МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ М. В. ЛОМОНОСОВА

На правах рукописи
УДК 519.7

Михайлец Екатерина Викторовна

ОБ ОДНОЙ МЕРЕ СЛОЖНОСТИ НЕЯВНЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ ФУНКЦИЙ МНОГОЗНАЧНОЙ ЛОГИКИ

01.01.09 — дискретная математика и математическая кибернетика

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва — 2012

Работа выполнена на кафедре дискретной математики механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова.

Научный руководитель:	Касим-Заде Октай Мурадович, доктор физико-математических наук, профессор.
Официальные оппоненты:	Глухов Михаил Михайлович, доктор физико-математических наук, профессор, ак.-секретарь отделения Академии криптографии РФ; Сапоженко Александр Антонович, доктор физико-математических наук, профессор кафедры математической кибернетики факультета вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова.
Ведущая организация:	Институт математики имени С. Л. Соболева СО РАН.

Защита диссертации состоится 23 марта 2012 г. в 16 ч. 45 мин. на заседании диссертационного совета Д.501.001.84 при Московском государственном университете имени М. В. Ломоносова по адресу: Российская Федерация, 119991, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д. 1, МГУ, механико-математический факультет, аудитория 14-08.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке механико-математического факультета МГУ (Главное здание, 14 этаж).

Автореферат разослан 22 февраля 2012 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
Д.501.001.84 при МГУ
доктор физико-математических наук,
профессор А. О. Иванов

Общая характеристика работы

Актуальность темы

Вопрос о сложности реализации функций k-значной логики посредством различных видов схем является одним из центральных вопросов в теории управляющих систем. Одни из первых значительных результатов в этой области принадлежат К. Э. Шеннону[1]. Им был предложен новый подход к изучению проблем сложности, основанный на рассмотрении функционалов, характеризующих наибольшую сложность функций из класса K при реализации схемами из класса U управляющих систем. К. Э. Шеннон ввел величину $L_U(K)$, характеризующую сложность реализации любой функции из класса K в классе управляющих систем U, названную функцией Шеннона.

В случае двузначной логики основополагающие результаты о поведении функции Шеннона для многих классов управляющих систем принадлежат О. Б. Лупанову. В частности, О. Б. Лупанов предложил[2] асимптотически наилучшие методы синтеза формул и схем из функциональных элементов и получил асимптотически точные выражения для функций Шеннона при реализации булевых функций формулами и схемами в произвольном конечном полном базисе. Впоследствии асимптотические оценки сложности для различных классов управляющих систем были получены в многочисленных работах учеников и последователей О. Б. Лупанова и других ученых[3]. Ряд работ[4] посвящен сложности функций

---

[1] *Shannon C. E.* The synthesis of two-terminal switching circuits // Bell Syst. Techn. Journ., 1949. V. 28. №1. P. 59–98 (русский перевод: *Шеннон К.* Работы по теории информации и кибернетике. М.: ИЛ, 1963.).

[2] *Лупанов О. Б.* Об одном методе синтеза схем // Известия вузов, Радиофизика I. 1958. С. 120–140.

Лупанов О. Б. О сложности реализации функций алгебры логики формулами // Проблемы кибернетики. 1960. Вып. 3. С. 61–80.

[3] *Андреев А. Е.* О синтезе схем из функциональных элементов в полных монотонных базисах // Математические вопросы кибернетики, 1988. №1. С. 114–139.

Ложкин С. А. Оценки высокой степени точности для сложности управляющих систем из некоторых классов // Математические вопросы кибернетики. Вып. 6. М.: Наука, 1996. С. 190–214.

Нечипорук Э. И. О синтезе логических сетей в неполных и вырожденных базисах // Проблемы киберенетики. Вып. 14. М.: Наука, 1965. С. 111–160.

Угольников А. Б. О реализации функций из замкнутых классов схемами из функциональных элементов в полном базисе // Доклады АН СССР. 1983. Т. 271. №1. С. 49–51.

Угольников А. Б. Синтез схем и формул в неполных базисах. Препринт ИПМ АН СССР. М. 1980. №112.

