МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М. В. ЛОМОНОСОВА
МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

На правах рукописи
УДК 517.98

ВОЛОСОВА Нина Владимировна

КОГОМОЛОГИИ КВАНТОВЫХ БАНАХОВЫХ И ПОЛИНОРМИРОВАННЫХ АЛГЕБР

(01.01.01 — вещественный, комплексный и функциональный анализ)

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Москва — 2012

Работа выполнена на кафедре теории функций и функционального анализа механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова.

Научные руководители:

доктор физико-математических наук, профессор
Селиванов Юрий Васильевич;
доктор физико-математических наук, профессор
Хелемский Александр Яковлевич.

Официальные оппоненты:

Артамонов Вячеслав Александрович,
доктор физико-математических наук, профессор, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, механико-математический факультет, профессор кафедры высшей алгебры;

Овчинников Владимир Иванович,
доктор физико-математических наук, профессор, Воронежский государственный университет, математический факультет, профессор кафедры математического моделирования.

Ведущая организация: Вологодский государственный технический университет.

Защита диссертации состоится “30” марта в 16 час. 40 мин. на заседании диссертационного совета Д 501.001.85 в Московском государственном университете им. М. В. Ломоносова по адресу: 119991, ГСП-1, Москва, Ленинские горы, МГУ, механико-математический факультет, аудитория 16-24.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке механико-математического факультета МГУ (Главное здание, 14 этаж).

Автореферат разослан “29” февраля 2012 г.

Учёный секретарь диссертационного
совета Д 501.001.85 в МГУ
доктор физико-математических наук,
профессор В. Н. Сорокин

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Предмет диссертации относится к квантовому функциональному анализу, также называемому теорией операторных пространств[1, 2, 3]. Временем возникновения этого направления в современном анализе можно считать начало 80-ых годов прошлого века, когда в работах Г. Виттстока, У. Хаагерупа и В. Полсена появилось понятие вполне ограниченного отображения[4, 5, 6]. Термин “квантованный функциональный анализ” впервые использовал Э. Эффрос[7] в 1986 году. Следуя А. Я. Хелемскому[8], мы используем более короткий термин “квантовый”. Отличительной чертой квантового анализа является наделение линейного пространства более богатой структурой — квантовой нормой или семейством квантовых преднорм — по сравнению с обычными нормированными и локально выпуклыми пространствами, изучаемыми “классическим” функциональным анализом. Рассмотрение именно квантовой (а не обычной) нормы и соответствующего этой структуре типа ограниченности операторов естественно и целесообразно для довольно большого круга задач. Некоторые вопросы, не имеющие удовлетворительных ответов в терминах классического функционального анализа, получают изящное решение, будучи поставлены в рамках квантовой теории.

Существует два по сути эквивалентных подхода к тому, что называть квантовой нормой в линейном пространстве E. Первый заключается в рассмотрении семейства норм, удовлетворяющих определённым условиям (так называемым аксиомам Руана), в пространствах матриц с элементами из E[1, 2, 9]. Другой подход[8] предполагает рассмотрение одной нормы (также удовлетворяющей соответствующей версии аксиом Руана), а не их семейства, но в “большем” пространстве, а именно в алгебраическом тензорном произведении $\mathcal{F} \otimes E$, где $\mathcal{F}$ — пространство всех ограниченных конечномерных операторов в сепарабельном бесконечномерном

---

[1] Blecher D. P., Le Merdy C. *Operator algebras and their modules—an operator space approach.* Oxford, Clarendon Press, 2004.

[2] Effros E. G., Ruan Z.-J. *Operator spaces.* Oxford, Clarendon Press, 2000.

[3] Pisier J. *Introduction to operator space theory.* Cambridge, Cambridge Univ. Press, 2003.

[4] Wittstock G. Extensions of completely bounded module morphisms. *Proc. Conference on Operator Algebras and Group Representations.* Neptum, Pitman, 1983.

[5] Haagerup U. Decomposition of completely bounded maps on operator algebras. Unpublished manuscript, 1980.

[6] Paulsen V. I. Completely bounded maps on C^*-algebras and invariant operator ranges. *Proc. Amer. Math. Soc.* **86** (1982), 91–96.

[7] Effros E. G. Advances in quantized functional analysis. *Proceedings International Congress of Mathematicians.* Berkeley, 1986, 906–916.

[8] Хелемский А. Я. *Квантовый функциональный анализ в бескоординатном исполнении.* М., МЦНМО, 2009.

[9] Paulsen V. I. *Completely bounded maps and operator algebras.* Cambridge, Cambridge Univ. Press, 2002.

гильбертовом пространстве.

Если говорить о полинормированных (локально выпуклых) пространствах, то их квантование рассматривалось, например, Э. Эффросом и К. Вебстером[10]. До настоящего времени авторы, разрабатывавшие эту теорию, придерживались "матричного" подхода к понятию квантовой уже не нормы, а преднормы. В диссертации же к полинормированным (так же, как и к нормированным) пространствам применён "безматричный" подход, обладающий, как нам кажется, рядом преимуществ по сравнению с "матричным".

Одной из черт, отличающей квантовый функциональный анализ от классического, является существование в первом сразу двух содержательных понятий вполне непрерывного билинейного оператора, которым соответствуют два типа квантовых (полинормированных или банаховых) алгебр, так называемых $\overset{h}{\otimes}$- и $\overset{o}{\otimes}$-алгебр, и два типа категорий квантовых левых (правых, би-) модулей.

В диссертации рассмотрены задачи, относящиеся к квантовому варианту топологической гомологии — области функционального анализа, изучающей банаховы и локально выпуклые топологические алгебры и их непрерывные представления (банаховы и топологические модули) с использованием методов гомологической алгебры.

Эта область выделилась в 1962 году, когда Г. Камовиц[11], используя банахов аналог комплекса Хохшильда, определил группы когомологий $\mathcal{H}^n(A, X)$ $(n = 0, 1, \dots)$ банаховой алгебры A с коэффициентами в банаховом A-бимодуле X. Впоследствии эти группы применялись к задачам, связанным с дифференцированиями, расширениями и возмущениями банаховых алгебр[12], с аменабельными локально компактными группами[13].

