Московский государственный университет
имени М.В. Ломоносова

На правах рукописи
УДК 512.71, 512.74

Будылин Роман Яковлевич

Инварианты некоторых подпространств групп аделей

01.01.06 — математическая логика, алгебра и теория чисел

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва — 2011

Работа выполнена на кафедре высшей алгебры Механико-математического факультета Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова.

Научный руководитель:	академик РАН Паршин Алексей Николаевич
Официальные оппоненты:	Востоков Сергей Владимирович, доктор физико-математических наук (профессор математико-механического факультета Санкт-Петербургского гос. университета) Кузьмин Леонид Викторович, доктор физико-математических наук (НИЦ "Курчатовский институт", Институт информационных технологий)
Ведущая организация:	Ярославский государственный педагогический университет им. К.Д. Ушинского

Защита диссертации состоится 23.03.2012 г. в 16 ч. 45 м. на заседании диссертационного совета Д.501.001.84 при Московском государственном университете имени М.В. Ломоносова по адресу: Российская Федерация, 119991, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, МГУ, Механико-математический факультет, аудитория 14-08.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Механико-математического факультета МГУ (Главное здание, 14 этаж).

Автореферат разослан 22.02.2012 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
Д.501.001.84 при МГУ
доктор физико-математических наук,
профессор

А.О. Иванов

Общая характеристика работы

Актуальность темы

Диссертация посвящена решению ряда актуальных задач алгебраической теории чисел и алгебраической геометрии. Строится формула для второго класса Черна двумерных векторных расслоений на поверхности, исследуются K_1-функтор и K_2-функтор от адельных колец, связанных с кривой и поверхностью, доказывается, что вторые когомологии K_2 от адельного комплекса вычисляют вторую группу Чжоу поверхности $CH^2(X)$. Получен алгоритм для разложения Каждана-Бравермана невырожденных матриц над двумерным локальным полем. Исследуются решетки как двойной фактор адельной группы, вычисляются объемы некоторых их подмножеств.

Первоначально адели были определены А. Вейлем и К. Шевалле для одномерного случая, а именно, для глобальных полей, т.е. конечных расширений поля $\mathbb{Q}$ или поля $\mathbb{F}_q(T)$. Аппарат аделей был успешно применен к решению многих фундаментальных задач алгебраической теории чисел, таких, как конечность групп классов, строение групп единиц, описание максимального абелева фактора группы Галуа глобального поля (теория полей классов), функциональное уравнение для дзета-функции Дедекинда, нахождение ее специальных значений и вычетов. Попытка обобщить адельный подход на многомерный случай, т.е. для систем полиномиальных уравнений с рациональными или конечными коэффициентами, привела к созданию теории многомерных аделей. Переход от кривых к поверхностям был осуществлен в работах А. Н. Паршина [1,2]. О возникновении и развитии теории многомерных аделей см. обзор А.Н. Паршина[3].

В статье 1980 года[4] А. А. Бейлинсон определил адельный комплекс $\mathbb{A}(X,\mathcal{F})^\bullet$ для любого многообразия X произвольной размерности и для квазикогерентного пучка $\mathcal{F}$ на X. Также определен неполный, или рациональный, вариант $a(X,\mathcal{O}_X)^\bullet$ адельного комплекса $\mathbb{A}(X,\mathcal{O}_X)^\bullet$.

Теорема Бейлинсона–Хубер[5] утверждает, что для любой нетеровой схемы когомологии комплексов $\mathbb{A}(X,\mathcal{F})^\bullet$ и $a(X,\mathcal{F})^\bullet$ канонически изо-

[1] А. Н. Паршин, "Об арифметике двумерных схем. I, Распределения и вычеты", Изв. Акад. Наук СССР 40(1976), 736-773.

[2] А. Н. Паршин, "Абелевы накрытия арифметических схем", Докл.Акад.Наук.СССР 243(1978), 855-858.

[3] A. N. Parshin, "Representations of higher adelic groups", Proceedings of International Congress of Mathematicians (Hyderabad, India, 19–27 August 2010), Volume 1: Plenary lectures and ceremonies, World Scientific, 2010, 362–392

[4] А. А. Бейлинсон, "Вычеты и адели", *Функц. анализ и прил.*, **14** (1980), 34–35.

[5] A. Huber, "On the Parshin–Beilinson adeles for schemes", *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg*, **61** (1991), 249–273.

