-1} : \sup_{[\kappa_{n-1},u]} X - X_u \geq H\}, & \text{если } n - \text{нечетное} \end{cases}$$

- Если $X_{\kappa_0} = \inf_{[0,\kappa_0]} X$

$$\kappa_n = \begin{cases} \inf\{u \geq \kappa_{n-1} : \sup_{[\kappa_{n-1},u]} X - X_u \geq H\}, & \text{если } n - \text{четное} \\ \inf\{u \geq \kappa_{n-1} : X_u - \inf_{[\kappa_{n-1},u]} X \geq H\}, & \text{если } n - \text{нечетное} \end{cases}$$

где через X обозначен процесс с непрерывным временем, описывающий цену актива, а $H > 0$ является заданным пороговым значением. Аналогичное определение приводится для случая дискретного времени.

В параграфе 1.2 на основе приведенных ранее моментов Каги определяется понятие стратегии Каги. Определение дается через функцию $\gamma(t)$, которая задает количество актива в портфеле инвестора в момент времени $t \geq 0$. Стратегия Каги на отрезке $[0, \kappa_M]$ задается следующим образом:

$$\gamma^{Kagi}(t) = \text{sign}(X_{\kappa_0} - X_0) \sum_{m=1}^M (-1)^{m+1} \mathbf{I}(t \in [\kappa_{m-1}, \kappa_m))$$

Таким образом, до момента κ_0 инвестор не совершает никаких транзакций, в этот период определяется первоначальное направление тренда. Так, например, в случае восходящего первоначального тренда, когда $X_{\kappa_0} > X_0$, инвестор в момент времени κ_0 покупает единицу актива. Момент κ_1 является моментом смены тренда с восходящего на нисходящий, в этот момент инвестор продает имеющуюся у него единицу актива, а также совершает короткую продажу. Следовательно, в период времени между κ_1 и κ_2 в портфеле инвестора будет минус одна единица актива, то есть $\gamma^{Kagi}(t) = -1$, $t \in [\kappa_1, \kappa_2)$. В момент времени κ_2 следующей смены тренда инвестор вновь реформирует портфель так, чтобы в нем была одна единица актива, и так далее.

Прибыль от стратегии Каги на отрезке $[0, \kappa_M]$ имеет следующий вид:

$$V_M^{Kagi} = \sum_{m=1}^M (-1)^{m+1} (X_{\kappa_m} - X_{\kappa_{m-1}}) \mathbf{I}_U + \sum_{m=1}^M (-1)^m (X_{\kappa_m} - X_{\kappa_{m-1}}) \mathbf{I}_D$$

где события U и D определяют направление первоначального сигнала, подаваемого в момент времени κ_0 :

$$U = \{\omega \in \Omega: X_{\kappa_0} = \sup_{[0, \kappa_0]} X\}$$

$$D = \{\omega \in \Omega: X_{\kappa_0} = \inf_{[0, \kappa_0]} X\}$$

В **параграфе 1.3** дается индуктивное определение моментов Ренко $(\rho_n)_{n \geq 0}$. Сначала задается последовательность моментов времени $(\tilde{\rho}_n)_{n \geq 0}$:

$$\tilde{\rho}_0 = 0 \quad \dots \quad \tilde{\rho}_{i+1} = \inf\{u \geq \tilde{\rho}_i: |X_u - X_{\tilde{\rho}_i}| \geq H\}$$

На следующем шаге определяется процесс $\tilde{X} = (\tilde{X}_t)_{t \geq 0}$, который является дискретизацией исходного процесса цены X :

$$\tilde{X}_t = X_{\tilde{\rho}_i}, \text{ при } t \in [\tilde{\rho}_i, \tilde{\rho}_{i+1})$$

Моменты Ренко $(\rho_n)_{n \geq 0}$ определяются как моменты Каги, построенные для процесса $\tilde{X}$. Аналогичное определение приводится для случая дискретного времени.

В **параграфе 1.4** на основе приведенных ранее моментов Ренко определяется понятие стратегии Ренко. По аналогии со стратегией Каги под стратегией Ренко понимается правило, согласно которому сигналы на покупку или продажу подаются при смене тренда в моменты времени $(\rho_n)_{n \geq 0}$. Графики Ренко обычно изображаются в виде последовательностей из возрастающих белых и убывающих черных блоков. Каждый блок соответствует периоду времени между двумя соседними моментами Ренко ρ_n и ρ_{n+1} . Белый блок соответствует случаю $X_{\rho_n} < X_{\rho_{n+1}}$ и обозначает рост цены, черный блок соответствует случаю $X_{\rho_n} > X_{\rho_{n+1}}$ и обозначает падение цены. Сигналы к покупке подаются тогда, когда последовательность из черных блоков сменяется белым, а сигнал к продаже подается, когда последовательность из белых блоков сменяется черным. В отличие от случая Каги, набор стратегий на основе построений Ренко ограничен, и, как правило, под стратегией Ренко всегда подразумевается описанное выше правило. Функция $\gamma(t)$ в случае Ренко задается следующим образом:

$$\gamma^{Renko}(t) = \text{sign}(X_{\rho_0} - X_0) \sum_{m=1}^M (-1)^{m+1} \mathbf{I}(t \in [\rho_{m-1}, \rho_m))$$

Прибыль инвестора от стратегии Ренко на интервале времени $[0, \rho_M]$ имеет

следующий вид:

$$V_M^{Renko} = \sum_{m=1}^M (-1)^{m+1} (X_{\rho_m} - X_{\rho_{m-1}}) \mathbf{I}_U + \sum_{m=1}^M (-1)^m (X_{\rho_m} - X_{\rho_{m-1}}) \mathbf{I}_D$$

где события U и D имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} U &= \{\omega \in \Omega: X_{\rho_0} > X_0\} \\ D &= \{\omega \in \Omega: X_{\rho_0} < X_0\} \end{aligned}$$

В Главе 2 рассматриваются методы решения в общем случае, когда процесс цены представляет собой марковский процесс. Находятся основные вероятностные характеристики, связанные с процессом цены, необходимые для решения задачи поиска математического ожидания прибыли от стратегий Каги и Ренко, а также задач поиска распределений моментов Каги и Ренко и конечномерных распределений процесса цены в эти моменты времени. В некоторых частных случаях указывается явный вид для преобразования Лапласа для моментов Каги и Ренко, а также явный вид для конечномерных распределений процесса цены в эти моменты времени.

В параграфе 2.1 рассматриваются основные методы исследования, связанные с построением Каги. Показывается, что задача сводится к исследованию свойств следующих моментов остановки:

$$\begin{aligned} \gamma_{\max} &= \inf\{u \geq 0: \sup_{[0,u]} X - X_u \geq H\} \\ \gamma_{\min} &= \inf\{u \geq 0: X_u - \inf_{[0,u]} X \geq H\} \\ \kappa_0 &= \inf\{u \geq 0: \sup_{[0,u]} X - \inf_{[0,u]} X \geq H\} \end{aligned}$$

В частности, приводятся рекуррентные соотношения для преобразования Лапласа для моментов Каги:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} e^{-\lambda \kappa_n} \mathbf{I}_U &= \begin{cases} \mathbf{E} e^{-\lambda \kappa_{n-1}} \mathbf{I}_U \mathbf{E}_{X_{\kappa_{n-1}}} e^{-\lambda \gamma_{\max}}, & \text{при нечетном } n \\ \mathbf{E} e^{-\lambda \kappa_{n-1}} \mathbf{I}_U \mathbf{E}_{X_{\kappa_{n-1}}} e^{-\lambda \gamma_{\min}}, & \text{при четном } n \end{cases} \\ \mathbf{E} e^{-\lambda \kappa_n} \mathbf{I}_D &= \begin{cases} \mathbf{E} e^{-\lambda \kappa_{n-1}} \mathbf{I}_D \mathbf{E}_{X_{\kappa_{n-1}}} e^{-\lambda \gamma_{\min}}, & \text{при нечетном } n \\ \mathbf{E} e^{-\lambda \kappa_{n-1}} \mathbf{I}_D \mathbf{E}_{X_{\kappa_{n-1}}} e^{-\lambda \gamma_{\max}}, & \text{при четном } n \end{cases} \end{aligned}$$

Если приведенные выше математические ожидания не зависят от начального положения x , то преобразование Лапласа для момента Каги κ_n можно записать в явном виде:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} e^{-\lambda \kappa_n} &= \mathbf{E} e^{-\lambda \kappa_0} \mathbf{I}_U (\mathbf{E} e^{-\lambda \gamma_{\max}})^{\lceil \frac{n}{2} \rceil} (\mathbf{E} e^{-\lambda \gamma_{\min}})^{\lceil \frac{n-1}{2} \rceil} + \\ &\quad + \mathbf{E} e^{-\lambda \kappa_0} \mathbf{I}_D (\mathbf{E} e^{-\lambda \gamma_{\max}})^{\lceil \frac{n-1}{2} \rceil} (\mathbf{E} e^{-\lambda \gamma_{\min}})^{\lceil \frac{n}{2} \rceil} \end{aligned}$$

где $\lceil x \rceil = \min\{n \in \mathbb{Z} : n \geq x\}$.

