МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М. В. Ломоносова

Механико–математический факультет

На правах рукописи
УДК 519.21

Карапетян Нарине Вигеновна

Математические модели страхования с выплатой дивидендов

01.01.05 — теория вероятностей и математическая статистика

АВТОРЕФЕРАТ

**диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико–математических наук**

МОСКВА — 2012

Работа выполнена на кафедре теории вероятностей механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова.

Научный руководитель доктор физико–математических наук, профессор
Булинская Екатерина Вадимовна

Официальные оппоненты Королев Виктор Юрьевич
доктор физико–математических наук, профессор,
Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова,
заместитель заведующего кафедры математической статистики,
заместитель декана факультета ВМиК

Белкина Татьяна Андреевна
кандидат физико–математических наук, доцент,
Центральный экономико–математический институт РАН,
заведующий лабораторией теории риска

Ведущая организация Институт Проблем Информатики РАН

Защита диссертации состоится « 30 » марта 2012 г. в 16 часов 45 минут на заседании диссертационного совета Д 501.001.85 при Московском государственном университете имени М. В. Ломоносова по адресу: 119991, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д.1, Главное здание МГУ, механико–математический факультет, аудитория 16-24 .

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке механико–математического факультета (Главное здание, 14 этаж).

Автореферат разослан « 29 » февраля 2012 г.

Ученый секретарь диссертационного
совета Д 501.001.85 при МГУ,
доктор физико–математических наук,
профессор

В. Н. Сорокин

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Страхование является важной частью современного общества. Уменьшая отрицательное влияние случайных факторов на прибыль, оно тем самым позволяет развивать производственные и экономические возможности, внедрять новые технологии. Чем более развитым становится общество, тем больше потребность в использовании страхования и тем более сложный математический аппарат нужен для описания работы страховых компаний. Бюлман[1] выделил три этапа развития математической теории страхования: составление таблиц смертности; внедрение в страхование вероятностной идеологии и вероятностно–статистических методов; использование финансовых инструментов с целью уменьшения риска страхования.

Развитие математической теории страхования в 20–м веке способствовало развитию теории вероятностей и случайных процессов. В 1903 году Лундбергом[2] впервые был рассмотрен пуассоновский процесс и введена динамическая теория страхования. Башелье[3] в своей диссертации ввел понятие броуновского движения, положив начало стохастическому исчислению. Работы специалиста по теории вероятостей и математической статистике Крамера[4] заложили основу теории рисков.

Поскольку основной задачей страховой компании является удовлетворение требований, поступающих от полисодержателей, то долгое время главным направлением исследований была минимизация вероятности разорения компании[5]. В 1957 г. ДеФинетти[6] предложил учитывать, что страховая компания является также и акционерным обществом, и, соответственно, использовать для оценки успешности работы компании величину дивидендов, выплаченных ее акционерам. Он изучил дискретную модель работы страховой компании и пришел к выводу, что оптимальная дивидендная стратегия должна быть барьерной, т.е. выплаты начинаются только по достижении капиталом барьера. Задача поиска оптимального вида стратегий выплаты дивидендов решалась и для моделей с непрерывным временем. При достаточно широких предположениях было установлено, что она име-

[1]Bulhmann H. *Actuaries of the Third Kind?*, ASTIN Bulletin, 17(2), 137—138, 1987.

[2]Lundberg F.*Approximation of the Probability Function/ Reinsurance of Collective Risks*, doctoral thesis, 1903.

[3]Bachelier L.*Theorie de la speculation*, Annales Scientifiques de l'Ecole Normale Superieure, 3(17), 21—86, 1900

[4]Cramer H. *On the mathematical theory of risk*, Forsakringsaktiebolaget Skandia 1855 – 1930, Stockholm, 2, 7—84, 1930.

[5]Королев В.Ю., Бенинг В.Е., Шоргин С.Я. *Математические основы теории риска*, Москва, Физматлит, 2007.

[6]De Finetti B. *Su un'impostazione alternativa della teoria colletiva del rishio*, Transactions of the XVth International Congress of Actuaries, 1957.

ет барьерный вид[7,8].