морфны когомологиям $H^i(X,\mathcal{F})$. Таким образом адельный комплекс позволяет строить резольвенты для квазикогерентных пучков на схемах. Важно, что структура аделей обеспечивает мультипликативность и контравариантность этих резольвент. Более точно, для любой схемы X и квазикогерентных пучков $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ на X определен морфизм комплексов $m : \mathbb{A}(X,\mathcal{F})^\bullet \otimes \mathbb{A}(X,\mathcal{G})^\bullet \to \mathbb{A}(X,\mathcal{F}\otimes_{\mathcal{O}_X}\mathcal{G})^\bullet$, и для любого морфизма схем $f : X \to Y$ и квазикогерентного пучка $\mathcal{F}$ на X определен морфизм комплексов $f^* : \mathbb{A}(Y, f_*\mathcal{F})^\bullet \to \mathbb{A}(X,\mathcal{F})^\bullet$.

Больше деталей об адельном комплексе можно найти в монографии Фиммеля и Паршина[6], где обсуждается идеология, согласно которой многие понятия и утверждения из алгебраической геометрии могут быть сформулированы и доказаны в терминах многомерных аделей.

Напомним, что пучки K-групп ассоциированы с предпучками, задаваемыми по формуле $U \mapsto K_n(k[U])$, $n \geqslant 0$, где $U \subset X$ — произвольное открытое подмножество в схеме X, а $K_n(-)$ обозначает K-группы Квиллена. Пучки K-групп во многом представляют интерес благодаря их связи с теорией алгебраических циклов. Так, формула Блоха–Квиллена[7,8] для когомологий этих пучков $H^n(X, K_n(\mathcal{O}_X)) = CH^n(X)$ позволяет получать информацию о структуре групп Чжоу, изучение которых связано со многими глубокими гипотезами алгебраической геометрии (стандартные гипотезы Гротендика, гипотезы Ходжа, Тэйта, Блоха–Бейлинсона и многие другие).

Представляется интересным применить адельный подход к построению резольвент для других пучков абелевых групп на схемах, например, для пучков K-групп $\mathcal{K}_n^X = K_n(\mathcal{O}_X)$, $n \geqslant 0$. Возникающие при этом конструкции должны быть одним из шагов на пути к построению теории полных многомерных аделей, связанных с K-группами Милнора. Весьма общая ситуация пучков абелевых групп на схеме была рассмотрена С. О. Горчинским в работе 2008 года[9]. В 1997 году Д. В. Осипов построил адельный комплекс для пучка K_2-групп, члены которого являются некоторыми ограниченными произведениями K_2 от пополненных локальных колец[10]. Им доказано, что построенный комплекс квазиизоморфен комплексу Герстена, а значит вычисляет когомологии пучка групп K_2, в частности вторые когомологии, которые по теореме Блоха изоморфны группе Чжоу нуль-циклов $CH^2(X)$.

[6] T. Fimmel, A. N. Parshin, “An introduction to the higher adelic theory”, preprint (1999).

[7] S. Bloch, ”K_2 and algebraic cycles”, Ann. Math. 99(1974), 349-379.

[8] D. Quillen, “Higher Algebraic K-theory”, *Lecture Notes in Mathematics*, **341** (1973), 85–147.

[9] С. О. Горчинский, ”Адельная резольвента для пучков гомологий”, Изв. РАН. Сер. матем., 72:6 (2008), 133–202.

[10] Д. В. Осипов, “Адельные конструкции и прямые образы для дифференциалов и символов”, *Мат. сборник*, **188**:5 (1997), 59–84.

Во второй главе данной диссертации рассматривается другой комплекс, связанный с группой K_2 на поверхности, а именно K_2 от рационального адельного комплекса. Такой комплекс более подходит для наших целей относительно переноса подхода Блоха для адельного построения класса Черна. Исследуется вопрос о том, вычисляют ли вторые когомологии данного комплекса двумерную группу Чжоу.