Для вычисления конечномерных распределений процесса X в моменты времени Каги $\text{Law}(X_{\kappa_0}, X_{\kappa_1}, \dots, X_{\kappa_n})$ в дискретном случае ключевую роль играют следующие рекуррентные соотношения, которые непосредственно выводятся из определения моментов Каги:

- при нечетном n и $k_0 > X_0$, либо при четном n и $k_0 < X_0$:

$$\mathbf{P}(X_{\kappa_n} = k_n \mid X_{\kappa_{n-1}} = k_{n-1}, X_{\kappa_0} = k_0) = \mathbf{P}_{k_{n-1}}(X_{\gamma_{\max}} = k_n)$$

- при четном n и $k_0 > X_0$, либо при нечетном n и $k_0 < X_0$:

$$\mathbf{P}(X_{\kappa_n} = k_n \mid X_{\kappa_{n-1}} = k_{n-1}, X_{\kappa_0} = k_0) = \mathbf{P}_{k_{n-1}}(X_{\gamma_{\min}} = k_n)$$

Отсюда выводится полная формула для конечномерных распределений:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(X_{\kappa_0} = k_0, X_{\kappa_1} = k_1, \dots, X_{\kappa_n} = k_n) &= \mathbf{P}^{(n)}(k_0, \dots, k_n) = \\ &= \mathbf{P}^{(0)}(k_0) \prod_{l=0}^{\lceil \frac{n-1}{2} \rceil - 1} \mathbf{P}_{k_{2l+1}}(X_{\gamma_{\min}} = k_{2l+2}) \prod_{l=0}^{\lceil \frac{n-2}{2} \rceil} \mathbf{P}_{k_{2l}}(X_{\gamma_{\max}} = k_{2l+1}) \mathbf{I}(k_0 > X_0) + \\ &+ \mathbf{P}^{(0)}(k_0) \prod_{l=0}^{\lceil \frac{n-1}{2} \rceil - 1} \mathbf{P}_{k_{2l+1}}(X_{\gamma_{\max}} = k_{2l+2}) \prod_{l=0}^{\lceil \frac{n-2}{2} \rceil} \mathbf{P}_{k_{2l}}(X_{\gamma_{\min}} = k_{2l+1}) \mathbf{I}(k_0 < X_0) \end{aligned}$$

Аналогичным образом, выводится плотность конечномерных распределений процесса X в моменты времени Каги для непрерывного времени:

$$\begin{aligned} f_{X_{\kappa_m}, X_{\kappa_{m-1}}, \dots, X_{\kappa_0}}(z_m, z_{m-1}, \dots, z_0) &= f^{(n)}(z_0, z_1, \dots, z_n) = \\ &= f_{X_{\kappa_0}}(z_0) \prod_{l=0}^{\lceil \frac{n-1}{2} \rceil - 1} f_{\min, z_{2l+1}}(z_{2l+2}) \prod_{l=0}^{\lceil \frac{n-2}{2} \rceil} f_{\max, z_{2l}}(z_{2l+1}) \mathbf{I}(z_0 > X_0) + \\ &+ f_{X_{\kappa_0}}(z_0) \prod_{l=0}^{\lceil \frac{n-1}{2} \rceil - 1} f_{\max, z_{2l+1}}(z_{2l+2}) \prod_{l=0}^{\lceil \frac{n-2}{2} \rceil} f_{\min, z_{2l}}(z_{2l+1}) \mathbf{I}(z_0 < X_0) \quad (1) \end{aligned}$$

где функции $f_{\max, z_0}$ и $f_{\min, z_0}$ задают, соответственно, плотности величин $X_{\gamma_{\max}}$ и $X_{\gamma_{\min}}$ при условии, что процесс X начинает движение из точки z_0 .

В **параграфе 2.2** рассматриваются основные методы исследования, связанные с построением Ренко. Вводится определение процесса $\tilde{X}^d$, который является дискретной версией процесса $\tilde{X}$, используемого при построении моментов Ренко:

$$X_{\tilde{\rho}_n} = \tilde{X}_{\tilde{\rho}_n} = x_0 + \tilde{X}_n^d \cdot H$$

Процесс $\tilde{X}^d$ является случайным блужданием с вероятностями положитель-

ного и отрицательного скачка на каждом шаге, имеющими следующий вид:

$$\begin{aligned} p(k) &= \mathbf{P}_{x_0+kH}(X_{\tau_k} = x_0 + (k+1)H) \\ q(k) &= \mathbf{P}_{x_0+kH}(X_{\tau_k} = x_0 + (k-1)H) \end{aligned}$$

где k – текущее положение процесса $\tilde{X}^d$, а момент времени τ_k определяется как момент первого выхода траектории процесса X на границу отрезка $[x_0 + (k-1)H, x_0 + (k+1)H]$. Для процесса $\tilde{X}^d$ рассматривается пороговое значение $H^d = 1$ и строится последовательность $(\rho_n^d)_{n \geq 0}$ моментов Каги, которая при данном пороговом значении совпадает с последовательностью моментов Ренко. Формулы перехода между моментами Ренко для процесса X и построенной последовательностью случайных моментов $(\rho_n^d)_{n \geq 0}$ задается следующим образом:

$$\begin{aligned} \rho_n &= \sum_{i=1}^{\rho_n^d} \tilde{\rho}_i, \text{ п.н.} \\ X_{\rho_n} &= \tilde{X}_{\rho_n} = x_0 + \tilde{X}_{\rho_n^d}^d \cdot H \end{aligned}$$

Прибыль инвестора от стратегии Ренко в новых обозначениях имеет следующий вид:

$$V_M^d = \text{sign}(\tilde{X}_{\rho_0^d}^d) H \sum_{m=1}^M (-1)^{m+1} (\tilde{X}_{\rho_m^d}^d - \tilde{X}_{\rho_{m-1}^d}^d)$$

Таким образом, показано, что конструкция Ренко для процессов с дискретным и непрерывным временем сводится к построению Каги для случайного блуждания с вероятностями успеха и неудачи $p(k)$ и $q(k)$.

В Главе 3 рассматриваются свойства метода Каги на примере конкретных моделей для процесса цены, используемых в финансовой математике. Для случая дискретного времени приводятся решения в явном виде для модели со случайным блужданием и биномиальной модели. Для непрерывного времени приводится способ решения в случае, когда процесс цены является однородным диффузионным процессом, дается явный вид решения для случая броуновского движения, а также качественное исследование стратегии Каги для случая геометрического броуновского движения.