Во многих работах заранее предполагалось, что компания использует барьерную дивидендную стратегию и исследовалась величина выплаченных дивидендов[9,10,11]. Однако использование барьерной дивидендной стратегии приводит к неминуемому разорению компании, поэтому в 2004 г. Диксон и Уотерс[12] рассмотрели модель, в которой акционеры покрывают убытки, понесенные компанией при разорении, и перешли от задачи максимизации дивидендов к задаче максимизации чистого дохода акционеров, т.е. разницы между полученными дивидендами и покрытыми убытками.

Еще одним аспектом работы страховой компании является перестрахование[13]. В случае использования компанией не только перестраховочной, но и дивидендной политики Беверидж, Диксон и Ву[14] при помощи аппроксимационных методов, получили, что только непропорциональное перестрахование (эксцедент убытка) может увеличить доход акционеров. Голубин[15] исследовал ситуацию, когда выбирается и страховая, и перестраховочная политики, и занимался минимизацией ожидаемых потерь. Шмидли[16] решал задачу минимизации вероятности разорения компании при использовании перестрахования и возможности инвестирования. Мниф и Сулем[17] нашли оптимальную стратегию работы страховой компании при перестраховании типа эксцедента убытка с точки зрения полезности. Белкина и Матвеева[18] искали оптимальные перестраховочные стратегии для моделей с диффузной аппроксимацией риска.

Рассмотренные в диссертации модели и математический аппарат дают

[7] Жанблан-Пике М., Ширяев А.Н. *Оптимизация потока дивидендов*, Успехи математических наук, 20, 257—277, 1995.

[8] Gerber H.U., Shiu E.S.W. *On optimal dividend strategies in the compound Poisson model*, North American Actuarial Journal, 10(2), 76—93, 2005.

[9] Gerber H.U., Shiu E.S.W. *Optimal dividends: Analysis with Brownian motion*, North American Actuarial Journal, 8(1), 1—40, 2004.

[10] Gerber H.U., Shiu E.S.W., Smith N. *Methods for estimating the optimal dividend barrier and the probability of ruin*, Insurance: Mathematics and Economics, 42(1), 243—254, 2007.

[11] Wan N. *Dividend payments with a threshold strategy in the compound Poisson risk model perturbed by diffusion*, Insurance: Mathematics and Economics, 40(3), 509—523, 2006.

[12] Dickson D.C.M. and Waters H.R. *Some optimal dividends problems*, ASTIN Bulletin, 34(1), 49—74, 2004.

[13] Булинская Е.В. *Теория риска и перестрахование*, М: Мейлор, 2009.

[14] Beveridge C.J.Dickson D.C.M. and Wu X. *Optimal dividends under reinsurance*, Centre for actuarial studies, Dept. of Economics, University of Melbourne, 1—11, 2007.

[15] Golubin A.Y. *Optimal insurance and reinsurance policies in the risk process*, ASTIN Bulletin, 38(2), 383—397, 2008.

[16] Schmidli H. *On mimimizing the ruin probability by investment and reinsurance*, The Annals of Applied Probability, 12, 890-907, 2002.

[17] Mnif M., Sulem A. *Optimal risk-control and dividend pay-outs under excess-of-loss reinsurance*, INRIA Rocquencourt, Rapport De Recherche No 5010, 2003.

[18] Белкина Т.А., Матвеева Н.В. *Об оптимальных стратегиях перестрахования в моделях с диффузной аппроксимацией процесса риска*, В сб.: Инновационная система государства и перспективы ее развития, Гомель, ЦИИР, 43-54, 2010.

возможности для более точного описания работы страховой компании. Таким образом, тематика диссертации является актуальной.

Цель работы. Целью работы является исследование математических моделей работы страховой компании с выплатой дивидендов и перестрахованием.

Научная новизна. Основные результаты диссертации являются новыми и состоят в следующем

1. Выведен явный вид показателей работы страховой компании (ожидаемые дисконтированные дивиденды и убытки, среднее время работы компании до разорения).

2. Получена оценка изменения величины дивидендов при изменении распределения поступающих требований.

3. При использовании квотного перестрахования найдены стратегии, максимизирующие выплаченные акционерам дивиденды и среднее время до разорения.

4. Для модификации Диксона и Уотерса (возобновление работы компании после разорения) доказано существование стратегии, максимизирующей прибыль акционеров и в дискретном, и в непрерывном случаях.

5. В модели с дискретным временем получено предельное распределение нормированного своим математическим ожиданием времени работы компании до разорения.

Методы исследования. Методика исследования основана на общих методах теории вероятностей, дифференциальных уравнений и математического анализа.