Savage J. E. The complexity of computing. New York: Robert E. Kreiger Publishing Company, 1987 (русский перевод: *Джон Э. Сэвидж.* Сложность вычислений. М.: Факториал, 1998).

[4] *Орлов В. А.* Реализация функций из P_k схемами в произвольном базисе из функциональных элементов // Докл. РАН. 1998. Т. 359, №3. С. 308–309.

k-значной логики при реализации формулами и схемами из функциональных элементов.

В настоящей диссертации исследуется сложность реализации функций k-значной логики посредством неявных представлений над различными системами функций в P_k. В качестве меры сложности неявного представления рассматривается число уравнений в этом представлении.

По-видимому, впервые понятие неявной выразимости было введено А. В. Кузнецовым[5], наряду с понятием параметрической выразимости, как одно из обобщений понятия выразимости функций формулами (суперпозициями).

Неявным представлением функции $f(x_1,\dots,x_n)$ над заданной системой функций A, $A \subseteq P_k$, называется всякая система уравнений вида

$$\begin{cases} \varphi_1(x_1,\dots,x_n,y) = \psi_1(x_1,\dots,x_n,y), \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \dots \\ \varphi_m(x_1,\dots,x_n,y) = \psi_m(x_1,\dots,x_n,y), \end{cases}$$

удовлетворяющая условиям[6]: $\varphi_1,\dots,\varphi_m,\psi_1,\dots,\psi_m \in [A \cup \{x\}]$ и имеющая единственное решение $y = f(x_1,\dots,x_n)$.

Множество всех функций, допускающих неявное представление над системой функций A, называется *неявным расширением* системы A и обозначается через $I(A)$. В силу соотношения $I(A) = I([A])$, справедливого для любой системы A, $A \subseteq P_k$, при исследовании неявной выразимости можно без ограничения общности рассматривать только замкнутые по суперпозиции классы функций k-значной логики.

Тот факт, что понятие неявной выразимости является обобщением понятия выразимости функций суперпозициями, следует из легко проверяемого соотношения $[A] \subseteq I(A)$. В свою очередь, параметрическая выразимость[7] представляет собой обобщение понятия неявной выразимости.

Ткачев Г. А. О сложности реализации одной последовательности функций k-значной логики // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 15. Вычисл. матем. и кибернетика. 1977. №1. С. 45–57.

Захарова Е. Ю. Реализация функций из P_k формулами // Матем. заметки. 1972. Т. 11, №1. С. 99–108.

Угольников А. Б. О сложности реализации формулами одной последовательности функций многозначной логики // Математические вопросы кибернетики. М.: Наука, 1989. №2. С. 174–176.

[5] *Кузнецов А. В.* О средствах для обнаружения невыводимости или невыразимости // Логический вывод. М.: Наука, 1979. С. 5–33.

[6] Через $[A]$ обозначается замыкание по суперпозиции системы функций A.

[7] О параметрической выразимости функций см.: *Кузнецов А. В.* О средствах для обнаружения невыводимости или невыразимости // Логический вывод. М.: Наука, 1979. С. 5–33.

Система функций называется *неявно полной* в P_k, если ее неявное расширение совпадает с P_k.

Проблема неявной полноты в P_k полностью решена при $k = 2$ и $k = 3$. Проблему неявной выразимости для случая двузначной логики решил О. М. Касим-Заде. Из его работы[8], в частности, следует, что в P_2 существует ровно один минимальный по включению неявно полный замкнутый по суперпозиции класс — класс всех монотонных булевых функций. Соответственно, критерий неявной полноты в P_2 можно сформулировать следующим образом: система булевых функций неявно полна тогда и только тогда, когда ее замыкание по суперпозиции содержит класс всех монотонных функций.

В трехзначной логике проблема неявной полноты в терминах минимальных неявно полных классов была решена Е. А. Ореховой. В ее работе[9] была найдена система всех минимальных по включению неявно полных замкнутых по суперпозиции классов в P_3, состоящая из 27 различных классов функций.

Позднее О. М. Касим-Заде установил[10] критерий неявной полноты в P_k и доказал конечность системы всех минимальных неявно полных замкнутых по суперпозиции классов в P_k для любых значений k, $k \geq 2$.