В 1970 году А. Я. Хелемским[14] был предложен способ перенести понятия производных функторов и резольвент на случай банаховых алгебр и модулей. Оказалось, что это возможно осуществить при помощи специального относительного варианта гомологической алгебры, в основе которого лежит понятие относительно проективного банахова модуля. Тогда же были введены важные понятия гомологической размерности ${}_A\mathrm{dh}\, X$ банахова модуля X над банаховой алгеброй A, глобальной гомологической размерности $\mathrm{dg}\, A$ и гомологической биразмерности $\mathrm{db}\, A$ этой

---

[10] Effros E. G., Webster C., Operator analogues of locally convex spaces. *Operator Algebras and Applications* (ed. by A. Katavolos). Dordrecht, Kluwer Academic Publishers, 1997, 163–207.

[11] Kamovitz H. Cohomology groups of commutative Banach algebras. *Trans. Amer. Math. Soc.* **102** (1962), 352–372.

[12] Raeburn I., Taylor J. L. Hochschild cohomology and perturbations of Banach algebras. *J. Funct. Anal.* **25** (1977), 258–266.

[13] Johnson B. E. Cohomology in Banach algebras. *Mem. Amer. Math. Soc.* **127** (1972).

[14] Хелемский А. Я. О гомологической размерности нормированных модулей над банаховыми алгебрами. *Матем. сборник* **81** (123) (1970), № 3, 430–444.

алгебры.

Как и в теории ассоциативных алгебр, данный подход предоставил возможность подойти к изучению когомологий банаховых алгебр с более общей точки зрения и, кроме того, открыл новые полезные объекты для изучения. С этого времени общие гомологические методы стали активно применяться в различных задачах теории банаховых алгебр. Они дали возможность получить информацию о существовании аналитической структуры в спектре коммутативной банаховой алгебры[15], получить гомологические критерии для топологических свойств, таких как паракомпактность[16] и метризуемость[17], доказать сильные теоремы о структурных свойствах алгебр фон Ноймана и других самосопряжённых и несамосопряжённых операторных алгебр[18, 19].

Вскоре после появления указанных методов стало понятно, что вопрос об оценке и вычислении гомологической размерности (у истоков этого понятия стоит теорема Д. Гильберта о сизигиях[20]) имеет самостоятельный интерес. Многие важные вопросы и результаты стали формулироваться на языке размерностей банаховых алгебр, а следовательно, стали касаться не отдельных классов, а сразу всех банаховых модулей либо бимодулей над данной банаховой алгеброй.

Оказалось, что гомологические размерности банаховых алгебр обладают некоторыми специфическими свойствами, не имеющими аналогов в абстрактной алгебре. Один из старейших фактов этого рода — теорема о глобальной размерности[21, 22], доказанная А. Я. Хелемским в 1972 году. Эта теорема утверждает, что в классе коммутативных банаховых алгебр A с бесконечным гельфандовским спектром верна оценка $\operatorname{dg} A \geqslant 2$ и, как следствие, в этом случае $\mathcal{H}^2(A, X) \neq 0$ для некоторого банахова A-бимодуля X. Из этой теоремы, в частности, следует существование нетривиальных (нерасщепимых) сингулярных расширений бесконечномерных функциональных банаховых алгебр.

Тем самым в классе коммутативных банаховых алгебр с бесконеч-

---

[15] Пугач Л.И. Проективные и плоские идеалы функциональных алгебр, их связь с аналитической структурой. *Матем. заметки* **31** (1982), вып. 2, 223–229.

[16] Хелемский А. Я. Описание относительно проективных идеалов в алгебрах $C(\Omega)$. *Докл. АН СССР* **195** (1970), № 6, 1286–1289.

[17] Курмакаева Е. Ш. Зависимость строгой гомологической размерности $C(\Omega)$ от топологии Ω. *Матем. заметки* **55** (1994), 76–83.

[18] Хелемский А. Я. Гомологическая сущность аменабельности по Конну: инъективность предуального бимодуля. *Матем. сборник* **180** (1989), № 12, 1680–1690.

[19] Головин Ю. О. Гомологические свойства гильбертовых модулей над гнездовыми операторными алгебрами. *Матем. заметки* **41** (1987), вып. 6, 769–775.

[20] Hilbert D. Über die Theorie der Algebraischen Formen. *Math. Ann.* **36** (1890), 437–534.

[21] Хелемский А. Я. Глобальная размерность функциональной банаховой алгебры отлична от единицы. *Функц. анал. и его приложения* **6** (1972), вып. 2, 95–96.

[22] Хелемский А. Я. Низшие значения, принимаемые глобальной гомологической размерностью функциональных банаховых алгебр. *Труды семинара им. И. Г. Петровского* **3** (1978), 223–242.

ным спектром число 1 является “запрещенным” значением для глобальной размерности (а значит, и для биразмерности); это явление связано с рядом особенностей банаховых структур, и прежде всего с наличием недополняемых замкнутых подпространств в банаховых пространствах.

К настоящему времени оценка $\operatorname{dg} A \geqslant 2$ установлена для некоторых других классов банаховых алгебр; в частности, она имеет место для достаточно широкого класса так называемых “бипроективных” банаховых алгебр[23] (в частности, для групповых алгебр $L^1(G)$ и $C^*(G)$ любой бесконечной компактной группы[24]), а также для всех бесконечномерных CCR-C^*-алгебр[25], всех бесконечномерных сепарабельных GCR-C^*-алгебр[26] и всех весовых сверточных алгебр $L^1(\omega)$ на полупрямой[27].

В диссертации доказана аналогичная теорема (теорема 2.3.1; см. также теорему 2.3.2) для квантовых банаховых алгебр, для каждого из двух типов которых существует соответствующая гомологическая теория[28]. Как один из промежуточных результатов получен критерий проективности замкнутого идеала в банаховой алгебре $C(\Omega)$ непрерывных функций на компакте, рассмотренной с минимальным квантованием. Этим критерием, как и в классическом случае[16], является паракомпактность спектра идеала.

Следующая задача, рассмотренная в диссертации, относится к гомологической теории квантовых полинормированных алгебр, которая тоже строится в двух вариантах — для двух типов категорий квантовых полинормированных модулей над полинормированными алгебрами. Мы рассматриваем так называемые стягиваемые алгебры — наиболее простые с точки зрения этой теории.

