Московский государственный университет
имени М.В. Ломоносова

Механико-математический факультет

На правах рукописи
УДК 517.95

Данилова Евгения Александровна

Некоторые вопросы, связанные с модификациями уравнения синус-Гордона

01.01.02 – дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва – 2012

Работа выполнена на кафедре дифференциальных уравнений механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова.

Научный руководитель:	кандидат физико-математических наук, доцент Эмиль Ренольдович Розендорн
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, профессор Соколов Дмитрий Дмитриевич Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, профессор
	доктор физико-математических наук, профессор Зайцев Валентин Федорович Российский государственный педагогический университет им. А. И. Герцена, профессор
Ведущая организация:	Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН

Защита диссертации состоится 30 марта 2012 года на заседании диссертационного совета Д. 501.001.85 в Московском государственном университете им. М.В. Ломоносова по адресу: 119991, ГСП-1, Москва, Ленинские горы, МГУ, механико-математический факультет, аудитория 1624.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке механико-математического факультета МГУ (Главное здание, 14 этаж)

Автореферат разослан 29 февраля 2012 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
Д. 501.001.85 в МГУ
доктор физико-математических наук,
профессор

В. Н. Сорокин

Общая характеристика работы

Актуальность темы

В настоящее время наблюдается большой интерес к проблеме распространения волн в газожидкостных системах. Это связано с тем, что газожидкостные потоки часто встречаются в природе, а также в гидродинамических процессах современной технологии и энергетики. Большая часть процессов ультразвуковой технологии тоже осуществляется в газожидкостных средах. Часто при исследовании[1, 2] реальная жидкость рассматривается как двухфазная среда с начальными параметрами газосодержания, соответствующими экспериментальным данным.

Предложены различные приближенные модели, описывающие движение газожидкостной смеси, в том числе уравнение Клейна-Гордона[3]. На основе этих моделей проводится изучение акустических свойств жидкостей с пузырьками газа, а также исследование волн конечной амплитуды в смесях.

Обсудим один нестандартный пример[4]. Дождь падает на поверхность озера, порождая звуковые волны, которые распространяются над водой. Этот шум складывается из большого количества падений маленьких капелек дождя. После проведения соответствующего масштабирования шум, распространяющийся в трехмерной среде, можно считать пространственно однородным у поверхности озера. Следовательно, шум действует на 2-мерной границе 3-мерной области. В двумерном случае можно представить себе границу некоего плоского объекта, которая испытывает случайное воздействие в перпендикулярном направлении. В этом случае шум действует на 1-мерной границе 2-мерной области. Здесь получается нелинейное уравнение Клейна-Гордона.

Также, уравнение Клейна-Гордона и его возмущения возникают при описании взрывных неустойчивостей поверхности жидкого металла во внешнем электрическом поле[5], заряженной поверхности диэлектрической жид-

[1]Чулкова Н. В., Макаров В. К., Супрун С. Г., Макарова Т. В. *Исследование концентрации кавитационных зародышей в воде.* В сб.: Акустика и ультразвуковая техника, вып. 15, Киев, 1980, с. 13–16.

[2]Кедринекий В. К. *Динамика зоны кавитации при подводном взрыве вблизи свободной поверхности.* журнал ПМТФ, 1975, № 5, с. 68–78.

[3]Малых Н. В., Огородников И. А. *О применении уравнения Клейна-Гордона для описания структуры импульсов сжатия в жидкости с пузырьками газа.* В сб.: Динамика сплошной среды, вып. 29, Новосибирск, Изд-во Ин-та гидродинамики СО АН СССР, 1977, с. 143–148.

[4]Dalang R. C. Leveque O. *Second-order hyperbolic SPDE's driven by homogeneous gaussian noise on a hyperplane* Transactions of the AMS, 2006, vol. 358, № 5, p. 2123–2159.

[5]Зубарев Н. М. Письма в ЖТФ, 1999, т. 25, вып. 21, с. 65–69.

кости[6], тангенциального разрыва по механизму Кельвина-Гельмгольца[7] и др.