В параграфе 3.1.1 для случайного блуждания $X = (X_n)_{n \geq 0}$:

$$X_n = \sum_{i=1}^n \xi_i, \quad \mathbf{P}(\xi_i = 1) = p, \quad \mathbf{P}(\xi = -1) = q$$

доказываются свойства, связанные с первым моментом выхода процесса X из заданного интервала, величинами “падения” и “размаха”, соответственно. Основные результаты приведены в леммах 3.1, 3.2 и 3.3. В частности, получен

явный вид преобразований Лапласа для моментов остановки $\gamma_{\max}$, $\gamma_{\min}$ и κ_0 , а также приведено распределение вероятностей процесса X в эти моменты времени. Отсюда с использованием изложенных в Главе 1 методов решения задач, связанных с построением Каги, в явном виде выводятся преобразования Лапласа для моментов $(\kappa_n)_{n \geq 0}$, математические ожидания моментов Каги, а также конечномерные распределения процесса цены в эти моменты времени. Ожидаемая прибыль от стратегии Каги при $\nu = p/q \neq 1$ имеет вид:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} V_M^{Kagi} = (p - q) S_{\max} \left(\left\lceil \frac{M}{2} \right\rceil P_U + \left\lceil \frac{M-1}{2} \right\rceil P_D \right) - \\ - (p - q) S_{\min} \left(\left\lceil \frac{M-1}{2} \right\rceil P_U + \left\lceil \frac{M}{2} \right\rceil P_D \right) \end{aligned}$$

где $\nu = p/q$,

$$\begin{aligned} P_U = \mathbf{P}(X_{\kappa_0} > 0) &= \sum_{k=1}^H \mathbf{P}(X_{\kappa_0} = k) = \sum_{k=1}^H \frac{\nu^{H+k+1} - \nu^{H+1} + \nu^H - \nu^{H+k}}{(1 - \nu^H)(1 - \nu^{H+1})} \\ P_D = \mathbf{P}(X_{\kappa_0} < 0) &= \sum_{k=-H}^{-1} \mathbf{P}(X_{\kappa_0} = k) = \sum_{k=1}^H \frac{-\nu^{H-k+1} + \nu^{H+1} - \nu^H + \nu^{H-k}}{(1 - \nu^H)(1 - \nu^{H+1})} \\ S_{\max} &= \frac{1}{p - q} \left(\frac{\nu - \nu^{H+1}}{1 - \nu} - H \right), \quad S_{\min} = \frac{1}{p - q} \left(H - \frac{1 - \nu^H}{\nu^H - \nu^{H+1}} \right) \end{aligned}$$

В мартингальном случае $\nu = 1$ ожидаемая прибыль равна нулю. В частности, на интервале с четным числом моментов Каги $[0, \kappa_{2N}]$ имеем:

$$\mathbf{E} V_{2N} = N \frac{-\nu^{2H+1} + (2H + 1)\nu^{H+1} - (2H + 1)\nu^H + 1}{\nu^H(1 - \nu)}$$

Эта величина является положительной при любом $\nu \neq 1$, что приводит к тому, что ожидаемая прибыль на бесконечном временном интервале равна бесконечности, если рынок является направленным ($p \neq q$).

В параграфе 3.1.2 для геометрического случайного блуждания X :

$$X_n = X_0 a^{\sum_{k=0}^n \xi_k}, \quad \mathbf{P}(\xi_i = 1) = p, \quad \mathbf{P}(\xi = -1) = q$$

доказываются две леммы, связанные величинами “падения” и “размаха”, соответственно. Изучение свойств момента первого выхода процесса X из заданного интервала, очевидным образом сводятся к уже полученным ранее вероятностным характеристикам момента первого выхода для случайного блуждания. Вместо фиксированного порогового значения H рассматривается фиксированное процентное пороговое значение α и плавающее пороговое

значение H_n :

$$H_n = \alpha X_n = \alpha X_0 a^{\sum_{k=0}^n \xi_k}$$

В Лемме 3.4 выводятся преобразования Лапласа, математические ожидания моментов $\gamma_{\max}$ и $\gamma_{\min}$, а также задается распределение величин $X_{\gamma_{\max}}$ и $X_{\gamma_{\min}}$. В Лемме 3.5 изложены основные результаты, касающиеся свойств момента κ_0 для процесса X . В том числе приводится явный вид распределения величины X_{κ_0} . Из Леммы 3.5 выводятся математические ожидания $\mathbf{E} X_{\kappa_0} \mathbf{I}_U$ и $\mathbf{E} X_{\kappa_0} \mathbf{I}_D$, необходимые для вычисления ожидаемой прибыли от стратегии Каги. Используя строго марковское свойство процесса X и его мультипликативную структуру, показывается, что имеет место следующее представление для распределений процесса X в моменты времени Каги:

$$\begin{aligned} X_{\kappa_m} \mathbf{I}_U &\stackrel{d}{=} X_{\kappa_0} \mathbf{I}_U \prod_{k=1}^{\lceil m/2 \rceil} \xi_{\max}^{(k)} \prod_{k=1}^{\lceil (m-1)/2 \rceil} \xi_{\min}^{(k)} \\ X_{\kappa_m} \mathbf{I}_D &\stackrel{d}{=} X_{\kappa_0} \mathbf{I}_D \prod_{k=1}^{\lceil m/2 \rceil} \xi_{\min}^{(k)} \prod_{k=1}^{\lceil (m-1)/2 \rceil} \xi_{\max}^{(k)} \end{aligned}$$

где $\lceil x \rceil = \min\{n \in \mathbb{Z} : n \geq x\}$, а величины $(\xi_{\max}^{(k)})_{k \geq 1}$ и $(\xi_{\min}^{(k)})_{k \geq 1}$ образуют серии из независимых одинаково распределенных величин, независимые друг от друга и от X_{κ_0} , распределение которых задается следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\xi_{\max}^{(1)} = a^k) &= \mathbf{P}_1(X_{\gamma_{\max}} = a^{k-H_+}), \quad k \geq 0 \\ \mathbf{P}(\xi_{\min}^{(1)} = a^k) &= \mathbf{P}_1(X_{\gamma_{\min}} = a^{-k+H_-}), \quad k \geq 0 \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} H_+ &= \lceil \log_a(1 + \alpha a) \rceil \\ H_- &= \left\lceil \log_a \left(\frac{1}{1 - \alpha/a} \right) \right\rceil \end{aligned}$$

Из этого представления выводится полная формула для ожидаемой прибыли от стратегии Каги:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} V_M^{Kagi} &= \mathbf{E} X_{\kappa_0} \mathbf{I}_U \left((P-1) \frac{1 - (PQ)^{\lceil M/2 \rceil}}{1 - PQ} - P(Q-1) \frac{1 - (PQ)^{\lceil (M-1)/2 \rceil}}{1 - PQ} \right) + \\ &+ \mathbf{E} X_{\kappa_0} \mathbf{I}_D \left(-(Q-1) \frac{1 - (PQ)^{\lceil M/2 \rceil}}{1 - PQ} + Q(P-1) \frac{1 - (PQ)^{\lceil (M-1)/2 \rceil}}{1 - PQ} \right) \end{aligned}$$

где величины P и Q являются математическими ожиданиями величин $X_{\gamma_{\max}}$ и $X_{\gamma_{\min}}$, соответственно, в предположении, что процесс X начинает движение

из точки 1:

$$P = \mathbf{E}_1 X_{\gamma_{\max}} = \frac{a^{-H_+} \alpha^{[-H_+, 1]}}{1 - a \beta^{[-H_+, 1]}}$$

$$Q = \mathbf{E}_1 X_{\gamma_{\min}} = \frac{a^{H_-} \beta^{[-1, H_-]}}{1 - \alpha^{[-1, H_-]}/a}$$

В параграфе 3.2.1 выводятся свойства моментов Каги для однородного диффузионного процесса X , задаваемого уравнением:

$$dX_t = \mu(X_t) dt + \sigma(X_t) dB_t, \quad t \geq 0$$

где $(B_t)_{t \geq 0}$ – стандартное броуновское движение, а функции $\mu(x)$ и $\sigma(x) > 0$ удовлетворяют условию Липшица. В леммах 3.7 и 3.8 выводятся преобразования Лапласа для моментов остановки $\gamma_{\max}$, $\gamma_{\min}$ и κ_0 , а также приводятся выражения для функций распределения величин $\sup_{s \leq \gamma_{\max}} X_s$, $\inf_{s \leq \gamma_{\min}} X_s$ и X_{κ_0} .