В чистой алгебре верен следующий критерий стягиваемости:

Комплексная алгебра A стягиваема $\Leftrightarrow$ она конечномерна и полупроста $\Leftrightarrow$ она изоморфна декартову произведению конечного числа полных матричных алгебр с комплексными коэффициентами[29].

В течение долгого времени этот критерий пытались распространить на

---

[23] Selivanov Yu. V. Coretraction problems and homological properties of Banach algebras. *Topological Homology: Helemskii's Moscow Seminar* (ed. by A. Ya. Helemskii). New York, Nova Science, 2000, 145–199.

[24] Хелемский А. Я. Об одном методе вычисления и оценки глобальной гомологической размерности банаховых алгебр. *Матем. сборник* **87** (1972), 122–135.

[25] Лыкова З. А. Оценка снизу глобальной гомологической размерности бесконечномерных CCR-алгебр. *Успехи матем. наук* **41** (1986), 197–198.

[26] Аристов О. Ю. Теорема о глобальной размерности для неунитальных и некоторых других сепарабельных C^*-алгебр. *Матем. сборник* **186** (1995), 3–18.

[27] Ghahramani F., Selivanov Yu. V. The global dimension theorem for weighted convolution algebras. *Proc. Edinburgh Math. Soc.* **41** (1998), 393–406.

[28] Хелемский А. Я. Проективные модули в классическом и квантовом функциональном анализе. *Фундамент. и прикл. матем.* **13** (2007), № 7, 7–84.

[29] Пирс Р. *Ассоциативные алгебры.* М., Мир, 1986.

различные классы банаховых и топологических алгебр. До сих пор неизвестно, верен ли он для произвольных банаховых алгебр. Для алгебр Аренса–Майкла похожие критерии (но только с бесконечным числом сомножителей) верны при наложении на алгебру некоторых дополнительных условий, например условия коммутативности:

Коммутативная алгебра Аренса–Майкла A *стягиваема* $\Leftrightarrow$ *она топологически изоморфна* $\mathbb{C}^M$ *для некоторого множества* M[30].

— или определённых требований к геометрии алгебры:

Пусть A *— метризуемая алгебра Аренса–Майкла, которая является полупервичной и обладает свойством аппроксимации. Тогда* A *стягиваема* $\Leftrightarrow$ *она топологически изоморфна декартову произведению конечного или счётного семейства полных матричных алгебр*[31].

Что касается тех стягиваемых алгебр Фреше (полных метризуемых алгебр), которые не обязательно являются алгебрами Аренса–Майкла, то Ю. В. Селивановым[32], при некоторых достаточно широких ограничениях, было изучено их строение. Кроме того, им было показано[31], что оболочка Аренса–Майкла стягиваемой полупервичной алгебры Фреше, обладающей свойством аппроксимации, изоморфна декартову произведению семейства полных матричных алгебр.

Можно ли в классическом случае отказаться от упомянутых выше ограничений, неизвестно. Но проблема оказывается успешно решаемой в квантовом случае для одного из важных классов квантовых алгебр, а именно для $\overset{h}{\otimes}$-алгебр. Напомним, что В. Полсен и Р. Смит[33] доказали, что квантовая банахова $\overset{h}{\otimes}$-алгебра стягиваема тогда и только тогда, когда она топологически изоморфна декартову произведению конечного числа матричных C^*-алгебр.

В диссертации доказано аналогичное утверждение для соответствующего класса квантовых полинормированных алгебр (теорема 3.2.4), а именно для $\overset{h}{\otimes}$-алгебр Аренса–Майкла; естественно, тут число матричных алгебр уже не обязано быть конечным. Кроме того, показано, что если полинормированная $\overset{h}{\otimes}$-алгебра (не обязательно являющаяся $\overset{h}{\otimes}$-алгеброй Аренса–Майкла) стягиваема, то её оболочка Аренса–Майкла, понимаемая в смысле квантового функционального анализа, вполне изоморфна

---

[30] Хелемский А. Я. *Гомология в банаховых и топологических алгебрах.* М., Изд-во МГУ, 1986.

[31] Selivanov Yu. V. Fréchet algebras of global dimension zero. *Algebra* (Proc. 3rd Int. Conf. on Algebra, Krasnoyarsk, 1993). Berlin, Walter de Gruyter, 1996, 225–236.

[32] Селиванов Ю. В. *Когомологии банаховых и близких к ним алгебр.* Дисс. на соискание уч. ст. докт. физ.-матем. наук. М., МАТИ, 2002, 291 с.

[33] Paulsen V. I., Smith R. R. Diagonals in tensor products of operator algebras. *Proc. Edinburgh Math. Soc.* **45** (2002), 647–652.

декартову произведению некоторого семейства полных матричных C^*-алгебр. Таким образом, от ограничений, необходимых в случае классических полинормированных алгебр, тут можно отказаться.

Цель работы. Основная цель этой работы — исследование гомологических свойств квантовых банаховых и топологических алгебр. Главные результаты формируются вокруг следующих тем:

— перенос на локально выпуклые пространства "безматричной" теории квантовых банаховых пространств;

— оценка значений, принимаемых гомологическими размерностями коммутативных квантовых банаховых алгебр;

— описание строения когомологически тривиальных квантовых алгебр Аренса–Майкла.

Научная новизна. Все основные результаты диссертации являются новыми и получены автором самостоятельно. На защиту выносятся следующие основные результаты автора:

1) Введены (в "безматричном" изложении) квантовые аналоги локально выпуклых линейных топологических пространств, непрерывных линейных и билинейных операторов и базовых конструкций функционального анализа, в том числе конструкции проективного тензорного произведения. Основные понятия гомологической теории топологических алгебр перенесены на случай квантовых алгебр двух типов, соответствующих двум типам вполне непрерывного билинейного оператора.

2) Доказано, что любая коммутативная квантовая банахова алгебра с бесконечным спектром имеет максимум из левой и правой глобальной размерности, а также (гомологическую) биразмерность строго большие единицы. Как один из промежуточных результатов, установлено, что замкнутый идеал в квантовой банаховой алгебре $C(\Omega)$ непрерывных функций на компакте, рассмотренной с минимальным квантованием, проективен тогда и только тогда, когда его спектр паракомпактен.