Отправной точкой для рассматриваемой в третьей главе задачи послужили две гипотезы, выдвинутые И. Р. Шафаревичем в 1962 г. на Международном математическом конгрессе в Стокгольме[11]. Он рассмотрел вопрос о классификации алгебраических кривых X данного рода $g \geq 1$ над полем алгебраических чисел K. Помимо рода инвариантом кривой X выступает также множество точек S плохой редукции. Первая гипотеза Шафаревича (гипотеза конечности) состоит в том, что если $g > 1$ (или $g = 1$ и кривая X имеет рациональную точку), то эти данные определяют кривую с точностью до конечного числа возможностей. Вторая гипотеза относится к ситуации, когда $K = \mathbb{Q}$, а множество S пусто, и утверждает, что кривых рода $g \geq 1$ с такими инвариантами не существует. Эти гипотезы являются аналогами двух классических результатов из алгебраической теории чисел. Первый, теорема Эрмита (1857 г.), утверждает конечность числа расширений L/K поля K, имеющих заданную степень и фиксированные точки ветвления. Второй, теорема Минковского (1891 г.), состоит в том, что у поля $\mathbb{Q}$ нет неразветвленных расширений. Сравнение этих теорем с гипотезами Шафаревича показывает, что последние являются их аналогами для расширений полей относительной размерности 1 (схемной размерности 2), в то время как сами теоремы касаются случая конечных расширений (т. е. относительной размерности 0, или схемной размерности 1). При этом точки ветвления отвечают в новой ситуации точкам плохой редукции. В основе доказательства одномерных утверждений, теорем Минковского и Эрмита, лежит неравенство Минковского на дискриминант числового поля. Можно сформулировать аналоги гипотез Шафаревича в геометрическом случае. Для доказательства обеих гипотез можно использовать неравенство Ван де Вена-Богомолова-Мияока-Яо (ВБМЯ). Пусть V - неособая проективная поверхность, определенная над замкнутым полем k характеристики 0, и $c_1(V), c_2(V)$ - ее классы Черна ($c_1(V)$ мы рассматриваем как элемент группы Пикара $\mathrm{Pic}(V)$ и $c_2(V)$ (эйлерова характеристика поверхности) как целое число). Тогда ВБМЯ-неравенство утверждает, что

$$c_1(V)^2 \leq \max(2c_2(V), 3c_2(V)).$$

[11] И. Р. Шафаревич, "Поля алгебраических чисел", Int.Congr.Math.Stockholm, 1962, 163-176.

Для доказательства гипотез Шафаревича в геометрической ситуации удобнее следующая формулировка ВБМЯ-неравенства. Пусть $f\colon V \to B$ - собственное отображение поверхности V на неособую проективную кривую B с геометрически неприводимым общим слоем. Обозначим через g род общего слоя, через $g(B)$ —род базы B и предположим, что все слои суть стабильные кривые. Это означает, что все компоненты слоев приведены и все особые точки являются рациональными двойными точками с трансверсальными ветвями. Обозначим через δ_v число особых точек слоя V_v и через $w_{V/B}$ — относительное кокасательное расслоение. Имеем следующий результат. Если $g \geq 1$ и поверхность V нелинейчата, то

$$(w_{V/B}, w_{V/B}) \leq 3\sum_{v\in B}\delta_v + (2g-2)(2g(B)-2). \tag{1}$$

Таким образом, ВБМЯ-неравенство играет по отношению к геометрическим гипотезам Шафаревича ту же роль, что классическое неравенство Минковского по отношению к теоремам Эрмита и Минковского. В статье А. Н. Паршина 1989 года[12] появился арифметический аналог неравенства Ван де Вена-Богомолова-Мияока-Яо в форме (1). Это гипотетическое неравенство дает эффективное доказательство гипотез Шафаревича в некоторой ослабленной форме.

Доказательства ВБМЯ-неравенства Ф. А. Богомоловым и И. Мияока используют теорию стабильных векторных расслоений, построенную Богомоловым. Чтобы перенести этот метод на доказательство арифметического аналога, для начала можно попытаться доказать неравенство Минковского с помощью арифметической теории стабильных векторных расслоений. А для этого, с точки зрения арифметико-геометрической аналогии, полезно доказать геометрический аналог неравенства Минковского с помощью рассмотрения нестабильных расслоений. В 2006 году на юбилейной конференции к 60-летию Ф. А. Богомолова А. Н. Паршин сделал доклад, в котором помимо прочего прозвучало доказательство того, что если g - род кривой C над конечным полем $\mathbb{F}_q$, то g не меньше 0, при помощи сравнения меры некоторого подмножества внутри множества всех расслоений и меры множества всех расслоений. Если воспринимать g как размерность линейной системы, соответствующей каноническому классу, то это неравенство тривиально. С другой стороны для такой меры Хаара μ на $\mathbb{A}_C$, что $\mu(\prod_{\nu\in C} O_\nu) = 1$, верно, что $\mu(\mathbb{A}_C) = q^{g-1}$, где $\mathbb{A}_C$ - адели на кривой C, кольцо O_ν - пополненное локальное кольцо точки ν, k - поле функций

[12] А. Н. Паршин, "О применении разветвленных накрытий в теории диофантовых уравнений", Математический сборник, **180**:2 (1989),244–259.