После решения проблемы неявной выразимости в P_2 естественным образом возник вопрос о сложности неявных представлений. Одной из наиболее естественных и интересных с различных точек зрения мер сложности для неявных представлений является число входящих в них уравнений, именуемое рангом представления. Понятие ранга впервые было введено О. М. Касим-Заде в применении к булевым функциям.

Пусть f — произвольная функция из неявного расширения заданной системы функций A в P_k, $f \in I(A)$. *Рангом $m_A(f)$ функции f над системой A* называется наименьшее число уравнений, достаточное для построения неявного представления функции f над системой A. Далее традиционным образом вводится функция Шеннона, характеризующая сложность реализации самых сложных функций от n переменных из множества $I(A)$. *Ранговой функцией $m_A(n)$ системы A* называется наибольшее значение ранга функций f, принадлежащих неявному расшире-

[8] *Касим-Заде О. М.* О неявной выразимости булевых функций // Вестник Моск. ун-та. Серия 1. Математика. Механика. 1995. № 2. С. 44–49.

[9] *Орехова Е. А.* Об одном критерии неявной полноты в трехзначной логике // Математические вопросы кибернетики. Вып. 12. М.: Физматлит, 2003. С. 27–74.

[10] *Касим-Заде О. М.* О неявной полноте в k-значной логике // Вестник Моск. ун-та. Серия 1. Математика. Механика. 2007. № 3. С. 9–13.

нию системы A и существенно зависящих не более, чем от n переменных $x_1, \ldots, x_n$.

Отметим, что для любой системы A, $A \subseteq P_k$, выполняется равенство $m_A(n) = m_{[A]}(n)$. Следовательно, при поиске ранговых функций без ограничения общности можно предполагать, что рассматриваемые системы функций k-значной логики замкнуты по суперпозиции.

О. М. Касим-Заде[11] исследовал поведение ранговых функций для всех замкнутых по суперпозиции классов функций двузначной логики. Для ряда классов булевых функций он получил точные выражения ранговых функций, для остальных классов — с точностью до порядка роста относительно n, где n — число переменных, фигурирующее в определении ранговой функции. При этом во всех случаях порядок роста ранговой функции для систем функций в P_2 оказался либо линейным по n, либо близким к линейному. Для классов[12] D_2 и F_i^{μ}, где $i = 2, 3, 6, 7$ и $\mu \geq 2$, ранговая функция равна по порядку величине $n \log n$, для остальных классов ранговая функция либо линейна, либо равна 1.

Поведение ранговых функций для систем функций k-значной логики при $k \geq 3$, по-видимому, до сих пор не было изучено.

Цель работы

Целью настоящей работы является изучение поведения ранговых функций на множестве неявно полных классов функций трехзначной логики, а также нахождение ранговых функций для классов функций k-значной логики, монотонных относительно заданных частичных порядков на множестве E_k.

Основные методы исследования

В диссертации используются методы дискретной математики и математической кибернетики, в частности, методы теории синтеза и сложности управляющих систем и теории функциональных систем.

---

[11] *Касим-Заде О. М.* Об одной метрической характеристике неявных и параметрических представлений булевых функций // Математические вопросы кибернетики. Вып. 6. М.: Наука. Физматлит, 1996. С. 133–188.

[12] Обозначения классов даны по книге: *Яблонский С. В., Гаврилов Г. П., Кудрявцев В. Б.* Функции алгебры логики и классы Поста. М.: Наука, 1966.

Научная новизна

Все результаты работы являются новыми. В диссертации получены следующие основные результаты.

1. Построены примеры неявно полных классов функций трехзначной логики, ранговые функции которых имеют экспоненциальный порядок роста от числа переменных (следует отметить, что такой эффект обнаружен впервые). Для этих классов получены верхние и нижние экспоненциальные оценки ранговых функций.

2. Для всех минимальных неявно полных замкнутых по суперпозиции классов функций трехзначной логики исследовано поведение ранговых функций. Для всякого такого класса либо найдено точное выражение ранговой функции, либо получены ее верхние и нижние оценки с точностью до порядка роста относительно числа переменных.