Теоретическая и практическая ценность. Диссертация носит теоретический характер. Полученные результаты могут представлять интерес для специалистов в области страховой математики как при теоретических исследованиях, так и на практике.

Апробация работы. Результаты диссертации докладывались

в 2010 г. на Большом семинаре кафедры теории вероятностей механико–математического факультета МГУ (руководитель семинара и заведующий кафедрой — академик РАН А. Н. Ширяев);

в 2007 — 2011 гг. на спецсеминаре "Проблемы теории запасов и страхования" кафедры теории вероятностей механико–математического факультета МГУ (руководитель — профессор, д.ф.–м.н. Е. В. Булинская);

в 2010 г. на спецсеминаре "Теория риска и смежные вопросы" кафедры математической статистики факультета ВМиК МГУ (заведующий кафедрой — академик РАН Ю. В. Прохоров) под руководством д.ф.–м.н. проф. Е. В. Бенинга и д.ф.–м.н. проф. В. Ю. Королева;

в 2011 г. на семинаре "Вероятностные проблемы управления и стохастические модели в экономике, финансах и страховании" ЦЭМИ РАН (руководители семинара — к.ф.–м.н. В. И. Аркин и д.ф.–м.н. Э. Л. Пресман);

на XVII Международной конференции молодых ученых "Ломоносов–2010" (Москва, 12 — 15 апреля 2010 г.);

на 6–м Международном семинаре по моделированию (Санкт-Петербург, 24 июня — 4 июля 2009 г.).

Публикации. По теме диссертации опубликовано 5 работ, из них 3 в журналах перечня ВАК, список работ приведен в конце настоящего автореферата.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из оглавления, введения, трех глав и списка литературы, содержащего 54 наименования. Общий объем диссертации составляет 98 страниц.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

В **первой главе** рассматривается модель Крамера–Лундберга для описания работы страховой компании с барьерной стратегией выплаты дивидендов и исследуются ожидаемые дисконтированные дивиденды, выплаченные до разорения, ожидаемые дисконтированные убытки при разорении и время работы компании до разорения.

Капитал компании в момент t представляется в виде

$$U(t) = x + ct - S(t), \quad t \geq 0,$$

где x — начальный капитал, c — постоянная скорость поступления премий, $S(t) = \sum_{j=1}^{N(t)} Y_j$ — процесс выплаты возмещений. Количество $N(t)$ требований, поступивших к моменту t, — пуассоновский процесс с параметром λ, не зависящий от размеров требований Y_j, являющихся независимыми одинаково распределенными случайными величинами с функцией распределения $F(y)$, обладающей плотностью $p(y)$. Предполагается, что дивиденды выплачиваются в соответствии с барьерной стратегией, т.е. выплаты начинаются по достижении капиталом барьера и прекращаются при поступлении очередного требования.

Пусть $V(x,b)$ — ожидаемые дисконтированные дивиденды, выплаченные акционерам до разорения, при начальном капитале x, величине барьера b и коэффициенте дисконтирования δ. В случае экспоненциально распределенных требований был предложен метод[19] сведения интегродифференциального уравнения для $V(x,b)$ к обыкновенному дифференциальному. В диссертации был обобщен этот метод и с его помощью была найдена величина выплаченных дивидендов при гамма–распределенных требованиях.

Теорема 1.1 *Пусть функция распределения поступающих требований* $F(u) = G(n,\beta u) = 1 - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\beta u)^k}{k!} e^{-\beta u}$, $n \in N$, *а плотность равна* $p(u) = \beta \frac{(\beta u)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\beta u}, u > 0$. *Тогда функция* $V(x,b)$ *имеет вид*
при $n = 2q+1$

$$\sum_{k=0}^{1} C_k(b) e^{r_k x} + \sum_{j=1}^{q} (C_{2j}(b)\cos(\mu_j x) + C_{2j+1}(b)\sin(\mu_j x)) e^{\nu_j x},$$

при $n = 2q$

$$\sum_{k=0}^{2} C_k(b) e^{r_k x} + \sum_{j=1}^{q-1} (C_{2j+1}(b)\cos(\mu_j x) + C_{2j+2}(b)\sin(\mu_j x)) e^{\nu_j x},$$

где r_k *и* $\nu_j \pm i\mu_j$ *— решения уравнения* $ct(t+\beta)^n - (\lambda+\delta)(t+\beta)^n + \lambda\beta^n = 0$. *Константы* $C_i(b)$, $i = 0, \ldots, n$, *задаются системой уравнений*
при $n = 2q+1$