кривой C. Это равенство можно взять за определение g. Тогда неравенство $g \geq 0$ есть некоторое нетривиальное суждение об объеме. Существует аналогия между кривой над конечным полем и числовым полем. Какой результат получится при перенесении рассуждений в арифметическцю ситуацию? Для числового поля K возьмем на $\mathbb{A}_K$ меру Хаара μ, такую что $\mu_\nu(O_\nu) = 1$ для всех конечных точек ν, $d\mu_\nu = dx$ для всех вещественных точек, $d\mu_\nu = dx \wedge d\bar{x}$ для комплексных. Тогда $\mu(\mathbb{A}_K/K) = D_K^{\frac{1}{2}}$, поэтому неравенство $g \geq 0$ соответствует неравенству Минковского $D_K > 1$. Целью второй главы настоящей диссертации как раз и является получение такого неравенства. То есть доказательство неравенства Минковского с помощью арифметического аналога теории стабильных векторных расслоений.

С функциональным уравнением для $L-$функции тесно связана проблема локальных множителей.

Пусть C алгебраическая кривая над конечным полем $\mathbb{F}_q$, поле ее рациональных функций обозначим через K, а через K_{sep} сепарабельное замыкание поля K и рассмотрим характер

$$\chi : Gal(K_{sep}/K) \to \mathbb{Q} \diagdown \mathbb{Z}.$$

Предположим, что характер χ неразветвлен, тогда можно определить $L-$функцию

$$L_C(s, \chi) = \prod_{x \in C} (1 - \chi(Fr_x)(q_x^{-s})^{-1},$$

где q_x это мощность поля вычетов $k(x)$. Для нее справедливо функциональное уравнение

$$L_C(s, \chi) = \chi((w)) q^{\frac{1}{2} c_1(X)} q^{-s c_1(X)} L_C(1 - s, \chi^{-1}).$$

Множитель $\chi((w)) q^{\frac{1}{2} c_1(X)} q^{-s c_1(X)}$ называется ϵ- множителем. Здесь w - рациональная дифференциальная форма. L-функция определяется как произведение по точкам на кривой. Интересно, что ϵ-множитель также раскладывается в произведение по точкам.

Пусть ν_x - нормирование локального кольца $O_{C,x}$, тогда

$$c_1(X) = \sum_{x \in C} \nu_x(w) deg(x), \tag{2}$$

$$\chi(w) = \prod_{x \in C} \chi(Fr_x^{\nu_x(w)}).$$

Таким образом, множитель в функциональном уравнении раскладывается в произведение по точкам.

Для поверхности над конечным полем П.Делинь доказал функциональное уравнение для L-функции абелева неразветвленного характера χ в явной форме

$$L_X(s,\chi) = \epsilon(\chi) q^{c_2(X)} q^{-sc_2(X)} L_X(2-s,\chi^{-1}),$$

где $\epsilon(\chi)$ - собственное значение отображения Фробениуса на $det_X(F)$, где F - этальный l-адический пучок, определяемый характером χ.

В 1983 году А. Н. Паршиным было показано, что множитель ϵ может быть записан в виде некоторого произведения по флагам $x \in C$[13]. Хотелось бы иметь декомпозицию множителя $q^{c_2(X)}$ в произведение по флагам. С этой целью там же появилась формула для класса Черна $c_n(E)$ векторного расслоения E на алгебраическом многообразии в терминах матриц перехода между тривиализациями расслоения в схемных точках многообразия. В этой формуле использовались многомерные вычеты, и потому эта формула пригодна только для многообразий над полем характеристики нуль.