3) Доказано, что квантовая алгебра Аренса–Майкла с сильно вполне непрерывным умножением стягиваема тогда и только тогда, когда она вполне изоморфна декартову произведению некоторого семейства полных матричных C^*-алгебр. В качестве следствия установлено, что оболочка Аренса–Майкла любой стягиваемой квантовой полинормированной алгебры с сильно вполне непрерывным умножением также вполне изоморфна декартову произведению полных матричных C^*-алгебр.

Теоретическая и практическая ценность. Работа носит теоретический характер. Результаты и методы данной работы могут найти применение в квантовом функциональном анализе, гомологической теории топологических алгебр, теории операторов и операторных алгебр.

Методы исследования. В диссертации используются общие методы функционального анализа, гомологической алгебры и общей топологии. Кроме того, применяются специфические методы гомологической теории топологических алгебр (техника допустимых резольвент и "топологических" производных функторов) и квантового функционального анализа (техника одномерных проекторов и частичных изометрий).

Апробация работы. Результаты диссертации докладывались на семинаре механико-математического факультета МГУ под руководством профессора А. Я. Хелемского (неоднократно с 2004 по 2011 год), на семинаре механико-математического факультета МГУ под руководством профессора В. Н. Латышева (2008), а также на международных конференциях "Банаховы алгебры 2005", (университет Бордо, Бордо, Франция, 2005) и "Банаховы алгебры 2009", (Международный математический центр имени Стефана Банаха, Бендлево, Польша, 2009).

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в работах автора [1–3], список которых приведён в конце автореферата.

Структура диссертации. Диссертация состоит из введения, трёх глав и списка литературы, содержащего 64 наименования. Общий объём диссертации — 122 страницы.

Краткое содержание диссертации

Во **введении** даётся краткий исторический обзор и объясняется происхождение задач, рассмотренных в диссертации, а также описывается структура и результаты диссертации.

Первая глава диссертации содержит общие сведения о квантовых полинормированных пространствах и алгебрах. Большая часть приведённых в ней сведений является обобщением результатов, известных ранее для квантовых нормированных пространств. В разделе 1.1 даны основные определения, касающиеся нашего предмета, и описаны конструкции, возникающие естественным образом при переносе на квантовые пространства таких базовых понятий функционального анализа, как подпространство, факторпространство, декартово произведение и пополнение. В частности, здесь вводится категория квантовых полинормированных пространств с вполне непрерывными линейными операторами в качестве морфизмов. Квантовые полинормированные пространства с точки зрения безматричного подхода определяются следующим образом.

Пусть L — бесконечномерное сепарабельное гильбертово пространство, $\mathcal{B} = \mathcal{B}(L)$ — пространство (алгебра) всех ограниченных линейных операторов в L, $\mathcal{F} = \mathcal{F}(L)$ — подпространство (двусторонний идеал) в $\mathcal{B}$, состоящее из конечномерных операторов.

Пусть теперь E — линейное пространство. Обозначим алгебраическое тензорное произведение $\mathcal{F} \otimes E$ через $\mathcal{F}E$, а для элементарных тензоров в $\mathcal{F}E$ будем использовать запись ax вместо $a \otimes x$.

Пространство $\mathcal{F}E$ является бимодулем над $\mathcal{B}$ относительно действий, определённых на элементарных тензорах следующим образом:

$$a \cdot bx = (ab)x, \quad bx \cdot a = (ba)x \qquad (a \in \mathcal{B},\ b \in \mathcal{F},\ x \in E).$$

Проектор (т. е. самосопряжённый идемпотент) $P \in \mathcal{B}$ называется *носителем* элемента $u \in \mathcal{F}E$, если $P \cdot u \cdot P = u$. Носители P и Q двух элементов u и v пространства $\mathcal{F}E$ называются *ортогональными*, если $PQ = 0$.

Будем называть пространство E *квантовым полинормированным пространством*, если в $\mathcal{F}E$ задано различающее его элементы семейство преднорм $\| \cdot \|_\lambda$ $(\lambda \in \Lambda)$, удовлетворяющих следующим двум условиям (“аксиомам Руана”):

(R_1) для всех $a \in \mathcal{B}$ и $u \in \mathcal{F}E$ выполнено $\|a \cdot u\|_\lambda,\ \|u \cdot a\|_\lambda \leqslant \|a\| \|u\|_\lambda$,

(R_2) для любых элементов $u, v \in \mathcal{F}E$, имеющих ортогональные носители, $\|u + v\|_\lambda = \max\{\|u\|_\lambda, \|v\|_\lambda\}$.

Такие преднормы называются *квантовыми.*

Заметим, что для каждого $\lambda \in \Lambda$ на E возникает преднорма (которая тоже обозначается $\| \cdot \|_\lambda$), определённая по правилу $\|x\|_\lambda = \|px\|_\lambda$, где $p \in \mathcal{F}$ — произвольный одномерный проектор. Известно[8], что это число не зависит от выбора p. Более того, мы имеем $\|ax\|_\lambda = \|a\| \|x\|_\lambda$ для всех $a \in \mathcal{F}$ и $x \in E$. Таким образом, E превращается в (хаусдорфово) полинормированное пространство.

Если E изначально задано как полинормированное пространство, то пространство $\mathcal{F}E$ с семейством квантовых преднорм, задающим на E исходную топологию, называется *квантованием* E. Отметим, что для конечномерного пространства существует единственное с точностью до непрерывного изоморфизма квантование (в общем случае это неверно).

Пусть E и F — квантовые полинормированные пространства, а

$$\varphi \colon E \to F$$

— линейный оператор. Оператор $\varphi_\infty = \mathbf{1}_{\mathcal{F}} \otimes \varphi \colon \mathcal{F}E \to \mathcal{F}F$ называется *размножением* оператора φ. Будем называть φ *вполне непрерывным*, если оператор φ_∞ непрерывен (относительно соответствующих квантовых преднорм).

В разделе 1.2 описаны два конкретных способа квантования полинормированного пространства — т. н. *минимальное* и *максимальное* квантования, задающие соответственно самую слабую и самую сильную из квантовых топологий, порождающих в E исходную топологию.