Полученные результаты используются для решения задач о распределении приращений процесса X между двумя соседними моментами Каги. Метод решения задач, связанных с “падением” и “размахом”, основан на дискретизации непрерывных траекторий процесса X , позволяющей свести данные задачи к решению задач о выходе процесса X из заданного интервала. В частности, из леммах 3.7 и 3.8 следует, что

$$f_{\max, x_0}(x) = \exp \left(- \int_{x_0}^{x+H} \frac{\varphi(y, x_0)}{\int_{y-H}^y \varphi(z, x_0) dz} dy \right) \frac{\varphi(x+H, x_0)}{\int_x^{x+H} \varphi(z, x_0) dz}, \quad x \geq x_0 - H$$

$$f_{\min, x_0}(x) = \exp \left(- \int_{x-H}^{x_0} \frac{\varphi(y, x-H)}{\int_y^{y+H} \varphi(z, x-H) dz} dy \right) \frac{1}{\int_{x-H}^x \varphi(z, x-H) dz}, \quad x \leq x_0 + H$$

$$f_{X_{\kappa_0}}(x) = \begin{cases} \varphi(x-H, x_0-H) \frac{\int_{x_0}^x \varphi(z, x_0-H) dz}{\left(\int_{x-H}^x \varphi(z, x_0-H) dz \right)^2}, & x_0 < x \leq x_0 + H \\ \varphi(x+H, x) \frac{\int_x^{x_0} \varphi(z, x) dz}{\left(\int_x^{x+H} \varphi(z, x) dz \right)^2}, & x_0 - H \leq x < x_0 \end{cases}$$

где $f_{\max, x_0}$ – плотность распределения процесса X в момент $\gamma_{\max}$ в предположении, что X начинает движение из точки x_0 , через $f_{\min, x_0}$ – плотность распределения процесса X в момент $\gamma_{\min}$, $f_{X_{\kappa_0}}$ – плотность распределения

величины X_{κ_0} . Функция φ задается следующим образом:

$$\varphi(x, y) = \exp \left(- \int_y^x 2 \frac{\mu(z)}{\sigma^2(z)} dz \right)$$

Тогда плотность конечномерного распределения процесса X в моменты Каги задается с помощью (1). Отсюда интегрированием можно вывести выражение для ожидаемой прибыли от стратегии Каги. Полученный результат, хотя и выводится в явном виде, достаточно сложен для качественного анализа и интерпретации стратегии Каги. Поэтому оставшаяся часть данной главы посвящена анализу поведения стратегии Каги на примере двух частных случаев рассматриваемой модели: случаю броуновского движения и геометрического броуновского движения.

В параграфе 3.2.2 исследуются свойства моментов Каги для стандартного броуновского движения со сносом:

$$X_t = \mu t + \sigma B_t, \quad \mu \in \mathbb{R}, \quad \sigma > 0$$

Основной результат приведен в Теореме 3.1:

Теорема. Для произвольного порогового значения $H > 0$ и броуновского движения со сносом X справедливы следующие свойства:

При четном $m \geq 2$:

$$\begin{aligned} P((X_{\kappa_m} - X_{\kappa_{m-1}})I(X_{\kappa_0} > 0) \leq x) &= P_D I(x \geq 0) + P_U P(\zeta_{\min} \leq x) \\ P((X_{\kappa_m} - X_{\kappa_{m-1}})I(X_{\kappa_0} < 0) \leq x) &= P_U I(x \geq 0) + P_D P(\zeta_{\max} \leq x) \end{aligned}$$

При нечетном $m \geq 2$:

$$\begin{aligned} P((X_{\kappa_m} - X_{\kappa_{m-1}})I(X_{\kappa_0} > 0) \leq x) &= P_D I(x \geq 0) + P_U P(\zeta_{\max} \leq x) \\ P((X_{\kappa_m} - X_{\kappa_{m-1}})I(X_{\kappa_0} < 0) \leq x) &= P_U I(x \geq 0) + P_D P(\zeta_{\min} \leq x) \end{aligned}$$

где $P_U = P(X_{\kappa_0} > 0)$, $P_D = P(X_{\kappa_0} < 0)$. А также:

При $\mu \neq 0$:

$$\begin{aligned} Law(H - \zeta_{\min}) &= Exp \left(\frac{2\mu/\sigma^2}{1 - \exp(-2\mu H/\sigma^2)} \right) \\ Law(H + \zeta_{\max}) &= Exp \left(\frac{2\mu/\sigma^2}{\exp(2\mu H/\sigma^2) - 1} \right) \end{aligned}$$

При $\mu = 0$:

$$Law(H - \zeta_{\min}) = Law(H + \zeta_{\max}) = Exp \left(\frac{1}{H} \right)$$

Доказательство Теоремы 3.1 проводится путем предельного перехода от

случайного блуждания

$$X_t^{(dt)} = \sigma \sqrt{dt} \sum_{i=1}^{[t/dt]} \xi_i + \frac{t - [t/dt]dt}{dt} \sigma \sqrt{dt} \xi_{[t/dt]+1}, \quad \mathbf{P}(\xi_i = \pm 1) = \frac{\sigma \pm \mu \sqrt{dt}}{2\sigma}$$

к броуновскому движению X . В леммах 3.9 и 3.10 приводится обоснование сходимости моментов Каги для дискретного процесса $X^{(dt)}$ к их непрерывным аналогам. Леммы 3.11, 3.12 и 3.13 являются аналогами лемм о моменте выхода на границу интервала, величинах “падения” и “размаха” для случайного блуждания и также доказываются путем предельного перехода. В частности, получены следующие результаты для броуновского движения X :

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(0 < X_{\kappa_0} \leq x) &= \begin{cases} \frac{\exp(2\mu x/\sigma^2) - 1 - 2\mu x/\sigma^2}{(\exp(2\mu H/\sigma^2) - 1)(1 - \exp(-2\mu H/\sigma^2))}, & x \leq H, \text{ при } \mu \neq 0 \\ \frac{x^2}{2H^2}, & x \leq H, \text{ при } \mu = 0 \end{cases} \\ \mathbf{P}(-x \leq X_{\kappa_0} < 0) &= \begin{cases} \frac{\exp(-2\mu x/\sigma^2) - 1 + 2\mu x/\sigma^2}{(\exp(2\mu H/\sigma^2) - 1)(1 - \exp(-2\mu H/\sigma^2))}, & x \leq H, \text{ при } \mu \neq 0 \\ \frac{x^2}{2H^2}, & x \leq H, \text{ при } \mu = 0 \end{cases} \\ P_U = \mathbf{P}(X_{\kappa_0} > 0) &= \begin{cases} \frac{\exp(2\mu H/\sigma^2) - 1 - 2\mu H/\sigma^2}{(\exp(2\mu H/\sigma^2) - 1)(1 - \exp(-2\mu H/\sigma^2))}, & \text{при } \mu \neq 0 \\ 1/2, & \text{при } \mu = 0 \end{cases} \\ P_D = \mathbf{P}(X_{\kappa_0} < 0) &= \begin{cases} \frac{\exp(-2\mu H/\sigma^2) - 1 + 2\mu H/\sigma^2}{(\exp(2\mu H/\sigma^2) - 1)(1 - \exp(-2\mu H/\sigma^2))}, & \text{при } \mu \neq 0 \\ 1/2, & \text{при } \mu = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Из Теоремы 3.1 выводится полная формула для ожидаемой прибыли от стратегии Каги

$$\begin{aligned} \mathbf{E} V_M &= \frac{\exp(2\mu H/\sigma^2) - 2\mu H/\sigma^2 - 1}{2\mu/\sigma^2} \left(P_U \left\lceil \frac{M}{2} \right\rceil + P_D \left\lceil \frac{M-1}{2} \right\rceil \right) - \\ &\quad - \frac{\exp(-2\mu H/\sigma^2) + 2\mu H/\sigma^2 - 1}{2\mu/\sigma^2} \left(P_U \left\lceil \frac{M-1}{2} \right\rceil + P_D \left\lceil \frac{M}{2} \right\rceil \right) \end{aligned}$$

В частности на отрезке с четным числом моментов Каги $[0, \kappa_{2N}]$ прибыль имеет вид:

$$\mathbf{E} V_{2N} = N \frac{\sinh(2\mu H/\sigma^2) - 2\mu H/\sigma^2}{\mu/\sigma^2}$$

Эта величина всегда положительна при $\mu \neq 0$. Как и в случае со случайным блужданием, стратегия Каги приносит положительную ожидаемую прибыль на направленных рынках.