Для описания нелинейных сейсмических эффектов и процессов разработано большое количество математических моделей. Согласно этим моделям, нелинейные эффекты в геофизических средах можно описать в рамках уравнений Бусинеска, Бургерса, Кортевега-де-Фриза, Шредингера, синус-Гордона и их модификаций, в которых существенными оказываются нелинейности, диссипация и дисперсия – основные характеристики и геофизической среды, и волновых процессов, протекающих в ней.

Нелинейное уравнение Клейна-Гордона

$$z''_{xx}(x,t) - z''_{tt}(x,t) = f(z(x,t)) \tag{1}$$

является одним из классических уравнений теории нелинейных волн. Обзор задач, приводящих к этому уравнению, можно найти, например, в монографии Р. Додда[8]. Это уравнения встречается в теории магнетиков, теории дислокаций, теории джозефсоновских переходов.

Частным случаем уравнения Клейна-Гордона является уравнение синус-Гордона

$$z''_{xx}(x,t) - z''_{tt}(x,t) = \sin(z(x,t)). \tag{2}$$

Первоначально оно появилось в геометрии. Его можно получить с помощью построений, которые делал Чебышев в работе "О кройке одежды"(1878 г.). В 1901 г. уравнение (2) использовал Гильберт при доказательстве непогружаемости плоскости Лобачевского в трехмерное евклидово пространство.

Впоследствии уравнение (2) оказалось важным для математической физики и получило название синус-Гордона (Sine-Gordon).

В ряде современных практических применений (например, нестационарный эффект Джозефсона) в левой части уравнения синус-Гордона появляется слагаемое с первой производной по времени (так называемое возмущение):

$$z''_{xx}(x,t) - z''_{tt}(x,t) + az'_{t}(x,t) = \sin(z(x,t)). \tag{3}$$

На малом интервале времени этим слагаемым часто пренебрегают[9], что, по мнению практиков, допустимо, в то время как для продолжительных

[6]Горьков Л. П., Черникова Д. М. ДАН СССР, 1976, т. 228, вып. 4, с. 829–832.

[7]Кузнецов Е. А., Лушников П. М. ЖЭТФ, 1995, т. 108, вып. 2 (8), с. 614–630.

[8]Додд Р., Эйлбек Дж., Гиббон Дж., Моррис Х. *Солитоны и нелинейные волновые уравнения.* Москва: Мир, 1988.

[9]Бароне А., Патерно Дж. *Эффект Джозефсона.* М.: Мир, 1984.

интервалов времени аналогичное пренебрежение, может привести к потере решения специального вида - решения типа бегущей волны, сглаживающейся на бесконечности.

Этим термином будем называть решение вида $\varphi(x,t) = g(x - v \cdot t)$, отличное от константы, у которого $g(\xi)$ стремятся к константам при $\xi \to +\infty$ и при $\xi \to -\infty$, и у которого $g'(\xi)$ стремятся к нулю при $\xi \to +\infty$ и при $\xi \to -\infty$.

В статьях Fiore[10] показано, что при таком пренебрежении теряются некоторые решения солитонного типа, которые являются частным случаем решений типа бегущей волны, сглаживающейся на бесконечности.

Цель работы состоит в исследовании существования решения и значимости вклада от возмущения для уравнения Клейна-Гордона и конкретной модификации синус-Гордона. Основные задачи исследования:

1. Исследовать вопрос существования решения задачи Коши возмущённого уравнения Клейна-Гордона в бесконечной полосе.
2. Оценить отклонение решения задачи Коши возмущённого уравнения Клейна-Гордона от невозмущённого.
3. Изучить некоторые свойства решений специальным образом модифицированного, а затем возмущенного уравнения синус-Гордона.