3. Доказано, что для ряда минимальных неявно полных замкнутых классов в P_3 ранговые функции имеют линейный порядок роста, для остальных минимальных неявно полных замкнутых классов порядок роста ранговых функций является экспоненциальным.

4. Доказана неявная полнота всякого класса функций k-значной логики, монотонных относительно заданной согласованной пары невырожденных частичных порядков на множестве E_k. Для каждого такого класса найдено точное выражение ранговой функции, линейно зависящее от числа переменных.

Теоретическая и практическая ценность

Диссертация носит теоретический характер. Результаты диссертации могут найти применение в исследованиях в теории синтеза и сложности управляющих систем, а также в теории функциональных систем.

Апробация результатов

Результаты диссертации докладывались на семинаре «Синтез и сложность управляющих систем» под руководством профессора О. М. Касим-Заде (2011 г.), на семинаре «Математические вопросы кибернетики» под руководством профессора О. М. Касим-Заде (2006–2011 г.), на XVI Международной школе-семинаре «Синтез и сложность управляющих систем» (Санкт-Петербург, 26–30 июня 2006 г.), на VI молодежной научной школе по дискретной математике и ее приложениям (Москва, 2007 г.), на IX Международном семинаре «Дискретная математика и ее приложения» (Москва, 18–23 июня 2007 г.), на VII молодежной научной школе по дискретной математике и ее приложениям (Москва, 18–22 мая 2009 г.), на X Международном семинаре «Дискретная математика и ее приложения» (Москва, 1–6 февраля 2010 г.), на Международной научной конференции «Ломоносов-2010» (Москва, 12–15 апреля 2010 г.), на VIII молодежной научной школе по дискретной математике и ее приложениям (Москва, 24–28 октября 2011 г.).

Публикации

Основные результаты диссертации опубликованы в 6 работах, список которых приведен в конце автореферата [1 – 6].

Структура и объем диссертации

Диссертация состоит из введения, трех глав и списка литературы. Полный объем диссертации — 112 страниц, список литературы содержит 60 наименований.

Содержание работы

Зададим на множестве $E_k = \{0, 1, \ldots, k-1\}$ отношение $\mathfrak{M}$ частичного порядка, $k \geq 2$. Максимальную длину цепи в частично упорядоченном множестве $\langle E_k; \mathfrak{M}\rangle$, будем обозначать через $s(E_k, \mathfrak{M})$.

Пусть помимо частичного порядка $\mathfrak{M}$ на множестве E_k задан еще один частичный порядок $\mathfrak{M}'$. Будем говорить, что порядок $\mathfrak{M}'$ *подчинен* порядку $\mathfrak{M}$ (обозначение $\mathfrak{M}' \subseteq \mathfrak{M}$), если для любых элементов a, b из E_k, связанных соотношением $a \leq_{\mathfrak{M}'} b$, выполняется соотношение $a \leq_{\mathfrak{M}} b$. При этом пару порядков $(\mathfrak{M}, \mathfrak{M}')$ будем называть *согласованной* в E_k. Всюду в дальнейшем, говоря о паре порядков $(\mathfrak{M}, \mathfrak{M}')$, будем подразумевать, что она является согласованной, т. е. $\mathfrak{M}' \subseteq \mathfrak{M}$.

Для любого n, $n \geq 1$, распространим отношение порядка $\mathfrak{M}$ на куб[13]

[13] *Кубом* E_k^n будем называть совокупность всех наборов длины n с компонентами из E_k.

E_k^n следующим образом: будем говорить, что выполняется неравенство $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \leq_{\mathfrak{M}} (\beta_1, \ldots, \beta_n)$, если при всех i, $i = 1, \ldots, n$, выполняются соотношения $\alpha_i \leq_{\mathfrak{M}} \beta_i$.

Пусть U^n — произвольное подмножество куба E_k^n. Пусть в кубе E_k^n задан частичный порядок $\mathfrak{M}$. Тогда можно говорить о частично упорядоченном множестве $\langle U^n; \mathfrak{M}\rangle$ и о соответствующей этому множеству максимальной длине цепи, которую будем обозначать через $s(U^n, \mathfrak{M})$.