Для произвольных обратимых матриц $X_1, \dots, X_m$ над коммутативной $\mathbb{Q}$-алгеброй A можно рассмотреть форму

$$p_m(X_1,\dots,X_m) := \operatorname{tr}(X_1^{-1}\dots X_m^{-1} dX_1 \wedge \dots \wedge dX_m) \in \Omega_A^m.$$

Под внешним произведением матриц $X = (a_{ij})$ и $Y = (b_{ij})$ с коэффициентами в $\Omega^*(A)$ здесь подразумевается матрица $X \wedge Y := (\sum_j a_{ij} \wedge b_{jl})$. Напомним формулу Ньютона, выражающую элементарные симметрические функции σ_m через суммы степеней s_i:

$$\sigma_m = \frac{1}{m!}\begin{vmatrix} s_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ s_2 & s_1 & 2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{m-1} & s_{m-2} & s_{m-3} & \dots & m-1 \\ s_m & s_{m-1} & s_{m-2} & \dots & s_1 \end{vmatrix}$$

Положим $w_A^m(X_1,\dots,X_m)$ равным значению элементарной симметрической функции σ_m, после замены суммы степеней s_i в формуле Ньютона на $p_i(X_1,\dots,X_i)$, а умножения на внешнее произведение.

Пример 1.

$$w_A^1 = \operatorname{tr}(X^{-1}dX) = (\det X)^{-1} d(\det X),$$

$$w_A^2 = \frac{1}{2}(\operatorname{tr}(X^{-1}dX) \wedge \operatorname{tr}(Y^{-1})dY) - \operatorname{tr}(Y^{-1}X^{-1}dX \wedge dY).$$

[13] А. Н. Паршин, "Chern classes, adeles and L-functions", J. fur die reine und angewandte Math. 341(1983), 174-192.

Пусть X – произвольная нетерова неприводимая схема размерности n конечного типа над полем нулевой характеристики. Пусть E – векторное расслоение на X, пучок $\mathcal{E}$ - локально свободный пучок $\mathcal{O}_X$-модулей, определяемый расслоением E. Для каждой схемной точки $\eta \in X$ рассмотрим пучковый слой $\mathcal{E}_\eta$. Пусть b_η – базис свободного $\mathcal{O}_\eta$-модуля $\mathcal{E}_\eta$. Набор $b := (b_\eta)_{\eta \in X}$ называется адельной тривиализацией пучка E. Мы можем связать с b набор матриц перехода $g = (g_{\eta_0,\eta_1}), g_{\eta_0,\eta_1} \in \mathrm{GL}(O_{\eta_0})$ следующим образом:

$$b_{\eta_1} g_{\eta_0,\eta_1} = b_{\eta_0},$$

здесь $\eta_1 \in \bar{\eta_0}$, где $\bar{\eta_0}$ обозначает замыкание схемной точки η_0.

Положим

$$(w_m)_{\eta_0,\ldots,\eta_m} := w^m_{\mathcal{O}_{\eta_0}}(g_{\eta_0\eta_1}, \ldots, g_{\eta_{m-1}\eta_m}).$$

Тогда для гладкого многообразия X старшее число Черна $C_{n,X}(E)$ по формуле Паршина равно:

$$\sum_{\eta_0,\ldots,\eta_n} res_{\eta_0,\ldots,\eta_n}((w_n)_{\eta_0,\ldots,\eta_n}).$$

Здесь $res_{\eta_0,\ldots,\eta_n}$ – многомерный вычет.

Если X – гладкое многообразие над полем конечной характеристики $p > dim(X)$, то эта формула дает $C_{n,X}$ по модулю p. Естественно возникает задача построения такой формулы в случае многообразия над полем конечной характеристики, которая бы давала точное значение $C_{n,X}$. В этом случае вместо групп $H^m(X, \Omega^m_X)$ целесообразно использовать классы Черна со значениями в группах $H^m(X, K_m(\mathcal{O}_X))$, где $K_m(\mathcal{O}_X)$ – пучок, связанный с предпучком K-функторов Квиллена от $\mathcal{O}_X$. Согласно адельной идеологии формула для класса Черна векторного расслоения ищется в виде суммы не по точкам, а по флагам $x \in C$, где x точка на неприводимой кривой C.