Научная новизна

1. Найдены достаточные условия существования в бесконечной полосе решения задачи Коши для возмущенного уравнения Клейна-Гордона.
2. При этих достаточных условиях получена универсальная оценка ширины той полосы, где решения существуют (Теорема 1).
3. Получена количественная оценка относительной погрешности решения возмущенного уравнения Клейна-Гордона при замене уравнения на невозмущенное (Теорема 2).
4. Доказано существование решения типа волны, сглаживающейся на бесконечности, невозмущённого модифицированного уравнения синус-Гордона. Получена связь между параметром возмущения, направлением и скоростью движения волны возмущённого модифицированного уравнения синус-Гордона.

[10] Gaetano Fiore *On soliton and other travelling-wave solutions of a perturbed sine-Gordon equation.* Preprint Matematica e Applicazioni, Universita' di Napol, 2007.

Указанные здесь основные результаты являются новыми, полностью обоснованны и получены автором самостоятельно. Точные формулировки основных результатов приведены ниже.

Теоретическая и практическая значимость работы

Диссертация носит теоретический характер.

Результаты диссертации могут найти применение при изучении эффекта Джозефсона[11], а также в других нелинейных задачах, приводящих к уравнению Клейна-Гордона[12] и их модификациям. Результаты работы могут быть использованы для исследования нелинейных сейсмических эффектов и процессов, в технологиях связи, в волновой генетике.

Методы исследования - методы последовательного приближения, построения фазовых портретов, оценивания функций и интегралов, асимптотические методы, численные методы и моделирование.

Апробация результатов работы

Основные результаты диссертационной работы были представлены на

- ежегодных семинарах МГУ им. М.В. Ломоносова "Асимптотические методы математической физики"под руководством профессора Шамаева А. С. (г. Москва, 2008-2011 г.г.),
- семинаре "Геометрия в целом"под руководством доцента Розендорна Э. Р. (г. Москва, 2008 г.),
- семинаре в вычислительном центре под руководством профессора Соколова Д. Д. (г. Москва, 2011 г.),
- "VII Всероссийский симпозиум по прикладной и промышленной математике"(г. Кисловодск, 2006 г., весенняя сессия)
- "VIII Всероссийский симпозиум по прикладной и промышленной математике"(г. Адлер, 2007 г., осенняя сессия),
- "XII Всероссийский симпозиум по прикладной и промышленной математике"(г. Казань, 2011 г., весенняя сессия),
- Международный семинар "Partial Differential Equations"(г. Капут, Германия, 2011 г.).

---

[11] Бароне А., Патерно Дж. *Эффект Джозефсона.* М.: Мир, 1984.

[12] Додд Р., Эйлбек Дж., Гиббон Дж., Моррис Х. *Солитоны и нелинейные волновые уравнения.* Москва: Мир, 1988.

Публикации по теме диссертации.

По результатам исследований, выполненных в процессе работы над диссертацией, опубликовано 4 научные работы, все статьи из перечня ВАК. Список работ приведен в конце автореферата.

Структура и объём работы.

Диссертация состоит из введения, трёх глав, заключения, списка использованной литературы, включающего 18 наименования. Объем работы 71 страница машинописного текста.

Краткое содержание работы

Во **введении**, изложена краткая история вопроса и сформулированы основные результаты.

В **первой главе** показана актуальность темы и описана используемая терминология.

Во **второй главе** доказано существование решения в полосе задачи Коши возмущённого уравнения Клейна-Гордона, а именно:

Рассмотрим уравнение:

$$\varphi_{tt}(x,t) = a^2 \cdot \varphi_{xx}(x,t) + b(x,t)\,\varphi_t(x,t) + f(\varphi(x,t)), \tag{4}$$

где $a = \text{const}$, $a \neq 0$, $|b(x,t)| \leqslant B$, $|b_x(x,t)| \leqslant B_1$, $|b_t(x,t)| \leqslant B_2$, $c = \text{const}$, f задана и дифференцируема на всей числовой оси и ее производная ограничена $|f'(\varphi)| \leq M$. Поставим для него задачу Коши:

$$\varphi(x,t)\,|_{t=0} = \psi_0(x), \quad \varphi_t(x,t)\,|_{t=0} = \psi_1(x), \quad -\infty < x < +\infty. \tag{5}$$

Теорема 1. *Существует H такое, что для любого $0 < h < H$ задача Коши (4-5) имеет решение в полосе*

$$0 \leqslant t \leqslant h \leqslant H = \frac{1}{\left(\sqrt{\left(B + a\left(b_1 + b_2\right)\right)^2 + M/2} + \left(B + a\left(b_1 + b_2\right)\right)\right)},$$

где $b_1 = b_2 = \frac{aB_1 + B_2}{8a^2}$.