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{j=1}^{q} e^{\nu_j b}((\nu_j \cos(\mu_j b) - \mu_j \sin(\mu_j b)) C_{2j}(b) + \\ \qquad + (\nu_j \sin(\mu_j b) + \mu_j \cos(\mu_j b)) C_{2j+1}(b)) + \displaystyle\sum_{k=0}^{1} C_k(b) r_k e^{r_k b} = 1, \\ \displaystyle\sum_{k=0}^{1} \frac{C_k(b)}{r_k+\beta} = \sum_{j=1}^{q} \frac{\mu_j C_{2j+1}(b) - (\nu_j+\beta) C_{2j}(b)}{\mu_j^2 + (\nu_j+\beta)^2}, \\ \vdots \\ \displaystyle\sum_{k=0}^{1} \frac{C_k(b)}{(r_k+\beta)^n} = \sum_{j=1}^{q} \frac{g_{n-1}^{(j)} C_{2j+1}(b) + f_{n-1}^{(j)} C_{2j}(b)}{(\mu_j^2 + (\nu_j+\beta)^2)^n}, \end{cases}$$

[19] Gerber H.U. *An Introduction to Mathematical Risk Theory*, Huebner Foundation, Philadelphia, 1979.

при $n = 2q$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{q-1} e^{\nu_j b}((\nu_j \cos(\mu_j b) - \mu_j \sin(\mu_j b))C_{2j+1}(b) + \\ \quad + (\nu_j \sin(\mu_j b) + \mu_j \cos(\mu_j b))C_{2j+2}(b)) + \sum_{k=0}^{2} C_k(b) r_k e^{r_k b} = 1, \\ \sum_{k=0}^{2} \frac{C_k(b)}{r_k+\beta} = \sum_{j=1}^{q-1} \frac{\mu_j C_{2j+2}(b) - (\nu_j+\beta)C_{2j+1}(b)}{\mu_j^2 + (\nu_j+\beta)^2}, \\ \vdots \\ \sum_{k=0}^{2} \frac{C_k(b)}{(r_k+\beta)^n} = \sum_{j=1}^{q-1} \frac{g_{n-1}^{(j)} C_{2j+2}(b) + f_{n-1}^{(j)} C_{2j+1}(b)}{(\mu_j^2 + (\nu_j+\beta)^2)^n}. \end{cases}$$

Выражения f_l, g_l *определяются рекурентно по формулам*

$$f_l^{(j)} = \mu_j g_{l-1}^{(j)} + (\nu_j+\beta) f_{l-1}^{(j)}, \quad g_l^{(j)} = (\nu_j+\beta) g_{l-1}^{(j)} - \mu_j f_{l-1}^{(j)}$$

с начальными значениями $f_0^{(j)} = -(\nu_j+\beta)$, $g_0^{(j)} = \mu_j$.

При помощи метода дифференциальных операторов также можно найти дивиденды при равномерном распределении поступающих требований.

Теорема 1.2 *Пусть размеры требований распределены равномерно на отрезке* $[0,d]$, *а премии выплачиваются в соответствии с принципом среднего* $c = (1+\theta)\lambda EY_1$, *тогда на интервале* $[nd,(n+1)d)$ *функция* $V(x,b)$ *имеет вид*

1) при $\theta < \frac{1}{2}(1+\frac{\delta}{\lambda})^2 - 1$

$V(x,b) = e^{p(x-nd)} \sum_{j=0}^{n} \frac{(x-nd)^j \left(e^{\tilde f(x-nd)} C_{n,2j+1}(b) + e^{-\tilde f(x-nd)} C_{n,2(j+1)}(b)\right)}{j!}$;

2) при $\theta = \frac{1}{2}(1+\frac{\delta}{\lambda})^2 - 1$

$V(x,b) = e^{p(x-nd)} \sum_{j=0}^{2n+1} \frac{(x-nd)^j}{j!} C_{n,j+1}(b)$;

3) при $\theta > \frac{1}{2}(1+\frac{\delta}{\lambda})^2 - 1$

$V(x,b) = e^{p(x-nd)} \sum_{j=0}^{n} \frac{(x-nd)^j \left(C_{n,2j+1}(b)\cos f(x-nd) + C_{n,2(j+1)}(b)\sin f(x-nd)\right)}{j!}$.