В разделе 1.3 приведены конструкции хаагерупова ($\overset{h}{\otimes}$) и операторно-проективного ($\overset{o}{\otimes}$) тензорных произведений, играющих для квантовых полинормированных пространств роль, во многом аналогичную роли проективного тензорного произведения в классическом функциональном анализе. Отметим, что наличие двух квантовых тензорных произведений связано с существованием двух содержательных понятий вполне непрерывного билинейного оператора. При этом хаагерупово тензорное произведение, в отличие от проективного в классическом анализе и операторно-проективного в квантовом, является некоммутативным.

Пусть E, F, G — квантовые полинормированные пространства. Билинейный оператор $R\colon E\times F \to G$ называется *сильно вполне непрерывным*, если непрерывно его *сильное размножение*

$$\mathcal{R}_s\colon \mathcal{F}E \times \mathcal{F}F \to \mathcal{F}G \qquad \big((ax, by) \mapsto (ab)R(x, y)\big),$$

и *слабо вполне непрерывным*, если непрерывно его *слабое размножение*

$$\mathcal{R}_w\colon \mathcal{F}E \times \mathcal{F}F \to \mathcal{F}G \qquad \big((ax, by) \mapsto (a\Diamond b)R(x, y)\big)$$

(здесь $a\Diamond b$ — т. н. *бубновое умножение*^{8}, схожее с тензорным произведением операторов в гильбертовом пространстве, но дающее в результате опять оператор из $\mathcal{F}$). Хаагерупово и операторно-проективное тензорные произведения линеаризуют соответственно сильно и слабо вполне непрерывные билинейные операторы. Доказано, что оба этих тензорных произведения коммутируют с декартовым произведением (предложение 1.3.17).

Раздел 1.4 содержит общие сведения о квантовых полинормированных алгебрах и их дифференцированиях со значениями в квантовых полинормированных бимодулях. Здесь выделяется класс квантовых полинормированных алгебр, наиболее простых с точки зрения гомологической теории, — т. н. “стягиваемых” алгебр. Кроме того, в этом разделе определяются “квантовые банаховы алгебры”, а также “квантовые алгебры Аренса–Майкла”, которые в некотором смысле наиболее близки к квантовым банаховым алгебрам.

Пусть A — полное квантовое полинормированное пространство, являющееся одновременно алгеброй с умножением, заданным билинейным оператором $m\colon A \times A \to A$. Будем называть A *полинормированной* $\overset{h}{\otimes}$*-алгеброй*, если оператор m сильно вполне непрерывен, и *полинормирован-*

ной $\overset{o}{\otimes}$-алгеброй, если он слабо вполне непрерывен. Очевидно, что в этих случаях соответственно возникают вполне непрерывные операторы

$$\pi_A = \pi_A^h \colon A \overset{h}{\otimes} A \to A, \ a \otimes b \to ab, \quad \text{и} \quad \pi_A = \pi_A^o \colon A \overset{o}{\otimes} A \to A, \ a \otimes b \to ab.$$

В дальнейшем мы будем использовать символ $\widetilde{\otimes}$ вместо символов $\overset{h}{\otimes}$ и $\overset{o}{\otimes}$, когда изложение будет одинаково для $\overset{h}{\otimes}$ и $\overset{o}{\otimes}$-алгебр. В этих случаях выражение “$\widetilde{\otimes}$-непрерывный оператор” будет означать соответственно сильно и слабо вполне непрерывный оператор. Под *полным изоморфизмом* между двумя полинормированными $\widetilde{\otimes}$-алгебрами A и B мы будем понимать вполне непрерывный алгебраический изоморфизм из A на B с вполне непрерывным обратным.

Пусть A — полинормированная $\widetilde{\otimes}$-алгебра. *Левым $\widetilde{\otimes}$-модулем над A* (сокращённо *левым A-$\widetilde{\otimes}$-модулем*) называется полное квантовое полинормированное пространство X, наделенное структурой левого A-модуля так, что билинейный оператор внешнего умножения

$$\dot{m} \colon A \times X \to X \qquad \big((a, x) \mapsto a \cdot x\big)$$

$\widetilde{\otimes}$-непрерывен.

Для двух таких модулей X и Y, *морфизм* левых A-$\widetilde{\otimes}$-модулей из X в Y есть вполне непрерывный линейный оператор $\varphi \colon X \to Y$, такой что $\varphi(a \cdot x) = a \cdot \varphi(x)$ для всех $a \in A$, $x \in X$. *Правые A-$\widetilde{\otimes}$-модули*, *A-$\widetilde{\otimes}$-бимодули*, а также их морфизмы определяются аналогично.

Напомним теперь, что линейный оператор $\delta \colon A \to X$, где A — алгебра, а X — A-бимодуль, называется *дифференцированием A со значениями в X*, если он удовлетворяет тождеству

$$\delta(ab) = a \cdot \delta(b) + \delta(a) \cdot b \qquad (a, b \in A).$$

Дифференцирование называется *внутренним*, если существует $x \in X$, такой что для любого $a \in A$ справедливо равенство $\delta(a) = a \cdot x - x \cdot a$.

Полинормированная $\widetilde{\otimes}$-алгебра называется *стягиваемой*, если каждое вполне непрерывное дифференцирование A со значениями в любом A-$\widetilde{\otimes}$-бимодуле является внутренним.

Пусть

$$\mathcal{H}^1_{\widetilde{\otimes}}(A, X) = \mathcal{D}er(A, X) / \mathcal{D}er_I(A, X),$$

где $\mathcal{D}er(A, X)$ — пространство всех вполне непрерывных дифференцирований A со значениями в X, а $\mathcal{D}er_I(A, X)$ — подпространство всех внутренних дифференцирований A со значениями в X. Линейное пространство $\mathcal{H}^1_{\widetilde{\otimes}}(A, X)$ называется *одномерной группой когомологий полинормированной $\widetilde{\otimes}$-алгебры A с коэффициентами в X*.

Таким образом, полинормированная $\widetilde{\otimes}$-алгебра A стягиваема тогда и только тогда, когда $\mathcal{H}^1_{\widetilde{\otimes}}(A, X) = 0$ для каждого A-$\widetilde{\otimes}$-бимодуля X.