Далее получена оценка относительной погрешности решения задачи Коши в полосе при замене возмущённого уравнения Клейна-Гордона невозмущённым.

Рассмотрим еще одно уравнение

$$\varphi_{tt}(x,t) = a^2 \cdot \varphi_{xx}(x,t) + f(\varphi(x,t)), \tag{6}$$

. Поставим для него ту же задачу Коши (5).

Введем обозначения:
$m = \max\left|\frac{1}{4a} b(x,y)\right|$,
$n_1 = \max\left|\frac{1}{8a^2}(b_y(x,y) - ab_x(x,y))\right|$,
$n_2 = \max\left|\frac{1}{8a^2}(b_y(x,y) + ab_x(x,y))\right|$,
$M = \max\left|\frac{1}{4a^2} f'\right|$.

Обозначим решение задачи Коши (6-5) через $\varphi^*(x,t)$, а решение задачи (4-5) - через $\varphi(x,t)$.

Теорема 2. *Если $\varphi \neq 0$, то в условиях предыдущей теоремы для любых x и t из полосы $0 \leq t \leq H$ справедливо:*

$$\frac{\max\limits_{\triangle}|\varphi - \varphi^*|}{\max\limits_{\triangle}|\varphi|} \leqslant \frac{8maH + 2(n_1+n_2)a^2H^2}{1 - 2Ma^2H^2},$$

где $\triangle$ – треугольник с вершинами в точках $(x-at;0)$, $(x;t)$, $(x+at;0)$.

При доказательстве этих теорем использовалось сведение к интегральным уравнениям, метод последовательных приближений и метод сжимающих отображений.

Из полученного неравенства следует, что

1) чем ближе точка (u,v) к прямой, на которой заданы начальные условия, т. е. чем меньше h, тем ближе решения;

2) чем меньше величины $\max|\varepsilon_1|$, $\max|\varepsilon_2|$, $\max|\varepsilon_{1u}|$, $\max|\varepsilon_{2v}|$, тем ближе решения;

3) получены количественные оценки близости, а именно это важно для применений.

В физике (как упоминалось выше) при построении решения задачи Коши возмущенного нелинейного уравнения Клейна-Гордона для малых по модулю постоянных ε_j заменяют их нулем. Таким образом, данная глава позволяет находить те границы, в которых такая замена допустима в конкретных задачах.

Третья глава посвящена изучению наличия решений типа бегущих волн, сглаживающихся на бесконечности, а также уединенных волн.

Уединенной волной будем называть решение вида $\varphi(x,t) = g(x - v \cdot t)$, отличное от константы, у которого $g(\xi)$ стремятся к константам при $\xi \to +\infty$ и при $\xi \to -\infty$, и у которого $g'(\xi)$ стремятся к нулю при $\xi \to +\infty$ и при $\xi \to -\infty$, а кроме того $g'(\xi)$ меняет знак не более одного раза при изменении ξ от $-\infty$ до $+\infty$.

Рассмотрим уравнение Клейна-Гордона:

$$\varphi_{xx}(x,t) - \varphi_{tt}(x,t) = f(\varphi(x,t)). \tag{7}$$

Сделаем замену

$$\varphi(x,t) = g(\xi), \text{ где } \xi = x - v \cdot t. \tag{8}$$

При $v \neq \pm 1$ уравнение (7) вместе с заменой (8) будет эквивалентно следующему:

$$g''(\xi) = \frac{1}{(1 - v^2)} f(g(\xi)),$$

которое после домножения на $g'(\xi)$ можно проинтегрировать:

$$(g'(\xi))^2 = \frac{2}{(1 - v^2)} \int\limits_{\xi_0}^{\xi} f(g(s))\, g'(s)\, ds + \frac{\operatorname{sgn}(1 - v^2)}{(1 - v^2)} C^2,$$

где $C = g'(\xi_0)\sqrt{|1 - v^2|}$, а ξ_0 – произвольная точка того промежутка, где определена $g(\xi)$.