В параграфе 3.2.3 рассматривается другой частный случай изложенных в параграфе 3.2.1 результатов. Для геометрического броуновского движения X :

$$dX_t = \mu X_t dt + \sigma X_t dB_t, \quad t \geq 0$$

выводятся вероятностные характеристики моментов Каги. В рамках данной модели процесс цены является ограниченным снизу, и из-за фиксированного порогового значения возникает ситуация, когда моменты Каги не определены. Показано, что при $\theta = 1 - \frac{2\mu}{\sigma^2} > 0$ и $z_0 < H$ вероятности $P_{z_0}(\gamma_{\max} = \infty)$ и $P_{z_0}(\gamma_{\min} = \infty)$ отличны от нуля. Это означает, что с ненулевой вероятностью построение Каги оборвется на некотором моменте κ_n , и, следовательно, стратегия Каги не определена полностью. Рассматриваются следующие способы разрешения этой ситуации:

1. **[Условие отражения]**. Вычисляется условное распределение прибыли от стратегии Каги при условии, что все моменты $\gamma_{\max}, \gamma_{\min}$ конечны.
2. **[Условие разорения]**. Если для некоторой траектории процесса X определены моменты $\kappa_0, \dots, \kappa_m$, а момент κ_{m+1} не определен, то это интерпретируется как разорение эмитента актива. Цена актива после момента κ_m полагается равной нулю.

В связи с этим выводятся два вида плотности величин $X_{\gamma_{\max}}$ и $X_{\gamma_{\min}}$:

$$f_{\max, z_0}(x \mid \gamma_{\max} < \infty) = \exp \left(- \int_{z_0 \vee H}^{x+H} \frac{dR(y)}{R(y) - R(y-H)} \right) \frac{dR(x+H)/dx}{R(x+H) - R(x)}$$

$$f_{\min, z_0}(x \mid \gamma_{\min} < \infty) = \begin{cases} \exp \left(- \int_{x-H}^{z_0} \frac{dR(y)}{R(y+H) - R(y)} \right) \frac{dR(x-H)/dx}{R(x) - R(x-H)}, & \text{при } \theta \leq 0 \\ \frac{\exp \left(- \int_{x-H}^{z_0} \frac{dR(y)}{R(y+H) - R(y)} \right) \frac{dR(x-H)/dx}{R(x) - R(x-H)}}{1 - \exp \left(- \int_0^{z_0} \frac{dR(y)}{R(y+H) - R(y)} \right)}, & \text{при } \theta > 0 \end{cases} \quad (2)$$

$$f_{\max, z_0}(x) = \begin{cases} \exp \left(- \int_{z_0 \vee H}^{x+H} \frac{dR(y)}{R(y) - R(y-H)} \right) \frac{dR(x+H)/dx}{R(x+H) - R(x)}, & \text{при } \theta \leq 0 \\ \frac{(z_0 \wedge H)^\theta}{H^\theta} \exp \left(- \int_{z_0 \vee H}^{x+H} \frac{dR(y)}{R(y) - R(y-H)} \right) \frac{dR(x+H)/dx}{R(x+H) - R(x)}, & \text{при } \theta > 0 \end{cases} \quad (3)$$

$$f_{\min, z_0}(x) = \exp \left(- \int_{x-H}^{z_0} \frac{dR(y)}{R(y+H) - R(y)} \right) \frac{dR(x-H)/dx}{R(x) - R(x-H)}$$

где

$$R(x) = \begin{cases} x^\theta, & \text{при } \theta \neq 0 \\ \ln(x), & \text{при } \theta = 0 \end{cases}$$

Кроме того, для момента остановки $\kappa_0 = \inf\{t \geq 0 : S_t - I_t \geq H\}$ из параграфа

3.2.1 следует, что

$$f_{X_{\kappa_0}}(x) = \begin{cases} \frac{dR(x-H)}{dx} \frac{R(x)-R(x_0)}{(R(x)-R(x-H))^2}, & \text{при } x_0 \leq x \leq x_0 + H \\ \frac{dR(x+H)}{dx} \frac{R(x_0)-R(x)}{(R(x+H)-R(x))^2}, & \text{при } x_0 - H \leq x \leq x_0 \end{cases}$$

Тогда конечномерные распределения $(X_{\kappa_m}, \dots, X_{\kappa_0})$ по формуле (1), где в качестве плотностей $f_{\min}$ и $f_{\max}$ используются функции (2) для условия отражения, и (3) для условия разорения. Отсюда можно численно получить математические ожидания приращений цены между соседними моментами Каги:

$$\mathbf{E}(X_{\kappa_m} - X_{\kappa_{m-1}})\mathbf{I}_U, \quad \mathbf{E}(X_{\kappa_m} - X_{\kappa_{m-1}})\mathbf{I}_D, \quad k \geq 1$$

и математическое ожидание прибыли от стратегии Каги:

$$\mathbf{E} V_M^{Kagi} = \sum_{m=1}^M (-1)^{m+1} \mathbf{E}(X_{\kappa_m} - X_{\kappa_{m-1}})\mathbf{I}_U + \sum_{m=1}^M (-1)^m \mathbf{E}(X_{\kappa_m} - X_{\kappa_{m-1}})\mathbf{I}_D$$

В Главе 4 рассматриваются свойства метода Ренко на примере моделей для процесса цены, используемых в третьей главе. Для случая дискретного времени все ответы приводятся в явном виде. Для случая непрерывного времени приводится способ решения в случае, когда процесс цены является однородным диффузионным процессом, дается явный вид решения для случая броуновского движения, а также качественное исследование стратегии Ренко для случая геометрического броуновского движения.

В параграфе 4.1.1 рассматриваются вопросы, связанные с распределением моментов Ренко для модели со случайным блужданием. В явном виде выводятся формулы для конечномерных распределений $(X_{\rho_m}, \dots, X_{\rho_0})$, преобразований Лапласа для моментов $(\rho_n)_{n \geq 0}$ и математического ожидания прибыли от стратегии Ренко. Для случайного блуждания $X = (X_n)_{n \geq 0}$, определенного в параграфе 3.1.1, показывается, что соответствующий ему процесс $\tilde{X}^d$ также является случайным блужданием с вероятностями успеха и неудачи на каждом шаге $p(k)$ и $q(k)$:

$$p(k) = \frac{\nu^H}{1 + \nu^H}, \quad q(k) = \frac{1}{1 + \nu^H}, \quad \nu = p/q$$

Таким образом, изучение случая Ренко для случайного блуждания сводится к уже полученным результатам для случая Каги и случайного блуждания $\tilde{X}^d$ с пороговым значением $H^d = 1$. В частности, ожидаемая прибыль имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} V_M^{Renko} = & H \frac{\nu^H - 1}{\nu^H + 1} S_{\max} \left(\left\lceil \frac{M}{2} \right\rceil P_U + \left\lfloor \frac{M-1}{2} \right\rfloor P_D \right) - \\ & - H \frac{\nu^H - 1}{\nu^H + 1} S_{\min} \left(\left\lceil \frac{M-1}{2} \right\rceil P_U + \left\lfloor \frac{M}{2} \right\rfloor P_D \right) \end{aligned}$$

где

$$S_{\max} = \nu^H + 1, \quad S_{\min} = \nu^{-H} + 1, \quad P_U = \frac{\nu^H}{1 + \nu^H}, \quad P_D = \frac{1}{1 + \nu^H}$$

В параграфе 4.1.2 для определенного в Главе 3 геометрического случайного блуждания X :

$$X_n = X_0 a^{\sum_{k=0}^n \xi_k}, \quad \mathbf{P}(\xi_i = 1) = p, \quad \mathbf{P}(\xi = -1) = q$$