Здесь $p = \frac{\lambda+\delta}{2c}$, $f = \sqrt{\frac{\lambda}{cd} - p^2}$, $\tilde f = \sqrt{p^2 - \frac{\lambda}{cd}}$.

Использованный выше метод применим не для всех распределений. Однако плодотворным оказался метод сведения исходного уравнения для величины дивидендов к уравнению восстановления.

Теорема 1.3 *Решение интегродифференциального уравнения*

$$cu'(x) - (\lambda+\delta)u(x) + \lambda \int\limits_0^x u(x-y)dF(y) = 0,\ 0 < x < b,$$

есть решение уравнения восстановления

$$u(x) = u(0)e^{\frac{\lambda+\delta}{c}x} + \frac{\lambda}{c}\int_0^b u(z)G(x,z)dz,$$

где $G(x,z) = \int_z^b K(x,y)dF(y-z)$, *а*

$$K(x,y) = \begin{cases} -e^{\frac{\lambda+\delta}{c}(x-y)}, & 0 < y < x, \\ 0, & x < y < b. \end{cases}$$

С помощью перехода к уравнению восстановления в работе была получена формула для величины выплаченных акционерам дивидендов при произвольном распределении требований.

Следствие 1.2
Ожидаемые дисконтированные дивиденды могут быть найдены в виде

$$V(x,b) = \frac{e^{\frac{\lambda+\delta}{c}x} + \sum_{k=1}^{\infty}(\frac{\lambda}{c})^k \int_0^b G^{(k)}(x,z)e^{\frac{\lambda+\delta}{c}z}dz}{\frac{\lambda+\delta}{c}e^{\frac{\lambda+\delta}{c}b} + \sum_{k=1}^{\infty}(\frac{\lambda}{c})^k \int_0^b \frac{dG^{(k)}}{dx}(b,z)e^{\frac{\lambda+\delta}{c}z}dz},$$

где

$$\frac{dG^{(k)}(x,z)}{dx} = \int_0^b \frac{dG(x,s)}{dx}G^{(k-1)}(s,z)ds.$$

Найденный вид величины $V(x,b)$ позволяет решить вопрос, как меняются дивиденды при изменении распределения поступающих требований. Пусть для распределений требований $F_1(y), F_2(y)$ с плотностями $p_1(y), p_2(y)$ величины ожидаемых дисконтированных дивидендов равны соответственно $V_1(x,b), V_2(x,b)$, а премии выплачиваются с одинаковой скоростью.

Теорема 1.4 *Пусть* $a_x = \max_{y\in[0,x]}|p_1(y) - p_2(y)|$, *тогда*

$$|V_1(x,b) - V_2(x,b)| \le \frac{P(b)e^{\frac{\lambda+\delta}{c}b}}{max(|v_1'(b)|, |v_2'(b)|)}a_b,$$

где

$$P(b) = b^2 e^{\frac{\lambda}{c}b}\frac{\lambda}{c}\left(1 + \frac{\lambda}{\delta}\right) + \frac{c}{\delta}(e^{\frac{\lambda}{c}b} - 1).$$

Выше речь шла о величине ожидаемых дивидендов, однако аналогичные утверждения справедливы и для ожидаемых убытков при разорении. Для времени до разорения T_x, при начальном капитале x, получена следующая теорема.

Теорема 1.8 *Пусть $\phi_k(x,b) = ET_x^k$. Тогда как функция x она удовлетворяет интегродифференциальному уравнению*

$$c\phi_k'(x,b) - \lambda\phi_k(x,b) + \lambda\int\limits_0^x \phi_k(x-y,b)dF(y) + k\phi_{k-1}(x,b) = 0, \quad 0 < x < b,$$

с граничным условием $\phi_k'(b,b) = 0$.

Как и в случае с дивидендами при экспоненциальном, гамма и равномерном распределениях требований можно решить уравнение, сведя его к обыкновенному дифференциальному.

Пример 1.5 *При экспоненциальном распределении требований с параметром β среднее время работы компании до разорения есть*

$$\phi_1(x,b) = -\frac{\beta x + 1}{c\beta - \lambda} + \frac{c\beta}{(c\beta-\lambda)^2}e^{\frac{c\beta-\lambda}{c}b}\left(\frac{c\beta}{\lambda} - e^{-\frac{c\beta-\lambda}{c}x}\right).$$

Во **второй главе** к рассмотренной выше модели добавляется возможность использования перестрахования и исследуется его влияние на время работы компании до разорения и ожидаемые дисконтированные дивиденды.