Функция $g(\xi) \in C^2(\mathbb{R})$ из определения классического решения дифференциального уравнения второго порядка. Тогда если $f(\zeta)$ непрерывна на $\mathbb{R}$, то к интегралу в правой части можно применить теорему о замене переменной в определенном интеграле. Таким образом,

$$(g'(\xi))^2 = \frac{1}{|1 - v^2|} \left(2\operatorname{sgn}(1 - v^2) \cdot \int\limits_{g_0}^{g} f(\zeta)\, d\zeta + C^2 \right), \tag{9}$$

где $g_0 = g(\xi_0)$.

Рассмотрим промежуток строгой монотонности $(\hat{g}_1; \hat{g}_2)$ функции $g(\xi)$. Пусть $g_0 \in (\hat{g}_1; \hat{g}_2)$. Тогда правая часть (9) положительна и можно применить теорему об обратной функции:

$$(\xi'(g))^2 = \frac{|1 - v^2|}{2\operatorname{sgn}(1 - v^2) \cdot \int\limits_{g_0}^{g} f(\zeta)\, d\zeta + C^2}. \tag{10}$$

Таким образом, в предположении строгой монотонности функции $g(\xi)$ на $(\hat{g}_1; \hat{g}_2)$, чтобы решение $\varphi(x,t)$ было бегущей волной, сглаживающейся на бесконечности, необходимо и достаточно расходимости интеграла

$$\int\limits_{g_0}^{g} \frac{\sqrt{|1-v^2|}}{\sqrt{2\operatorname{sgn}\left(1-v^2\right)\cdot\int\limits_{g_0}^{g} f\left(\zeta\right)d\zeta + C^2}}dv$$

при $g \to \hat{g}_1$ и при $g \to \hat{g}_2$.

Применив эти соображения, а также метод фазовых портретов и асимптотические методы, автором доказаны две следующие теоремы.

Теорема 3. *При $v \neq \pm 1$ у уравнения*

$$\varphi_{xx}\left(x,t\right) - \varphi_{tt}\left(x,t\right) = \sin\left(\varphi\left(x,t\right)\right) + \sin\left(3\cdot\varphi\left(x,t\right)\right) \qquad (11)$$

существуют решения типа бегущей волны, сглаживающейся на бесконечности:

1) при $|v| > 1$

(a)

$$\xi = \int\limits_{g_4}^{g} \sqrt{\frac{3\left(v^2-1\right)}{8\left(\cos^3\left(g\right)\right)}}dg;$$

(b)

$$\xi = \int\limits_{g_3}^{g} \sqrt{\frac{3\left(v^2-1\right)}{8\left(1+\cos^3\left(g\right)\right)}}dg;$$

2) при $0 < |v| < 1$

(a)

$$\xi = \int\limits_{g_2}^{g} \sqrt{\frac{3\left(1-v^2\right)}{8\left(-\cos^3\left(g\right)\right)}}dg;$$

(b)

$$\xi = \int\limits_{g_1}^{g} \sqrt{\frac{3\left(1-v^2\right)}{8\left(1-\cos^3\left(g\right)\right)}}dg.$$

Теорема 4. *Уравнение*

$$\varphi_{xx}(x,t)-\varphi_{tt}(x,t)+a\cdot\varphi_t(x,t)=\sin(\varphi(x,t))+\sin(3\cdot\varphi(x,t)),\, a\neq 0. \quad (12)$$

имеет следующие решения типа бегущей волны, сглаживающейся на бесконечности:

1) при $a<0$:

(a) волна, сглаживающейся на бесконечности, бегущая влево, со скоростью $|v|>1$;

(b) волна, сглаживающейся на бесконечности, бегущая вправо, со скоростью $|v|<1$;

2) при $a>0$:

(a) волна, сглаживающейся на бесконечности, бегущая влево, со скоростью $|v|<1$;

(b) волна, сглаживающейся на бесконечности, бегущая вправо, со скоростью $|v|>1$;

3) при любом $a\neq 0$:

(a) уединенная волна, бегущая вправо, со скоростью $v=1$;

(b) уединенная волна, бегущая влево, со скоростью $v=-1$.

Теорема 3 показывает, что невозмущенное модифицированное уравнение синус-Гордона имеет решения типа уединенной волны и дает формулы для этих решений.

Теорема 4 показывает, что возмущенное модифицированное уравнение синус-Гордона при определенных условиях на параметр возмущения имеет решения типа бегущей волны, сглаживающейся на бесконечности, и автором были получены эти условия. Более того, в некоторых случаях это уравнение имеет решения типа бегущей волны, сглаживающейся на бесконечности, но не имеет решений типа уединенной волны.

Кроме того, автором найдены решения типа уединённой волны возмущённого модифицированного уравнения синус-Гордона в случае единичной по модулю скорости и получена формула этого решения:

$$\xi=\xi_0+C_0-v\cdot a\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)\cdot\left(\ln\left|\frac{1-\cos(g(\xi))}{\sin(g(\xi))}\right|-\frac{1}{\cos(g(\xi))}\right).$$

В частности, проанализировано влияние возмущения на решение типа бегущей волны, сглаживающейся на бесконечности, для модифицированного уравнения синус-Гордона (см. таблицу 1 на странице 11, где $g_1 = 2\pi k$, $g_2 = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $g_3 = \pi + 2\pi k$, $g_4 = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$). Получена связь между параметром возмущения, направлением и скоростью движения волны возмущённого модифицированного уравнения синус-Гордона.

В **заключении** изложены результаты и сформулированы выводы по работе.

Основные результаты и выводы

1. Доказано существование решения в бесконечной полосе задачи Коши возмущённого уравнения Клейна-Гордона (4), причем получена универсальная оценка ширины той полосы, где решения существуют.

2. Получена оценка относительной погрешности решения задачи Коши в полосе при замене возмущённого уравнения Клейна-Гордона (4) невозмущённым.

3. Доказано, что невозмущенное уравнение (11) имеет решения типа уединенной волны. Получены формулы для этих решений.

4. Доказано, что возмущенное уравнение (12) при определенных условиях на параметр возмущения имеет решения типа бегущей волны, сглаживающейся на бесконечности, но не имеет решений типа уединенной волны. Получены эти условия.

   Доказано существование решения типа уединённой волны возмущённого модифицированного уравнения синус-Гордона (12) в случае единичной по модулю скорости. Получена формула этого решения.

5. Проанализировано влияние возмущения на решение типа бегущей волны, сглаживающейся на бесконечности, для возмущенного модифицированного уравнения синус-Гордона (12).

.

Таблица 1: Сравнение возмущенного и невозмущенного уравнений по наличию решений типа бегущей волны, сглаживающейся на бесконечности, при $|v| < 1$.