рассматривается построение моментов Ренко для изменяющегося во времени порогового значения H_n , определяемого по правилу:

$$H_n = \alpha X_{\tilde{\rho}_n}$$

В качестве процесса $\tilde{X}^d$ рассматривается дискретное случайное блуждание с шагом H_n :

$$X_{\tilde{\rho}_n} = \tilde{X}_n^d$$

Показывается, что на n -м шаге процесс $\tilde{X}^d$ совершает скачок, равный $\pm H_n$, с вероятностями $p(0)$ и $q(0)$, соответственно:

$$p(0) = \frac{1 - (q/p)^{\lceil \log_a(1-\alpha) \rceil}}{(q/p)^{\lceil \log_a(1+\alpha) \rceil} - (q/p)^{\lceil \log_a(1-\alpha) \rceil}}$$

$$q(0) = \frac{(q/p)^{\lceil \log_a(1+\alpha) \rceil} - 1}{(q/p)^{\lceil \log_a(1+\alpha) \rceil} - (q/p)^{\lceil \log_a(1-\alpha) \rceil}}$$

По аналогии со случаем Каги показывается, что распределение $\tilde{X}^d$ в моменты времени Ренко обладают следующим свойством:

$$\tilde{X}_{\rho_m^d}^d \mathbf{I}(\tilde{X}_{\rho_0^d}^d > x_0) \stackrel{d}{=} \tilde{X}_{\rho_0^d}^d \mathbf{I}(\tilde{X}_{\rho_0^d}^d > x_0) \prod_{k=1}^{\lceil m/2 \rceil} \xi_{\max}^{(k)} \prod_{k=1}^{\lceil m/2 \rceil} \xi_{\min}^{(k)}$$

$$\tilde{X}_{\rho_m^d}^d \mathbf{I}(\tilde{X}_{\rho_0^d}^d < x_0) \stackrel{d}{=} \tilde{X}_{\rho_0^d}^d \mathbf{I}(\tilde{X}_{\rho_0^d}^d < x_0) \prod_{k=1}^{\lceil m/2 \rceil} \xi_{\min}^{(k)} \prod_{k=1}^{\lceil m/2 \rceil} \xi_{\max}^{(k)}$$

где $\lceil x \rceil = \min\{n \in \mathbb{Z} : n \geq x\}$, а величины $(\xi_{\max}^{(k)})_{k \geq 1}$ и $(\xi_{\min}^{(k)})_{k \geq 1}$ образуют серии из независимых одинаково распределенных величин, независимые друг от друга и от $\tilde{X}_{\rho_0^d}^d$, распределение которых задается следующим образом:

$$\mathbf{P}(\xi_{\max}^{(1)} = (1 - \alpha)(1 + \alpha)^k) = \mathbf{P}_1(\tilde{X}_{\gamma_{\max}^d}^d = (1 - \alpha)(1 + \alpha)^k), \quad k \geq 0$$

$$\mathbf{P}(\xi_{\min}^{(1)} = (1 + \alpha)(1 - \alpha)^k) = \mathbf{P}_1(\tilde{X}_{\gamma_{\min}^d}^d = (1 + \alpha)(1 - \alpha)^k), \quad k \geq 0$$

Отсюда выводится математическое ожидание этих величин и математическое

ожидание прибыли от стратегии Ренко:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} V_M^d = & x_0(1 + \alpha)p(0) \left((P - 1) \frac{1 - (PQ)^{\lceil M/2 \rceil}}{1 - PQ} - (Q - 1)P \frac{1 - (PQ)^{\lceil M/2 \rceil}}{1 - PQ} \right) + \\ & + x_0(1 - \alpha)q(0) \left((P - 1)Q \frac{1 - (PQ)^{\lceil M/2 \rceil}}{1 - PQ} - (Q - 1) \frac{1 - (PQ)^{\lceil M/2 \rceil}}{1 - PQ} \right) \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} P &= \mathbf{E}_1 \tilde{X}_{\gamma_{max}^d}^d = \frac{q(0)(1 - \alpha)}{1 - p(0)(1 + \alpha)} \\ Q &= \mathbf{E}_1 \tilde{X}_{\gamma_{min}^d}^d = \frac{p(0)(1 + \alpha)}{1 - q(0)(1 - \alpha)} \end{aligned}$$

В параграфе 4.2.1 для процесса цены X , допускающего стохастический дифференциал:

$$dX_t = \mu(X_t) dt + \sigma(X_t) dB_t, \quad t \geq 0$$

рассматриваются свойства построения Ренко. Процесс $\tilde{X}^d$ является случайным блужданием с вероятностями успеха и неудачи на каждом шаге $p(k)$ и $q(k)$, где k – текущее положение траектории $\tilde{X}^d$:

$$\begin{aligned} p(k) &= \frac{\int_{x_0+(k-1)H}^{x_0+kH} \varphi(x, x_0 + (k-1)H) dx}{\int_{x_0+(k-1)H}^{x_0+(k+1)H} \varphi(x, x_0 + (k-1)H) dx} \\ q(k) &= \frac{\int_{x_0+kH}^{x_0+(k+1)H} \varphi(x, x_0 + (k-1)H) dx}{\int_{x_0+(k-1)H}^{x_0+(k+1)H} \varphi(x, x_0 + (k-1)H) dx} \end{aligned}$$

где функция φ определена ранее в параграфе 3.2.1. Обобщая полученное в Главе 2 выражение для конечномерных распределений случайного блуждания в моменты времени Каги, получаем:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(X_{\rho_0} = x_0 + r_0 H, \dots, X_{\rho_n} = x_0 + r_n H) &= \mathbf{P}(\tilde{X}_{\rho_0^d}^d = r_0, \dots, \tilde{X}_{\rho_n^d}^d = r_n) = \\ &= p(0) \prod_{l=0}^{\lceil \frac{n-1}{2} \rceil - 1} p_{min, r_{2l+1}}(r_{2l+2}) \prod_{l=0}^{\lceil \frac{n-2}{2} \rceil} p_{max, r_{2l}}(r_{2l+1}) \mathbf{I}(r_0 = 1) + \\ &+ q(0) \prod_{l=0}^{\lceil \frac{n-1}{2} \rceil - 1} p_{max, r_{2l+1}}(r_{2l+2}) \prod_{l=0}^{\lceil \frac{n-2}{2} \rceil} p_{min, r_{2l}}(r_{2l+1}) \mathbf{I}(r_0 = -1) \end{aligned}$$

где

$$p_{max,n}(k) = \mathbf{P}_n(\tilde{X}_{\gamma_{\max}^d}^d = k) = \prod_{l=1}^{k+1-n} p(n+l-1)q(k+1)$$

$$p_{min,n}(k) = \mathbf{P}_n(\tilde{X}_{\gamma_{\min}^d}^d = k) = \prod_{l=1}^{n-k+1} q(n-l+1)p(k-1)$$

Ожидаемая прибыль от стратегии Ренко в данном случае сводится к вычислению математических ожиданий приращений процесса $\tilde{X}^d$ между двумя моментами ρ^d , которые, в свою очередь, имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} & \mathbf{E}(\tilde{X}_{\rho_m^d}^d - \tilde{X}_{\rho_{m-1}^d}^d) \mathbf{I}(\tilde{X}_{\rho_0^d}^d = 1) = \\ &= \sum_{r_1=-\infty}^{\infty} \cdots \sum_{r_m=-\infty}^{\infty} (r_m - r_{m-1}) p(0) \prod_{l=0}^{\lceil \frac{m-1}{2} \rceil - 1} p_{min, r_{2l+1}}(r_{2l+2}) \prod_{l=0}^{\lceil \frac{m-2}{2} \rceil} p_{max, r_{2l}}(r_{2l+1}) \\ & \mathbf{E}(\tilde{X}_{\rho_m^d}^d - \tilde{X}_{\rho_{m-1}^d}^d) \mathbf{I}(\tilde{X}_{\rho_0^d}^d = -1) = \\ &= \sum_{r_1=-\infty}^{\infty} \cdots \sum_{r_m=-\infty}^{\infty} (r_m - r_{m-1}) q(0) \prod_{l=0}^{\lceil \frac{n-1}{2} \rceil - 1} p_{max, r_{2l+1}}(r_{2l+2}) \prod_{l=0}^{\lceil \frac{n-2}{2} \rceil} p_{min, r_{2l}}(r_{2l+1}) \end{aligned}$$