Введение перестрахования означает, что часть поступающих премий отдается перестраховщику, но зато при поступлении требования Y страховщик покрывает только часть $h(Y) \le Y$. Соответственно, капитал перепишется в виде

$$U_R(t) = x + c_R t - S_R(t),$$

где $c_R = (1+\theta)\lambda EY - (1+\theta_R)\lambda E(Y - h(Y))$ — новая скорость поступления премий со страховой нагрузкой θ и перестраховочной нагрузкой θ_R, $S_R(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} h(Y_i)$ — новый процесс выплаты возмещений.

Рассмотрим три типа перестрахования: квотное ($h(Y) = aY$ с квотой $0 < a \le 1$), эксцедент суммы ($h(Y) = a_j Y$, где $a_j = 1 - \frac{\min((K_j-L)^+, C)}{K_j}$, K_j — страховая сумма j-го страхового полиса, L — уровень собственного удержания и C — лимит ответственности перестраховщика) и эксцедент убытка ($h(Y) = \min(Y, M)$ с уровнем собственного удержания M). В зависимости от используемого типа перестрахования для величины дивидендов выполнены следующие теоремы:

Теорема 2.3 *Для квотного перестрахования $V(x,b)$, как функция x, удовлетворяет интегродифференциальному уравнению*

$$c_R V'(x,b) - (\lambda+\delta)V(x,b) + \lambda\int_0^x V(x-y,b)dF(y/a) = 0$$

с граничным условием $V'(b,b) = 1$.

Теорема 2.4 *Если компания использует перестрахование типа эксцедент суммы, то можно выбрать такую интенсивность* $\tilde{\lambda}$ *и функцию распределения* $\tilde{F}$, *что* $V(x,b)$ *будет удовлетворять интегродифференциальному уравнению*

$$c_R V'(x,b) - (\tilde{\lambda}+\delta)V(x,b) + \tilde{\lambda}\int_0^x V(x-y,b)d\tilde{F}(y) = 0$$

с граничным условием $V'(b,b) = 1$.

Теорема 2.5 *При использовании договора перестрахования типа эксцедент убытка для* $V(x,b)$ *будет справедливо интегродифференциальное уравнение*

$$\left[\begin{array}{ll} c_R V'(x,b) - (\lambda+\delta)V(x,b) + \lambda\int_0^x V(x-y,b)dF(y) = 0, & 0 < x < M, \\ c_R V'(x,b) - (\lambda+\delta)V(x,b) + \lambda\int_0^M V(x-y,b)dF(y) + & \\ \quad +\lambda V(x-M,b)(1-F(M)) = 0, & b > x \geq M, \end{array}\right.$$

с граничным условием $V'(b,b) = 1$.

Для пропорционального перестрахования исследуется вопрос о влиянии использования перестраховочной политики на величину ожидаемых дивидендов и среднее время до разорения.

Теорема 2.7 *В модели с экспоненциально распределенными требованиями (параметр* β*), барьерной дивидендной стратегией (барьер* b*) и квотным перестрахованием (квота* a*, перестраховочная нагрузка* $\theta_R = \theta$*) максимальные дивиденды будут получены при отсутствии перестрахования* ($a = 1$).

С точки зрения полученных акционерами дивидендов, оптимальным будет не использовать квотное перестрахование и взять барьер, максимизирующий дивиденды в случае без перестрахования. Для времени до разорения получается противоположный результат.

Теорема 2.8 *При* $\theta_R = \theta$ *оптимальная (с точки зрения времени работы компании) перестраховочная стратегия отдать как можно большую часть требований перестраховщику.*

В **третьей главе** предполагается, что акционеры покрывают убытки при разорении и возвращают капитал на уровень y, с которого компания и продолжает работу (модификация Диксона и Уотерса).