Рассмотрим произвольную функцию $f(x_1, \ldots, x_n)$ из P_k. Пусть на области определения E_k^n функции f задан частичный порядок $\mathfrak{M}$, а на области значения E_k функции f — частичный порядок $\mathfrak{M}'$, подчиненный порядку $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M}' \subseteq \mathfrak{M}$. Функцию $f(\tilde{x})$ будем называть *монотонной относительно пары порядков* $(\mathfrak{M}, \mathfrak{M}')$, если для любых двух наборов $\tilde{\alpha}$ и $\tilde{\beta}$ из куба E_k^n, связанных соотношением $\tilde{\alpha} \leq_{\mathfrak{M}} \tilde{\beta}$, выполняется неравенство $f(\tilde{\alpha}) \leq_{\mathfrak{M}'} f(\tilde{\beta})$.

Будем говорить, что функция $f(x_1, \ldots, x_n)$, $f \in P_k$, *монотонна на множестве* U^n, $U^n \subseteq E_k^n$, *относительно пары порядков* $(\mathfrak{M}, \mathfrak{M}')$, если для любых двух наборов $\tilde{\alpha}$ и $\tilde{\beta}$ из U^n, таких что $\tilde{\alpha} \leq_{\mathfrak{M}} \tilde{\beta}$, выполняется соотношение $f(\tilde{\alpha}) \leq_{\mathfrak{M}'} f(\tilde{\beta})$.

Рассмотрим для некоторого натурального n непустое семейство M^n функций n переменных из P_k. Пусть функция $\mu(x_1, \ldots, x_n)$ принадлежит M^n. Будем говорить, что семейство функций M^n *обладает свойством*[14] $\Delta[U^n; \mathfrak{M}, \mathfrak{M}']$, если M^n есть совокупность всех функций от n переменных, монотонных на множестве наборов U^n относительно пары порядков $(\mathfrak{M}, \mathfrak{M}')$ и совпадающих с функцией μ на множестве $E_k^n \setminus U^n$.

В **главе 1** даны основные определения и обозначения, касающиеся неявных представлений, ранговых функций, а также вспомогательные утверждения. В частности, доказываются принципы двойственности для неявных представлений и неявных расширений в P_k и несколько лемм о свойствах рангов и ранговых функций.

В первой главе приводится также сравнение понятий выразимости функций суперпозициями, неявной и параметрической выразимости и их свойств, а также ряд известных результатов о функциональной и параметрической полноте в P_k при различных значениях k.

В **главе 2** для всякого невырожденного класса функций в P_k, монотонных относительно заданной согласованной пары порядков $(\mathfrak{M}, \mathfrak{M}')$

[14] Зависимость свойства $\Delta[U^n; \mathfrak{M}, \mathfrak{M}']$ от функции μ не отражена в обозначении, так как она не существенна для целей настоящей работы.

на множестве E_k, установлена неявная полнота и получено точное выражение ранговой функции.

Помимо этого, во второй главе приведены следствия из данного результата, устанавливающие точные выражения ранговых функций для отдельных частных случаев отношений порядков $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{M}'$. Также на основе этого результата доказана теорема о верхней оценке ранговой функции классов, содержащих для всякого натурального n и каждого множества наборов U_i^n из заданного разбиения[15] $\{U_i^n\}_{i=1}^{r(n)}$ куба E_k^n, систему функций M_i^n, обладающую свойством $\Delta[U_i^n; \mathfrak{M}, \mathfrak{M}']$, где $1 \le i \le r(n)$.

В разделе 2.1 формулируется и доказывается теорема о ранговой функции классов функций в P_k, монотонных относительно согласованной пары порядков, содержащих хотя бы одну общую пару сравнимых элементов. В этом разделе приводится также ряд сопутствующих данной теореме определений, связанных с понятиями частичного порядка и монотонности функций.