Пусть теперь A — алгебра, снабжённая квантовой преднормой $\|\cdot\|$, и пусть $m\colon A \times A \to A$ — билинейный оператор умножения в A. Эта преднорма называется *сильно вполне мультипликативной*, если для всех $u, v \in \mathcal{F}A$ выполнено

$$\|\mathcal{M}_s(u, v)\| \leqslant \|u\|\|v\|,$$

где $\mathcal{M}_s\colon \mathcal{F}A \times \mathcal{F}A \to \mathcal{F}A$ — сильное размножение m, и *слабо вполне мультипликативной*, если для всех $u, v \in \mathcal{F}A$ выполнено

$$\|\mathcal{M}_w(u, v)\| \leqslant \|u\|\|v\|,$$

где $\mathcal{M}_w\colon \mathcal{F}A \times \mathcal{F}A \to \mathcal{F}A$ — слабое размножение m.

Квантовое полинормированное пространство, снабжённое умножением, называется $\overset{h}{\otimes}$- ($\overset{o}{\otimes}$-)*алгеброй Аренса–Майкла*, если оно обладает определяющей системой квантовых сильно (слабо) вполне мультипликативных преднорм и, сверх того, хаусдорфово и полно.

Несложно показать, что декартово произведение произвольного семейства $\overset{h}{\otimes}$- ($\overset{o}{\otimes}$-)алгебр Аренса–Майкла также является $\overset{h}{\otimes}$- ($\overset{o}{\otimes}$-)алгеброй Аренса–Майкла относительно покоординатного умножения.

В тех случаях, когда мы будем использовать символ $\widetilde{\otimes}$ вместо $\overset{h}{\otimes}$ и $\overset{o}{\otimes}$, выражение “$\widetilde{\otimes}$-мультипликативная преднорма” будет означать соответственно сильно и слабо вполне мультипликативную преднорму. Если структура квантового полинормированного пространства в $\widetilde{\otimes}$-алгебре Аренса–Майкла A определяется единственной $\widetilde{\otimes}$-мультипликативной нормой, то A будет называться *банаховой* $\widetilde{\otimes}$-*алгеброй*.

Вторая глава диссертации посвящена квантовым банаховым алгебрам. Напомним, что топология в квантовом банаховом пространстве задаётся одной нормой (а не семейством преднорм). В этом случае вполне непрерывные операторы называются также вполне ограниченными операторами. Так же, как и в общем (полинормированном) случае, существование двух типов вполне ограниченных билинейных операторов влечёт существование двух типов квантовых банаховых алгебр и двух типов категорий квантовых банаховых левых (правых, би-) модулей.

В разделе 2.1 приводятся квантовые аналоги важнейших понятий топологической гомологии: проективного модуля, проективной резольвенты, групп расширений и групп когомологий, гомологической размерности модуля, левой и правой глобальной размерности и биразмерности алгебры.

Напомним, что квантовое банахово пространство A, снабжённое умножением, называется *банаховой* $\overset{h}{\otimes}$- ($\overset{o}{\otimes}$-)*алгеброй*, если квантовая норма пространства A является сильно (слабо) вполне мультипликативной.

В тех случаях, когда мы будем использовать символ $\widetilde{\otimes}$ вместо $\overset{h}{\otimes}$ и $\overset{o}{\otimes}$, выражение "$\widetilde{\otimes}$-ограниченный оператор" будет означать соответственно сильно вполне ограниченный и слабо вполне ограниченный оператор.

Если A — фиксированная банахова $\widetilde{\otimes}$-алгебра, то через A_+ обозначается её *унитализация. Левым банаховым* $\widetilde{\otimes}$*-модулем над* A (сокращённо *левым банаховым* A-$\widetilde{\otimes}$*-модулем*) называется квантовое банахово пространство X, снабжённое структурой левого A-модуля так, что билинейный оператор внешнего умножения

$$\dot{m}\colon A \times X \to X \qquad \big((a, x) \mapsto a \cdot x\big)$$

$\widetilde{\otimes}$-ограничен.

Морфизмы в категории левых банаховых A-$\widetilde{\otimes}$-модулей (обозначаемой A-$\widetilde{\otimes}$-**mod**) — это вполне ограниченные операторы, являющиеся в то же время морфизмами модулей в алгебраическом смысле.

Морфизм левых банаховых A-$\widetilde{\otimes}$-модулей, обладающий правым обратным вполне ограниченным оператором, будем называть *допустимым эпиморфизмом.*

Модуль P из A-$\widetilde{\otimes}$-**mod** называется *проективным*, если для любых левых банаховых A-$\widetilde{\otimes}$-модулей X и Y, морфизма (левых банаховых A-$\widetilde{\otimes}$-модулей) $\varphi\colon P \to X$ и допустимого эпиморфизма $\sigma\colon Y \to X$ существует морфизм $\psi\colon P \to Y$ такой, что диаграмма

$$\begin{tikzcd} & Y \arrow[d, "\sigma"] \\ P \arrow[ur, "\psi"] \arrow[r, "\varphi"'] & X \end{tikzcd}$$

коммутативна.

Категории *правых банаховых* A-$\widetilde{\otimes}$*-модулей* и *банаховых* A-$\widetilde{\otimes}$*-бимодулей* (обозначаемые соответственно $\widetilde{\otimes}$-**mod**-A и A-$\widetilde{\otimes}$-**mod**-A) и проективные объекты в этих категориях определяются аналогично.

Напомним, что последовательность объектов и морфизмов в A-$\widetilde{\otimes}$-**mod**

$$\mathcal{X}\colon\ 0 \xleftarrow{d_{-1}} X_0 \xleftarrow{d_0} X_1 \xleftarrow{d_1} X_2 \xleftarrow{d_2} \ldots$$

называется (положительным цепным) *комплексом*, если композиция любых двух соседних морфизмов равна нулю. Комплекс называется *точным*, если $\operatorname{Ker} d_{n-1} = \operatorname{Im} d_n$ для всех n.

Комплекс левых банаховых A-$\widetilde{\otimes}$-модулей называется *допустимым*, если он расщепим в категории квантовых банаховых пространств. В частности, допустимый комплекс является точным.