В статье Блоха 1974 года класс Черна $c_{2,X}(E)$ для расслоения E с тривиальным детерминантом строился с помощью применения комплекса Чеха к точной тройке пучков

$$1 \to K_2(\mathcal{O}_X) \to \mathrm{St}(\mathcal{O}_X) \to \mathrm{SL}(\mathcal{O}_X) \to 1.$$

Он получается как образ кограничного отображения из $H^1(X, \mathrm{SL}(\mathcal{O}_X))$ в $H^2(X, K_2(\mathcal{O}_X))$. В третьей главе мы применяем подход Блоха для адельных комплексов. В итоге получается формула для класса Черна расслоения по тривиализациям в схемных точках. В отличии от Блоха мы рассматриваем расслоения с произвольным детерминантом благодаря конструкции

Делиня. В 1979 году он построил обобщение точной тройки

$$1 \to K_2(A) \to \mathrm{St}(A) \to E(A) \to 1$$

для $\mathrm{GE}(A)$ вместо $E(A)$, где $\mathrm{GE}(A)$ - подгруппа, порожденная элементарными и диагональными матрицами[14].

В 2006 году А.Браверман и Д.Каждан доказали, что для редуктивной группы G над двумерным локальным полем справедливо следующее разложение[15]:

$$G(k((u))((t))) = G(k[[u]]((t)))G(k((u))[[t]]).$$

Это было доказано с использованием инд-схем, кроме того доказательство было неявным. В четвертой главе мы предъявляем явный алгоритм подобного разложения в группе GL, но для более общего кольца $R((t))$, где R – произвольное евклидово кольцо.

Цель работы

Целью работы является получение неравенства на основе сравнения объема множества всех решеток с множеством решеток, выделяемом некоторым условием стабильности; конструктивное доказательство разложения Каждана-Бравермана над двумерным локальным полем; проверка того, что вторые когомологии комплекса, получающегося из рационального адельного комплекса применением функтора K_2, совпадают с двумерной группой Чжоу на поверхности; построение формулы для второго класса Черна векторного расслоения на поверхности, зависящей от тривиализаций в схемных точках, в виде суммы по флагам.

Научная новизна

В диссертации получены следующие результаты.

1. Предъявлена конкретная фундаментальная область для множества решеток над числовым полем. Вычислен объем множества нестабильных решеток ранга 2 со свободными факторами канонической фильтрации. Доказано неравенство, связывающее регулятор R_K и дискриминант D_K числового поля:

$$2^{-3s}(r+4s)D_K\zeta_K(2) \geq R_K.$$

[14]P. Deligne, "Somme de Gauss cubiques et revetements de Sl(2)(d'apres S. J. Patterson)", Seminaire Bourbaki 539(juin 1979).

[15]A. Braverman and D.Kazhdan, "Some Examples of Hecke Algebras over 2-Dimensional Local Fields",*Nagoya Math. J.*,**184**:57(2006).

2. Построена формула для второго класса Черна векторного расслоения на поверхности, зависящая от матриц перехода между тривиализациями данного расслоения в различных схемных точках, в виде суммы по флагам на поверхности, т.е. парам из неприводимой кривой на поверхности и точки на ней. Более точно класс Черна выражается через прообразы матриц перехода в группе Стейнберга. Данная формула функториальна относительно взятия обратных образов. Доказано, что формула Севери получается из построенной формулы при конкретном выборе тривиализаций.

3. Доказано, что вторые когомологии комплекса, полученного применением K_2 к рациональному адельному комплексу совпадают с двумерной группой Чжоу на поверхности.

4. Предъявлен алгоритм для разложения Каждана-Бравермана над двумерным локальным полем:

$$\mathrm{GL}(\mathrm{k}((\mathrm{u}))((\mathrm{t}))) = \mathrm{GL}(\mathrm{k}[[\mathrm{u}]]((\mathrm{t})))\mathrm{GL}(\mathrm{k}((\mathrm{u}))[[\mathrm{t}]]).$$

   Доказано также более общее разложение:

$$\mathrm{GL}(\mathrm{Quot}(\mathrm{R})((\mathrm{t}))) = \mathrm{GL}(\mathrm{R}((\mathrm{t})))\mathrm{GL}(\mathrm{Quot}(\mathrm{R})[[\mathrm{t}]]),$$

   где R – произвольное евклидово кольцо.