Теорема 1. *Пусть на множестве E_k, $k \ge 2$, заданы частичные порядки $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{M}'$, такие, что $\mathfrak{M}' \subseteq \mathfrak{M}$ и $s(E_k, \mathfrak{M}') \ge 1$. Пусть A — класс всех функций в P_k, монотонных относительно пары порядков $(\mathfrak{M}, \mathfrak{M}')$. Тогда система A неявно полна в P_k и при всех натуральных n ранговая функция системы A удовлетворяет равенству:*

$$m_A(n) = \left\lceil \frac{(n+1)s(E_k, \mathfrak{M}) + 1}{2s(E_k, \mathfrak{M}')} \right\rceil .$$

В разделе 2.2 приведены некоторые следствия из теоремы 1, а также утверждения, являющиеся в некотором смысле обобщениями этой теоремы.

В случае совпадения частичных порядков $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{M}'$ ранговая функция класса A функций, монотонных относительно пары порядков $(\mathfrak{M}, \mathfrak{M}')$, зависит только от числа n и устанавливается следующей теоремой.

Теорема 2. *Пусть на множестве E_k, $k \ge 2$, задан частичный порядок $\mathfrak{M}$, удовлетворяющий условию $s(E_k, \mathfrak{M}) \ge 1$. Пусть A — класс всех функций в P_k, монотонных относительно пары порядков $(\mathfrak{M}, \mathfrak{M})$. Тогда*

[15] Совокупность $\{U_i\}_{i=1}^r$ попарно непересекающихся подмножеств множества U называется *разбиением* множества U, если их объединение $\bigcup_{i=1}^r U_i$ совпадает с U.

система A неявно полна в P_k и при всех натуральных n для ранговой функции системы A выполняется равенство:

$$m_A(n) = \left\lceil \frac{n+2}{2} \right\rceil.$$

Для классов монотонных функций, выпускающих по крайней мере одно значение, ранговая функция устанавливается следующей теоремой.

Теорема 3. *Пусть на множестве E_k, $k \geq 2$, задан частичный порядок $\mathfrak{M}'$, подчиненный отношению линейного порядка*[16] *в E_k и удовлетворяющий условию $s(E_k, \mathfrak{M}') \geq 1$. Пусть A — класс всех функций в P_k, монотонных относительно порядка $\mathfrak{M}'$, за исключением, возможно, некоторых констант, отвечающих изолированным*[17] *точкам порядка $\mathfrak{M}'$. Тогда система A неявно полна в P_k и при всех натуральных n для ранговой функции системы A выполняется равенство:*

$$m_A(n) = \left\lceil \frac{(n+1)(k-1)+1}{2s(E_k, \mathfrak{M}')} \right\rceil.$$

Теоремы 2 и 3 являются прямыми следствиями из теоремы 1.

В разделе 2.2 также вводятся обобщения понятий ранга и ранговой функции, характеризующие число уравнений, достаточное для задания значений[18] функций n переменных на некотором подмножестве куба E_k^{n+1}.

Пусть $f(x_1, \ldots, x_n)$ — функция n переменных из неявного расширения произвольной системы функций A в P_k, $f \in I(A)$. *Рангом* $m_A(f, U^{n+1})$ функции f над системой A *относительно подмножества* U^{n+1} в кубе E_k^{n+1} будем называть наименьшее число уравнений, достаточное для задания значений функции f на множестве U^{n+1}. *Ранговой функцией* $m_A(n, U^{n+1})$ системы A *относительно множества* U^{n+1} будем называть

[16] *Линейным* на множестве E_k является порядок $0 < 1 < \cdots < k-1$.

[17] Значение i, $i \in E_k$, будем называть *изолированной точкой* частичного порядка $\mathfrak{M}$ на множестве E_k, если элемент i несравним ни с одним другим элементом в частично упорядоченном множестве $\langle E_k; \mathfrak{M} \rangle$.

[18] Подсистема системы неявных уравнений, реализующей функцию $f(x_1, \ldots, x_n)$, *задает значения* функции f на подмножестве U^{n+1} куба E_k^{n+1}, если для каждого набора $(\tilde{\alpha}, \beta)$ из U^{n+1}, такого, что $\beta \neq f(\tilde{\alpha})$, данная подсистема содержит уравнение, обращающееся в неравенство на этом наборе.

максимум рангов относительно множества U^{n+1} всех функций k-значной логики, принадлежащих неявному расширению системы A и существенно зависящих не более, чем от n переменных.