Пусть X — левый банахов A-$\widetilde{\otimes}$-модуль. Комплекс $\mathcal{X}$ левых банаховых A-$\widetilde{\otimes}$-модулей вместе с некоторым морфизмом $\varepsilon\colon X_0 \to X$ называется *резольвентой* модуля X, если комплекс

$$0 \leftarrow X \xleftarrow{\varepsilon} X_0 \xleftarrow{d_0} X_1 \leftarrow \dots$$

допустим. Резольвента $(\mathcal{X}, \varepsilon)$ называется *проективной*, если все модули в $\mathcal{X}$ проективны. *Длиной* резольвенты $(\mathcal{X}, \varepsilon)$ называется наименьшее n такое, что $X_k = 0$ при $k > n$, или же ∞, если такого n нет.

Пусть

$$0 \leftarrow X \xleftarrow{\varepsilon} X_0 \xleftarrow{d_0} X_1 \xleftarrow{d_1} X_2 \xleftarrow{d_2} \dots$$

— проективная резольвента левого банахова A-$\widetilde{\otimes}$-модуля X. Для каждого левого банахова A-$\widetilde{\otimes}$-модуля Y *группа расширений* ${}_A\mathrm{Ext}^n_{\widetilde{\otimes}}(X, Y)$ определяется как n-я группа когомологий (в действительности это линейное пространство) комплекса

$$0 \to {}_A\mathrm{Hom}(X_0, Y) \xrightarrow{d_0^*} {}_A\mathrm{Hom}(X_1, Y) \xrightarrow{d_1^*} {}_A\mathrm{Hom}(X_2, Y) \xrightarrow{d_2^*} \dots,$$

где $d_n^*(\varphi)(x) = \varphi(d_n(x))$ $(x \in P_{n+1})$ для $\varphi \in {}_A\mathrm{Hom}(P_n, Y)$.

Хорошо известно, что группы ${}_A\mathrm{Ext}^n_{\widetilde{\otimes}}(X, Y)$ зависят только от модулей X и Y и не зависят от выбора проективной резольвенты, используемой в определении.

Гомологической размерностью левого банахова A-$\widetilde{\otimes}$-модуля X называется длина его самой короткой проективной резольвенты. Эта величина обозначается ${}_A\mathrm{dh}\, X$; она равна нулю, если X проективен.

Левой глобальной размерностью банаховой $\widetilde{\otimes}$-алгебры A (обозначение ${}_{\widetilde{\otimes}}\,\mathrm{dg}\, A$) называется верхняя грань величин ${}_A\mathrm{dh}\, X$, взятая по всем левым банаховым A-$\widetilde{\otimes}$-модулям X.

Аналогично определяются группы расширений для правых и двусторонних банаховых A-$\widetilde{\otimes}$-модулей X и Y (они обозначаются соответственно ${}_{\widetilde{\otimes}}\mathrm{Ext}^n_A(X, Y)$ и ${}_{A\text{-}\widetilde{\otimes}}\mathrm{Ext}^n_A(X, Y)$), *гомологическая размерность правого банахова A-$\widetilde{\otimes}$-модуля* X (обозначение $\mathrm{dh}_A X$), *гомологическая размерность банахова A-$\widetilde{\otimes}$-бимодуля* X (обозначение ${}_A\mathrm{dh}_A X$), а также *правая глобальная размерность* банаховой $\widetilde{\otimes}$-алгебры A (обозначение $\mathrm{dg}_{\widetilde{\otimes}}\, A$).

Биразмерностью банаховой $\widetilde{\otimes}$-алгебры A (обозначение $\mathrm{db}\, A$) называется гомологическая размерность A_+ как банахова A-$\widetilde{\otimes}$-бимодуля, т. е. ${}_A\mathrm{dh}_A A_+$. Левая и правая глобальные размерности банаховой $\widetilde{\otimes}$-алгебры A связаны с её биразмерностью неравенствами

$${}_{\widetilde{\otimes}}\,\mathrm{dg}\, A \leqslant \mathrm{db}\, A \quad \text{и} \quad \mathrm{dg}_{\widetilde{\otimes}}\, A \leqslant \mathrm{db}\, A.$$

Пусть теперь X — банахов A-$\widetilde{\otimes}$-бимодуль, и пусть

$$\mathcal{H}^n_{\widetilde{\otimes}}(A, X) = {}_{A\text{-}\widetilde{\otimes}}\mathrm{Ext}^n_A(A_+, X).$$

Линейное пространство $\mathcal{H}^n_{\widetilde{\otimes}}(A, X)$ называется *n-мерной группой когомологий банаховой $\widetilde{\otimes}$-алгебры A с коэффициентами в X*. Заметим, что при вычислении групп когомологий банаховой $\widetilde{\otimes}$-алгебры A можно воспользоваться любой проективной резольвентой банахова A-$\widetilde{\otimes}$-бимодуля A_+, а биразмерность этой алгебры можно переопределить в терминах групп когомологий следующим образом:

$$\mathrm{db}\, A = \min\left\{n : \mathcal{H}^{n+1}_{\widetilde{\otimes}}(A, X) = 0 \text{ для всех } X \in A\text{-}\widetilde{\otimes}\text{-}\mathbf{mod}\text{-}A\right\}.$$

Раздел 2.2 посвящен изучению проективных идеалов в квантовых коммутативных банаховых алгебрах. Помимо того, что это изучение важно для получения главного результата второй главы (теоремы 2.3.1), оно представляет и самостоятельный интерес. В частности, здесь получен критерий проективности замкнутого идеала в банаховой алгебре $C(\Omega)$ непрерывных функций на компакте, рассмотренной с минимальным квантованием:

Теорема 2.2.5. *Замкнутый идеал в коммутативной унитальной банаховой $\overset{h}{\otimes}$ ($\overset{o}{\otimes}$)-алгебре $C(\Omega)$ является проективным банаховым $C(\Omega)$-$\overset{h}{\otimes}$-модулем ($C(\Omega)$-$\overset{o}{\otimes}$-модулем) тогда и только тогда, когда его спектр паракомпактен.*

Важное место во второй главе занимает раздел 2.3. Здесь мы доказываем теорему, представляющую собой аналог теоремы А. Я. Хелемского о глобальной размерности коммутативной банаховой алгебры с бесконечным спектром:

Теорема 2.3.1. *Пусть A — коммутативная банахова $\widetilde{\otimes}$-алгебра с бесконечным спектром. Тогда* $\max\{{}_{\widetilde{\otimes}}\mathrm{dg}\, A, \mathrm{dg}_{\widetilde{\otimes}}\, A\} \geqslant 2$.