<table>
<tr><td></td><td>Невозмущенное уравнение</td><td>Возмущенное уравнение</td></tr>
<tr><td>$v = 0$</td><td colspan="2">Волна, сглаживающаяся на бесконечности: $\xi = \int\limits_{g_2}^{g} \sqrt{\frac{3}{-8\cos^3 g}} dg$,
Волна, сглаживающаяся на бесконечности: $\xi = \int\limits_{g_4}^{g} -\sqrt{\frac{3}{-8\cos^3 g}} dg$,
Две волны, сглаживающихся на бесконечности: $\xi = \int\limits_{g_1}^{g} \pm\sqrt{\frac{3}{8(1-\cos^3 g)}} dg$.</td></tr>
<tr><td rowspan="3">$0 < |v| < 1$</td><td>Волна, сглаживающаяся на бесконечности: $\xi = \int\limits_{g_2}^{g} \sqrt{\frac{3(1-v^2)}{-8\cos^3 g}} dg$.</td><td>Нет.</td></tr>
<tr><td>Волна, сглаживающаяся на бесконечности: $\xi = \int\limits_{g_4}^{g} -\sqrt{\frac{3(1-v^2)}{-8\cos^3 g}} dg$.</td><td>Нет.</td></tr>
<tr><td>Две волны, сглаживающихся на бесконечности: $\xi = \int\limits_{g_1}^{g} \pm\sqrt{\frac{3(1-v^2)}{8(1-\cos^3 g)}} dg$.</td><td>При $av < 0$ волна, сглаживающаяся на бесконечностии и стремящаяся при $\xi \to \pm\infty$ к точкам семейства g_3.</td></tr>
<tr><td>$v = \pm 1$</td><td>Нет.</td><td>Волна, сглаживающаяся на бесконечности: $\xi = \int\limits_{g_i}^{g} \frac{\mp a}{\sin g + \sin(3g)} dg$.</td></tr>
<tr><td rowspan="3">$|v| > 1$</td><td>Волна, сглаживающаяся на бесконечности: $\xi = \int\limits_{g_4}^{g} \sqrt{\frac{3(v^2-1)}{8\cos^3 g}} dg$.</td><td>Нет.</td></tr>
<tr><td>Волна, сглаживающаяся на бесконечности: $\xi = \int\limits_{g_2}^{g} -\sqrt{\frac{3(v^2-1)}{8\cos^3 g}} dg$.</td><td>Нет.</td></tr>
<tr><td>Две волны, сглаживающихся на бесконечности: $\xi = \int\limits_{g_3}^{g} \pm\sqrt{\frac{3(v^2-1)}{8(1+\cos^3 g)}} dg$.</td><td>При $av > 0$ волна, сглаживающаяся на бесконечностии и стремящаяся при $\xi \to \pm\infty$ к точкам семейства g_1.</td></tr>
</table>

Благодарности

Автор считает своим приятным долгом выразить искреннюю благодарность научному руководителю, доценту Эмилю Ренольдовичу Розендорну за помощь в выборе темы исследования и внимательное руководство. Автор весьма признателен доктору физико-математических наук, профессору Алексею Станиславовичу Шамаеву, доценту Ольге Сергеевне Розановой, кандидату физико-математических наук Быкову Владимиру Владиславовичу.

Автор также выражает благодарность доктору физико-математических наук Конькову Андрею Александровичу, и кандидату физико-математических наук Романову Максиму Сергеевичу. за внимательное изучение диссертации.

Автор выражает благодарность коллективу кафедры дифференциальных уравнений за творческую атмосферу и поддержку в работе.

Работы автора по теме диссертации

[1] Данилова Е. А.: *Примененние метода последовательных приближений к решению задачи Коши для уравнения* $\varphi_{tt} = a^2\varphi_{xx} + b\,(x,t)\,\varphi_t + f\,(\varphi)$. Обозрение прикл. и промышл. математики, 2006, том 13, вып. 2, с. 305–306.

[2] Данилова Е.А.: *Оценка правомочности упрощения задачи Коши для уравнения* $z_{uv} = \epsilon_1\,(u,v)\,z_u + \epsilon_2\,(u,v)\,z_v + F\,(z)$. Обозрение прикл. и промышл. математики, 2007, том 14, вып. 3, с. 531–532.

[3] Данилова Е.А.: *Исследование свойств решений одного нелинейного дифференциального уравнения.* Обозрение прикл. и промышл. математики, 2011, том 18, вып. 2, с. 266–268.

[4] Данилова Е.А.: *Об отсутствии решений солитонного типа для одной модификации уравнения синус-Гордона.* Известия высших учебных заведений. Поволжский регион., 2011, № 3 (19), с. 32–36.