Далее на основе теоремы 1 доказываются следующие утверждения.

Теорема 4. *Пусть для произвольного натурального числа n в кубе E_k^{n+1} задано подмножество U_k^{n+1}. Пусть на множестве E_k, $k \geq 2$, заданы частичные порядки $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{M}'$, такие, что $\mathfrak{M}' \subseteq \mathfrak{M}$ и $s(E_k, \mathfrak{M}') \geq 1$. Пусть A — замкнутый по суперпозиции неявно полный класс функций в P_k, содержащий некоторое семейство M^{n+1} функций от $n+1$ переменной, обладающее свойством $\Delta[U^{n+1}; \mathfrak{M}, \mathfrak{M}']$. Тогда выполняется неравенство:*

$$m_A(n, U^{n+1}) \leq \left\lceil \frac{s(U^{n+1}, \mathfrak{M}) + 1}{2s(E_k, \mathfrak{M}')} \right\rceil .$$

Теорема 5. *Пусть для произвольного натурального числа n задано разбиение $\{U_i^{n+1}\}_{i=1}^{r(n)}$ куба E_k^{n+1}. Пусть на множестве E_k задан частичный порядок $\mathfrak{M}$ и частичные порядки $\mathfrak{M}_i$, $i = 1, \ldots, r(n)$, такие, что $\mathfrak{M}_i \subseteq \mathfrak{M}$, $s(E_k, \mathfrak{M}_i) \geq 1$ при любом i, $1 \leq i \leq r(n)$. Пусть A — замкнутый по суперпозиции неявно полный класс функций в P_k, содержащий для каждого i, $1 \leq i \leq r(n)$, некоторое семейство функций M_i^{n+1}, обладающее свойством $\Delta[U_i^{n+1}; \mathfrak{M}, \mathfrak{M}_i]$. Тогда выполняется неравенство:*

$$m_A(n) \leq \sum_{i=1}^{r(n)} \left\lceil \frac{s(U_i^{n+1}, \mathfrak{M}) + 1}{2s(E_k, \mathfrak{M}_i)} \right\rceil .$$

В **главе 3** рассматриваются шесть минимальных неявно полных замкнутых классов функций трехзначной логики W_1, W_2, W_3, W_4, W_5, W_6, и для каждого из них исследуется поведение ранговой функции. Для классов W_1, W_2, W_4 устанавливаются точные значения соответствующих им ранговых функций, для остальных классов находятся верхние и нижние оценки, которые дают представление о порядке роста ранговой функции относительно числа переменных. Ранговые функции классов W_5 и W_6 имеют экспоненциальный порядок роста, ранговые функции классов W_1, W_2, W_3, W_4 — линейный порядок роста.

В разделе 3.1 формулируется задача о нахождении ранговых функций для минимальных неявно полных классов функций в P_3, дается описание классов W_i, $i = 1, \ldots, 6$, и их свойств, приводятся вспомогательные определения и обозначения, используемые в дальнейших доказательствах.

В разделе 3.2 устанавливаются оценки для ранговых функций классов W_1, W_2, W_3, W_4, имеющих линейный порядок роста ранговой функции.

Теорема 6. *При всех натуральных значениях n для ранговых функций классов W_1 и W_2 выполняются равенства:*

$$m_{W_1}(n) = m_{W_2}(n) = n + 2.$$

При доказательстве теоремы 6 показывается, что классы W_1 и W_2 есть классы всех монотонных функций в P_3, выпускающих значения 2 и 1 соответственно, откуда следует, что классы W_1 и W_2 удовлетворяют условиям теоремы 3.

Теорема 7. *При всех натуральных n для ранговой фунции класса W_3 выполняются неравенства:*

$$\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 1 \leq m_{W_3}(n) \leq \left\lceil \frac{3n}{2} \right\rceil + 2.$$

При доказательстве верхней оценки ранговой функции класса W_3 используется теорема 5.

Нижняя оценка вытекает из теоремы 2, так как класс W_3 содержит только монотонные относительно линейного порядка функции трехзначной логики.