Напомним, что символ $\widetilde{\otimes}$ заменяет у нас один из символов $\overset{h}{\otimes}$ или $\overset{o}{\otimes}$, и заметим, что на случай коммутативных банаховых $\overset{o}{\otimes}$-алгебр с бесконечным спектром “классическая” теорема о глобальной размерности[22] (т. е. оценка $\mathrm{dg}\, A \geqslant 2$) переносится полностью, поскольку для них правые банаховы A-$\overset{o}{\otimes}$-модули сводятся к левым над противоположной алгеброй $A^{\mathrm{op}} = A$, и в этом случае

$${}_{\overset{o}{\otimes}}\mathrm{dg}\, A = \mathrm{dg}_{\overset{o}{\otimes}}\, A = \max\{{}_{\overset{o}{\otimes}}\mathrm{dg}\, A, \mathrm{dg}_{\overset{o}{\otimes}}\, A\}.$$

В то же время, вследствие некоммутативности хаагерупова тензорного произведения, правая глобальная размерность коммутативной банаховой $\overset{h}{\otimes}$-алгебры может не совпадать с левой.

Из теоремы 2.3.1 и приведённых выше соотношений между биразмерностью алгебры и её левой и правой глобальными размерностями мы получаем следствие:

Теорема 2.3.2. *Пусть A — коммутативная банахова $\widetilde{\otimes}$-алгебра с бесконечным спектром. Тогда* $\operatorname{db} A \geqslant 2$*, т. е. существует банахов A-$\widetilde{\otimes}$-бимодуль X такой, что $\mathcal{H}^2_{\widetilde{\otimes}}(A, X) \neq 0$.*

Доказательство теоремы 2.3.1, во многом повторяющее рассуждения классической теоремы и опирающееся на технику проективных резольвент, тем не менее потребовало учёта специфики квантового функционального анализа, в частности более сильного требования ограниченности операторов и связанных с этим сложностей.

Третья глава диссертации посвящена когомологически тривиальным квантовым полинормированным алгебрам. Здесь мы всюду рассматриваем полинормированные $\overset{h}{\otimes}$-алгебры. Напомним, что такая алгебра A называется *стягиваемой*, если все её вполне непрерывные дифференцирования со значениями в любом A-$\overset{h}{\otimes}$-бимодуле являются внутренними или, эквивалентно, если $\mathcal{H}^1_{\overset{h}{\otimes}}(A, X) = 0$ для каждого A-$\overset{h}{\otimes}$-бимодуля X.

Основной результат третьей главы, установленный в разделе 3.2.2, — описание стягиваемых, то есть наиболее простых с точки зрения гомологии, $\overset{h}{\otimes}$-алгебр Аренса–Майкла:

Теорема 3.2.4. *$\overset{h}{\otimes}$-алгебра Аренса–Майкла A стягиваема тогда и только тогда, когда она вполне изоморфна декартову произведению некоторого семейства полных матричных C^*-алгебр.*

В доказательстве теоремы 3.2.4 мы сначала используем следующий технический результат из раздела 3.2.1.

Напомним, что *диагональю*[34] для полинормированной $\overset{h}{\otimes}$-алгебры A называется такой элемент $d \in A \overset{h}{\otimes} A$, что $a \cdot d = d \cdot a$ для всех $a \in A$ и $\pi_A(d)$ — единица в A.

Предложение 3.2.1. *Полинормированная $\overset{h}{\otimes}$-алгебра A стягиваема тогда и только тогда, когда она унитальна и имеет диагональ.*

---

[34] Хелемский А. Я. *Банаховы и полинормированные алгебры: общая теория, представления, гомологии.* М., Наука, 1989.

Затем мы применяем к $\overset{h}{\otimes}$-алгебре Аренса–Майкла A описание (полученное ранее в разделе 3.1) её строения как обратного предела банаховых $\overset{h}{\otimes}$-алгебр. Каждая из этих банаховых $\overset{h}{\otimes}$-алгебр оказывается унитальной и имеющей диагональ.

Согласно теореме Блечера[35], всякая банахова $\overset{h}{\otimes}$-алгебра вполне изоморфна замкнутой подалгебре в алгебре $\mathcal{B}(H)$ ограниченных операторов в некотором гильбертовом пространстве H. Если же такая алгебра унитальна и имеет диагональ, то она, согласно теореме Полсена и Смита[33], вполне изоморфна декартову произведению конечного числа полных матричных C^*-алгебр.

Эти соображения и позволяют завершить доказательство нашей теоремы.

Наконец, в разделе 3.2.3 мы определяем понятие оболочки Аренса–Майкла полинормированной $\overset{h}{\otimes}$-алгебры, решаем вопрос о её существовании и единственности и доказываем (теорема 3.2.6), что если полинормированная $\overset{h}{\otimes}$-алгебра (не обязательно являющаяся $\overset{h}{\otimes}$-алгеброй Аренса–Майкла) стягиваема, то её оболочка Аренса–Майкла вполне изоморфна декартову произведению некоторого семейства полных матричных C^*-алгебр.

Автор выражает глубокую благодарность своим научным руководителям профессору Юрию Васильевичу Селиванову и профессору Александру Яковлевичу Хелемскому за постановку задач и полезные обсуждения.

Работы автора по теме диссертации

1. Волосова Н. В. Описание проективных идеалов в квантованных алгебрах непрерывных функций на компактах. *Вестн. Моск. ун-та. Сер. матем., механ.* **5** (2005), 20–24.

2. Волосова Н. В. Теорема о глобальной размерности для квантованных банаховых алгебр. *Труды Моск. матем. об-ва* **70** (2009), 288–328.

3. Volosova N. V. Contractible quantum Arens-Michael algebras. *Banach Center Publ.* **91** (2010), 423-440.

---

[35] Blecher D. P. A completely bounded characterization of operator algebras. *Math. Ann.* 303 (1995), 227–239.