В первом параграфе третьей главы речь идет о модификации модели, описанной в главе 1. Пусть как и раньше $V(x,b)$ — ожидаемые дисконтированные дивиденды, выплаченные до разорения, T_x — время работы компании до разорения при начальном капитале x. Тогда ожидаемые дисконтированные дивиденды $\hat{V}(x,y,b)$ при бесконечном времени работы компании можно записать как

$$\hat{V}(x,y,b) = V(x,b) + V(y,b)\frac{Ee^{-\delta T_x}}{1 - Ee^{-\delta T_y}}.$$

Теорема 3.1 *При экспоненциальном распределении требований максимальные дивиденды $\hat{V}(x,y,b)$ будут получены при наименьшем возможном дивидендном барьере, т.е. $b = max(x,y)$.*

Пусть $R(x,b)$ — ожидаемые дисконтированные убытки, выплаченные при первом разорении, тогда убытки акционеров при бесконечном времени работы компании, с учетом возвращения капитала после разорения на уровень y, равны

$$\hat{R}(x,y,b) = R(x,b) + yEe^{-\delta T_x} + (R(y,b) + yEe^{-\delta T_y})\frac{Ee^{-\delta T_x}}{1 - Ee^{-\delta T_y}}.$$

Доход акционеров есть

$$\hat{W}(x,y,b) = \hat{V}(x,y,b) - \hat{R}(x,y,b).$$

Теорема 3.4 *С точки зрения полученных акционерами доходов, оптимальной дивидендной стратегией будет $b = max(x,y)$.*

В предложенной модели акционеры покрывают убытки и компания возобновляет работу. Следовательно, процесс изменения капитала представляет собой регенерирующий процесс, а вложенный процесс восстановления определяется моментами разорения компании.

Теорема 3.8 *При экспоненциально распределенных требованиях и заданном уровне возвращения y предел усредненного по времени распределения капитала есть стационарное распределение.*

Во втором параграфе третьей главы рассматривается дискретная модель. Пусть начальный капитал x — неотрицательное целое число. За один шаг капитал может увеличиться на 1 с вероятностью p, уменьшиться на 1 с вероятностью q и остаться таким же с вероятностью r. Если капитал компании превышает уровень $n \in N$, то компания выплачивает акционерам дивиденды. Если же капитал компании становится меньше 0, то акционеры вкладывают свои средства, чтобы вернуть капитал на уровень $y \leq n$ (y — неотрицательное целое число).

Теорема 3.9 *Пусть $m_x(n,y)$ — средние дисконтированные дивиденды, выплачиваемые акционерам, при начальном капитале x, дивидендном барьере n и уровне возвращения y. Если v — коэффициент дисконтирования, то $m_x(n,y)$ имеет вид*

$$m_x(n,y) = \frac{c_1(y)a_1^x + c_2(y)a_2^x}{\Delta_n(y)},$$

где a_1, a_2 — *корни уравнения* $vpa^2 + (vr-1)a + vq = 0$,

$$c_1(y) = qa_2^y - pa_1, \quad c_2(y) = pa_2 - qa_1^y,$$
$$\Delta_n(y) = a_2^n(a_2-1)c_2(y) - a_1^n(1-a_1)c_1(y).$$

Теорема 3.10 *Оптимальный, с точки зрения выплаченных акционерам дивидендов, барьер равен* $max(x, y)$.

Для дохода акционеров, т.е. разницы между полученными дивидендами и покрытыми убытками, справедливы аналогичные утверждения.

Теорема 3.13 *Пусть* $\beta_x(n,y)$ — *дисконтированный доход акционеров (т.е. разница между дивидендами и убытками) при начальном капитале* x, *дивидендном барьере* n *и уровне возвращения* y. *Тогда*

$$\beta_x(n,y) = \frac{c_1(y)a_1^x + c_2(y)a_2^x - q(y+1)\psi(x,n)}{\Delta_n(y)},$$

где $\psi(x,n) = (a_2-1)a_2^n a_1^x + (1-a_1)a_1^n a_2^x$.

Теорема 3.14 *Существует барьер, максимизирующий доход акционеров.*

Выше речь шла о прибыли акционеров за бесконечное время работы. Пусть случайная величина η_x — время работы компании до первого разорения. Тогда можно найти среднее время работы компании до разорения и предельное распределение времени работы, нормированного своим математическим ожиданием.

Теорема 3.15 *Пусть* $E_x = E\eta_x$ — *среднее время работы компании до разорения при начальном капитале* x *и дивидендном барьере* n. *Тогда при* $p \neq q$

$$E_x = \frac{x+1}{q-p} + \frac{p}{(q-p)^2}\left(\left(\frac{q}{p}\right)^{-n-1} - \left(\frac{q}{p}\right)^{x-n}\right),$$

при $p = q$

$$E_x = \frac{-x^2 + (2n+1)x + 2(n+1)}{2p}.$$

Как и при нахождении среднего времени, при исследовании предельного распределения $\frac{\eta_x}{E\eta_x}$ можно выделить два случая: $p = q$ и $p \neq q$.