Теорема 8. *При всех натуральных n для ранговой фунции класса W_4 выполняется равенство:*

$$m_{W_4}(n) = n + 2.$$

Доказательство верхней оценки ранговой функции класса W_4 проводится с применением теоремы 4 и основывается на некоторых свойствах функций из данного класса.

Для получения нижней оценки рассматривается функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ специального вида, удовлетворяющая определенным условиям, и показывается, что любое неявное представление $S(f)$ функции f над классом W_4 состоит из не менее, чем $n+2$ уравнений.

В разделе 3.3 доказываются теоремы о ранговых функциях классов W_5 и W_6, имеющих экспоненциальный порядок роста ранговой функции.

Теорема 9. *При всех натуральных n для ранговой функции класса W_5 выполняются неравенства:*

$$2^{(n+1)/2} - 1/2 \leq m_{W_5}(n) \leq (n+2)2^n.$$

Нижняя оценка ранговой функции класса W_5 устанавливается следующим образом. Сначала доказывается, что все функции из класса W_5 обладают определенными свойствами. Затем строится функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ специального вида и задается некоторое подмножество наборов Q^n в кубе E_k^n. Далее показывается, что для любого неявного представления $S(f)$ функции f над W_5, в силу доказанных ранее свойств класса W_5, число наборов в Q^n не превосходит числа определенных комбинаций уравнений в системе $S(f)$. Из полученного неравенства извлекается нижняя оценка для числа уравнений в системе $S(f)$, а следовательно, и для ранговой функции класса W_5.

Обоснование верхней оценки опирается на теорему 5.

Теорема 10. *При любом натуральном n для ранговой функции класса W_6 выполняются неравенства:*

$$2^n \leq m_{W_6}(n) \leq (n+2)2^n.$$

Для получения нижней оценки ранговой функции класса W_6, как и в предыдущей теореме, строится функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ специального вида и задается некоторое подмножество наборов Q^n в кубе E_k^n. Затем на основе определенных свойств функций из класса W_6 показывается, что в любом неявном представлении функции f над W_6 число уравнений не меньше, чем число наборов в Q^n.

При доказательстве верхней оценки используется теорема 5.

Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю доктору физико-математических наук, профессору Октаю Мурадовичу Касим-Заде за постановку задачи, постоянное внимание к работе и неоценимую моральную поддержку.

Публикации автора по теме диссертации

1. *Михайлец Е. В.* О ранге неявных представлений функций k-значной логики над классом монотонных функций // Материалы XVI Международной школы-семинара «Синтез и сложность управляющих систем» (Санкт-Петербург, 26–30 июня 2006). М.: Изд-во мех.-мат. ф-та МГУ, 2006. С. 78–83.

2. *Михайлец Е. В.* О ранге неявных представлений над классами монотонных функций k-значной логики // Материалы VI Молодежной научной школы по дискретной математике и ее приложениям (Москва, ИПМ, 2007). М.: Изд-во ИПМ, 2007. С. 26–29.

3. *Михайлец Е. В.* О ранге неявных представлений над одним классом функций трехзначной логики // Вестник Моск. ун-та. Серия 1. Математика. Механика. М.: Изд-во МГУ, 2008. № 2. С. 65–70.

4. *Михайлец Е. В.* О ранге неявных представлений над одним классом функций трехзначной логики // Материалы VII Молодежной научной школы по дискретной математике и ее приложениям (Москва, ИПМ, 2009). М.: Изд-во мех.-мат. ф-та МГУ, 2009. Часть 2. С. 17–20.

5. *Михайлец Е. В.* О ранге неявных представлений над некоторыми классами функций трехзначной логики // Материалы X Международного семинара «Дискретная математика и ее приложения» (Москва, МГУ, 2010). М.: Изд-во мех.-мат. ф-та МГУ, 2010. С. 127–129.

6. *Михайлец Е. В.* Об одном классе функций трехзначной логики с экспоненциальным ростом ранговой функции // Материалы VIII Молодежной научной школы по дискретной математике и ее приложениям (Москва, ИПМ, 2011). М.: Изд-во мех.-мат. ф-та МГУ, 2011. С. 12–15.