В параграфе 4.2.2 для броуновского движения со сносом показано, что соответствующий этому случаю процесс $\tilde{X}^d$ является бернуллиевским случайным блужданием с вероятностями успеха на каждом шаге p и q :

$$p = \frac{\exp(2\mu H/\sigma^2)}{\exp(2\mu H/\sigma^2) + 1}, \quad q = \frac{1}{\exp(2\mu H/\sigma^2) + 1}$$

Следовательно, случай Ренко для броуновского движения сводится к случаю Каги для случайного блуждания. В частности, ожидаемая прибыль на интервале $[0, \rho_m]$ имеет вид:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} V_M^{Renko} &= H \frac{\exp(2\mu H/\sigma^2) - 1}{\exp(2\mu H/\sigma^2) + 1} S_{\max} \left(\left\lceil \frac{M}{2} \right\rceil P_U + \left\lceil \frac{M-1}{2} \right\rceil P_D \right) - \\ &\quad - H \frac{\exp(2\mu H/\sigma^2) - 1}{\exp(2\mu H/\sigma^2) + 1} S_{\min} \left(\left\lceil \frac{M-1}{2} \right\rceil P_U + \left\lceil \frac{M}{2} \right\rceil P_D \right) \end{aligned}$$

где

$$P_U = \frac{\exp(2\mu H/\sigma^2)}{1 + \exp(2\mu H/\sigma^2)}, \quad P_D = \frac{1}{1 + \exp(2\mu H/\sigma^2)}$$

$$S_{\max} = \exp(2\mu H/\sigma^2) + 1, \quad S_{\min} = \exp(-2\mu H/\sigma^2) + 1$$

Кроме того, поскольку $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E} V_n^{Kagi} = \infty$ для случайного блуждания $\tilde{X}^d$ в несимметричном случае, то

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mathbf{E} V_N^{Renko} = \begin{cases} \infty, & \text{при } \mu \neq 0 \\ 0, & \text{при } \mu = 0 \end{cases}$$

Случай Ренко для геометрического броуновского движения рассматривается в **параграфе 4.2.3**. В качестве дискретной версии процесса цены $\tilde{X}^d$ рассматривается дискретный процесс, который начинает движение в точке x_0 и на каждом шаге совершает скачки, равные $\pm H$. Показано, что вероятности положительного и отрицательного скачков, $p(k)$ и $q(k)$, при условии, что текущее положение процесса $x_0 + kH$, имеют следующий вид:

$$p(k) = \frac{R(x_0 + kH) - R(x_0 + (k-1)H)}{R(x_0 + (k+1)H) - R(x_0 + (k-1)H)}$$

$$q(k) = \frac{R(x_0 + (k+1)H) - R(x_0 + kH)}{R(x_0 + (k+1)H) - R(x_0 + (k-1)H)}$$

где функция $R = R(x)$ задается следующим образом:

$$R(x) = \begin{cases} x^\theta, & \text{при } \theta \neq 0 \\ \ln(x), & \text{при } \theta = 0 \end{cases}$$

Как и в случае Каги, для некоторых траекторий исходного процесса цены X , образующих множество положительной меры, последовательность моментов Ренко $(\rho_n)_{n \geq 0}$ не определена, поскольку возможно поглощение процесса $\tilde{X}^d$ на границе $x_0 + n_{min}H$, где

$$n_{min} = \begin{cases} -\left[\frac{x_0}{H}\right], & \text{при } \frac{x_0}{H} \notin \mathbb{N} \\ -\frac{x_0}{H} + 1, & \text{при } \frac{x_0}{H} \in \mathbb{N} \end{cases}$$

В связи с этим рассматриваются три различных случая:

1. **[Условие отражения]**. При вычислении математического ожидания и распределения прибыли от стратегии Ренко на интервале $[0, \rho_M]$ можно предполагать, что все моменты ρ_i определены, то есть рассматривать условное распределение прибыли при условии, что процесс $\tilde{X}$ и, соответственно, $\tilde{X}^d$ не поглощаются до того, как наступит момент ρ_M . В этом случае граница $x_0 + n_{min}H$ играет роль отражающего экрана для процесса $\tilde{X}^d$, а вероятность успеха в этой точке $p(n_{min})$ равна единице при любом θ .
2. **[Условие разорения]**. Если процесс $\tilde{X}^d$ поглощается до того, как наступает момент ρ_M , то это можно интерпретировать как разорение эмитента актива, цена которого описывается процессом X . В этом случае можно считать цену после момента поглощения равной нулю. Прибыль

инвестора в этом случае имеет вид:

$$V_M^{Renko} = \sum_{m=1}^{\widehat{M}} (-1)^{m+1} \text{sign}(\tilde{X}_{\rho_0^d}^d - x_0)(\tilde{X}_{\rho_m^d}^d - \tilde{X}_{\rho_{m-1}^d}^d) \quad (4)$$

где $\widehat{M}$ – номер последнего момента Ренко перед разорением. То есть $p(n_{min}) = 1 - q^A$, где q^A – вероятность того, что геометрическое броуновское движение X , выходя из точки $x_0 + n_{min}H$, не достигнет уровня $x_0 + (n_{min} + 1)H$. При отрицательном сносе, эта вероятность ненулевая и равна:

$$q^A = \frac{(x_0 + (n_{min} + 1)H)^\theta - (x_0 + n_{min}H)^\theta}{(x_0 + (n_{min} + 1)H)^\theta} > 0$$

3. **[Варьирование H].** Полагается, что трейдер в моменты времени $\tilde{\rho}_1, \tilde{\rho}_2, \dots$ адаптирует пороговое значение H в зависимости от цены актива в эти моменты времени. На практике H обычно выбирается равным доле в процентах от начальной цены. Поэтому естественно предполагать, что в моменты времени $\tilde{\rho}_i$, когда цена актива принимает некоторое значение $X_{\tilde{\rho}_i}$, трейдер выбирает пороговое значение H_i равным $\alpha X_{\tilde{\rho}_i}$, где $\alpha \in (0, 1)$ играет роль мультипликативного порогового значения. Таким образом, вместо одного значения H имеем набор различных пороговых значений H_i для каждого из периодов $[\tilde{\rho}_{i-1}, \tilde{\rho}_i]$.

В первом и втором случаях, ожидаемая прибыль и конечномерные распределения процесса X в моменты времени $(\rho_n)_{n \geq 0}$ определяются через вероятности $p_{max,n}(k)$ и $p_{min,n}(k)$, как это показано в параграфе 4.2.1:

$$p_{max,n}(k) = \mathbf{P}_n(\tilde{X}_{\gamma_{max}^d}^d = k) = \prod_{l=1}^{k+1-n} p(n+l-1)q(k+1)$$

$$p_{min,n}(k) = \mathbf{P}_n(\tilde{X}_{\gamma_{min}^d}^d = k) = \prod_{l=1}^{n-k+1} q(n-l+1)p(k-1)$$

где вероятности $p(k)$ и $q(k)$ определены выше с учетом ограничений в точке n_{min} . В случае изменяющимся во времени пороговым значением $(H_i)_{i \geq 0}$ процесс $\tilde{X}^d$ представляет собой случайное блуждание по биномиальному дереву:

$$\tilde{X}_n^d = (1 \pm \alpha) \tilde{X}_{n-1}^d$$

с вероятностями успеха и неудачи на каждом шаге:

$$p = \mathbf{P}(\tilde{X}_n^d = (1 + \alpha) \tilde{X}_{n-1}^d) = \frac{G(1) - G(1 - \alpha)}{G(1 + \alpha) - G(1 - \alpha)}$$

$$q = \mathbf{P}(\tilde{X}_n^d = (1 - \alpha) \tilde{X}_{n-1}^d) = \frac{G(1 + \alpha) - G(1)}{G(1 + \alpha) - G(1 - \alpha)}$$

где

$$G(x) = \begin{cases} x^{\theta-1}, & \text{при } \theta \neq 1 \\ \ln(x), & \text{при } \theta = 1 \end{cases}$$

Поэтому дальнейшие рассуждения повторяют аналогичные вычисления для случая Ренко с биномиальной моделью.