Теорема 3.16 *Пусть* x — *начальный капитал, а* n — *уровень выплаты дивидендов. Тогда если* $p = q$, *то при* $r \to 1$ *предельное распределение нормированного своим математическим ожиданием времени до разорения есть смесь* $(n - x + 1)$ *распределений, где* k*–е распределение* $(k = 0, \ldots, n-x)$ *представляет из себя свертку* $(n-k+1)$ *экспоненциального распределения с параметрами* $(-x^2+(2n+1)x+2(n+1))(1-\cos\frac{2j+1}{2n+3}\pi)$, $j = k, \ldots, n$.

Теорема 3.17 *Если* $p \neq q$, *то при* $r \to 1$ *предельное распределение*

нормированного своим математическим ожиданием времени до первого разорения при начальном капитале x и дивидендном барьере n
1) является экспоненциальным с параметром 1, если $qp^{-1} \to 0$;
2) является суммой $x+1$ экспоненциально распределенной случайной величины с параметром $x+1$, если $qp^{-1} \to \infty$;
3) обладает плотностью

$$p(u) = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{\hat{S}_{n-x}(\gamma_k)}{H_k(\gamma_k)} e^{\gamma_k u},$$

если $qp^{-1} \to d \neq 0$ или 1.
Здесь γ_k, $k = 1, \ldots, n+1$, — корни уравнения $\hat{S}_{n+1}(u) = 0$,

$$H_k(u) = \frac{\hat{S}_{n+1}(u)}{u - \gamma_k} \text{ и } \hat{S}_m(u) = d^{-m} \sum_{k=0}^{m} \sum_{k=j}^{m} B_k(m) \binom{k}{j} (cu)^j (d+1)^{k-j} 2^{-k},$$

где

$$c = (d-1)^2((d-1)(x+1) + d^{-n-1} - d^{x-n})^{-1},$$

а коэффициенты $B_k(m)$ вычисляются по формулам
при четном m

$$B_{2l+1}(m) = -\sum_{j=0}^{\left[\frac{m-1}{2}\right]} \binom{m}{2j+1} \binom{j}{j+l+1-\frac{m}{2}} (-d)^{\frac{m}{2}-l-1},$$

$$B_{2l}(m) = \sum_{j=0}^{\frac{m}{2}} \binom{m+1}{2j+1} \binom{j}{j+l-\frac{m}{2}} (-d)^{\frac{m}{2}-l};$$

при нечетном m

$$B_{2l+1}(m) = \sum_{j=0}^{\left[\frac{m}{2}\right]} \binom{m+1}{2j+1} \binom{j}{j+l-\frac{m-1}{2}} (-d)^{\frac{m-1}{2}-l};$$

$$B_{2l}(m) = -\sum_{j=0}^{\frac{m-1}{2}} \binom{m}{2j+1} \binom{j}{j+l-\frac{m-1}{2}} (-d)^{\frac{m-1}{2}-l}.$$

Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю, доктору физико–математических наук, профессору Екатерине Вадимовне Булинской за постановку задачи, постоянное внимание и помощь в работе.

Работы автора по теме диссертации

[1] Карапетян Н. В. *Исследование устойчивости величины дивидендов к возмущению базового процесса*, Обозрение прикладной и промышленной математики. 2011. Том 18, выпуск 1, стр. 55—62.

[2] Карапетян Н. В. *Оптимизация дивидендной стратегии страховой компании, продолжающей работу после разорения*, Вестн. Моск. ун-та. Сер.1, Математика. Механика. 2012. N 2, стр. 54—57.

[3] Карапетян Н. В. *Оптимизация барьера выплаты дивидендов при гамма–распределении требований*, Вестн. Моск. ун-та. Сер.1, Математика. Механика. 2009. N 5, стр. 57—60.

[4] Карапетян Н. В. *Исследование оптимальных стратегий работы страховой компании*, Деп. в ВИНИТИ N 409–B2011, 20 стр.

[5] Karapetyan N. V. *Dividends and Reinsurance*, Proceedings of 6th St. Petersburg Workshop on Simulation, 2009, p. 47—52.