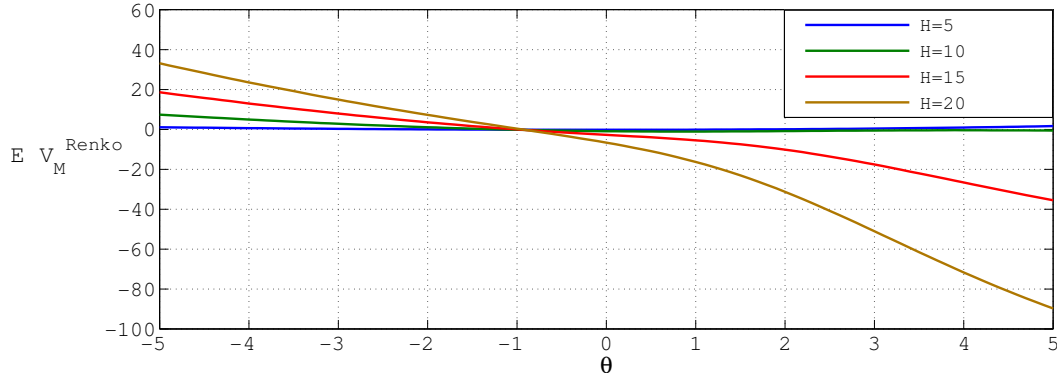


Рис. 1: Математическое ожидание прибыли от стратегии Ренко. Условие отражения

При отрицательных $\theta < -1$, когда цена X имеет положительный тренд, стратегия Ренко в среднем является прибыльной. Стратегия Ренко более эффективна на продолжительных трендах, то есть когда моменту смены тренда ρ_n^d предшествует продолжительный рост или падение. Математическое ожидание $E V_M^{Renko}$ становится сильно отрицательным при больших H и положительном θ . Это объясняется условием отражения: при больших положительных θ цена X и процесс $\tilde{X}^d$ быстро падают к нулю, при этом процесс $\tilde{X}^d$, достигая границы $x_0 + n_{min}H$, отражается от нее. Данная ситуация называется боковым трендом, и является наиболее неблагоприятной для использования стратегии Ренко. Эффект от возникновения бокового тренда из-за отражения ослабевает, если трейдер выбирает пороговое значение H малым: ожидаемая прибыль положительна или близка к нулю при всех значениях θ . Это объясняется тем, что при малых H последний момент остановки Ренко ρ_M^d наступает раньше, чем цена достигает уровня $x_0 + n_{min}H$.

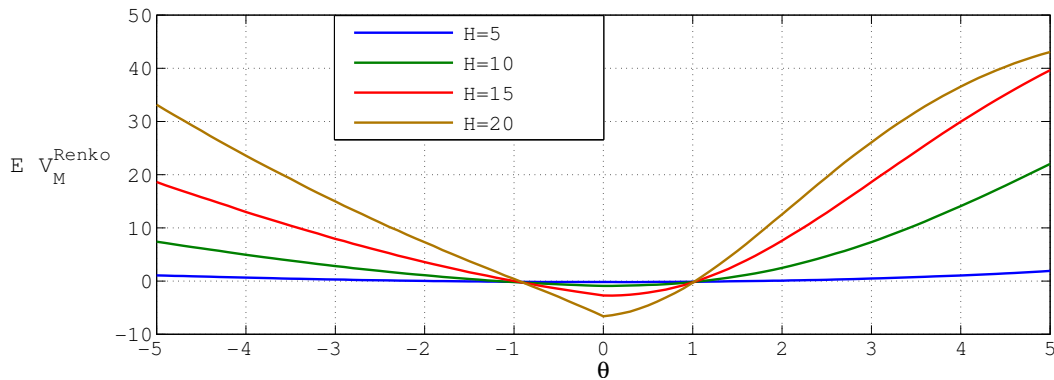


Рис. 2: Математическое ожидание прибыли от стратегии Ренко. Условие разорения

Во втором случае стратегия Ренко является выгодной как при больших отрицательных, так и при больших положительных значениях θ , при которых для цены X характерны долгие тренды.

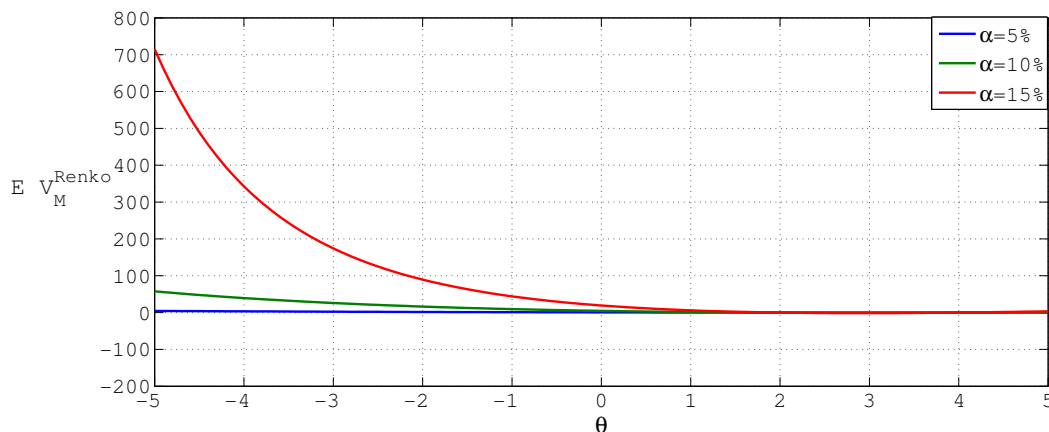


Рис. 3: Математическое ожидание прибыли от стратегии Ренко. Варьирование H

Стратегия Ренко с мультипликативным пороговым значением дает наилучший результат при отрицательных θ , то есть тогда, когда для цены характерны продолжительные возрастающие тренды. Это общее для всех трех случаев свойство стратегии Ренко. Кроме того, при отрицательных θ наибольший эффект дают стратегии с большим пороговым значением α . Это связано с тем, что при большом α стратегия Ренко позволяет улавливать более длинные возрастающие тренды и получить большую прибыль из разницы цены в начале и в конце тренда. При положительных θ ожидаемая прибыль падает к нулю. При этом прибыль вновь начинает расти по мере удаления θ от нуля. Это связано с тем, что стратегия Ренко посредством коротких продаж в периоды падения цены позволяет получать прибыль от длинных нисходящих трендов, которые имеют место при $\theta \gg 0$. Несмотря на то, что для таких значений θ трейдер получает положительную прибыль, ее размер намного меньше, чем при $\theta \ll 0$, поскольку разница в цене актива между началом и концом тренда мала.

Благодарности. Автор выражает глубокую благодарность своему учителю и научному руководителю академику РАН, доктору физико-математических наук, профессору Альберту Николаевичу Ширяеву за постановку задачи, неоценимую помощь и интерес к работе.

Работы автора по теме диссертации

1. Спиряев М.А. *О некоторых свойствах стратегий Каги и Ренко для случайного блуждания.* ТВП, 56:2(2011), 279-300.
2. Спиряев М.А. *О некоторых свойствах стратегий Каги и Ренко для броуновского движения.* Вестн. Моск. ун-та, серия 1, Мат. Мех. №2 (2012), 28-33.
3. Спиряев М.А. *Свойства моментов Каги и Ренко для однородных диффузионных процессов.* Матем. заметки, 91:2 (2012), 270-284.
4. Спиряев М.А. *О некоторых свойствах стратегий Каги и Ренко для модели Блэка-Шоулза.* Обозрение прикл. и промышл. матем, 18:5 (2011), 693-710.