Основные методы исследования

В работе используются методы алгебраической геометрии, а именно теория аделей, векторные расслоения, а также теория меры Хаара, теория решеток, K-теория. Кроме самого определения аделей и адельного комплекса, определенных в работах Паршина и Бейлинсона, мы используем адельную теорию пересечений, теорию расслоений и законы взаимности, развитые в работах Паршина. Во второй главе мы используем теорию стабильности для решеток над числовым полем, построенную в работе Грэйсона. Также используются результаты Зигеля о мере Хаара множества решеток. В третьей главе используется подход Блоха для построения класса Черна. Также в третьей главе мы строим расширение группы Стейнберга GSt, такое расширение было построено для матриц второго порядка и несколько иным способом в статье Делиня.

Теоретическая и практическая ценность работы

Диссертация имеет теоретический характер. Полученные в диссертации результаты представляют интерес для алгебраической геометрии, теории чисел.

Апробация работы

Результаты диссертации докладывались на научно-исследовательском семинаре по арифметической алгебраической геометрии под руководством А. Н. Паршина в Математическом институте им. Стеклова АН., семинаре по топологии под руководством Т. Е. Панова на механико-математическом факультете МГУ и научных конференциях Zeta function, Москва, 21.06-25.06, 2010, Global fields, Москва, 25.10 - 28.10, 2011 и Ярославской школе по алгебраической геометрии, Ярославль, 23 – 28 мая 2011.

Публикации

Результаты диссертации опубликованы в трёх работах, список которых приведен в конце автореферата [1–3].

Структура и объем диссертации

Диссертационная работа изложена на 89 страницах и состоит из введения и трех глав. Библиография включает 50 наименований.

Краткое содержание работы

Во введении изложена история рассматриваемых проблем и приводятся основные результаты диссертации. В первой главе изложены определение аделей по Бейлинсону-Паршину, определение рационального адельного комплекса. Также исследуются K-группы от аделей на поверхности. Вычислены K_0 от адельных колец на кривой, адельных колец на поверхности $\mathbb{A}_{01}, \mathbb{A}_{02}$. Доказано, что K_2 от вышеперечисленных адельных колец совпадает с K_2 Милнора. Также группа Чжоу $CH^2(X)$ на поверхности описана в терминах рационального адельного комплекса, что пригодится в третьей главе при построении класса Черна векторного расслоения по его адельной тривиализации.

Раздел 2.1 носит вводный характер. В нем дано определение косимплициальной группы, нулевых и первых когомологий косимплициальных групп и когомологий произвольного порядка в случае абелевой косимплициальной группы. Вводятся понятия аделей и рациональных аделей. При помощи понятия косимплициальной группы аделей определяется адельный комплекс Бейлинсона-Паршина и рациональный адельный комплекс для структурного пучка и для произвольных функторов из колец в абелевы группы. Также в этом разделе доказана лемма о существовании длинной точной последовательности когомологий для центрального расширения косимплициальных групп.

В разделе 2.2 понятия из раздела 2.1 демонстрируются в частном случае размерностей один и два (например, определение двумерных аделей $\mathbb{A}_{012}$). В примере 2.2.3 введено важное для главы 3 определение адельной тривиализации. Также сформулирована теорема Паршина, утверждающая что n-мерные векторные расслоения с точностью до изоморфизма находятся во взаимно однозначном соответствии с первыми когомологиями рационального адельного комплекса функтора GL_n. Также здесь введено определение отображения ручного символа из $K_2(k(X))$ в $\mathbb{Z}$ и сформулированы его основные свойства, доказанные А. Н. Паршиным, закон взаимности вокруг кривой и точки. Теорема 2.2.6 дает выражение для индекса пересечения двух дивизоров в терминах ручных символов некоторых аделей, связанных с уравнениями данных дивизоров.

В разделе 2.3 вычислена группа K_1 от адельных колец $\mathbb{A}_0, \mathbb{A}_1, \mathbb{A}_2, \mathbb{A}_{01}, \mathbb{A}_{02}$ (теорема 2.3.5). Также доказано, что группа K_2 от этих адельных колец совпадает с группой K_2 Милнора. Неизвестно является ли комплекс, полученный применением функтора K_2 к адельному комплексу резольвентой пучка абелевых групп $K_2(\mathcal{O}_X)$, поэтому равенство его вторых когомологий двумерной группе Чжоу $\mathrm{CH}^2(\mathrm{X})$ не следует напрямую из теоремы Блоха. Тем не менее верна следующая теорема 2.3.9, являющаяся основным результатом первой главы:

Теорема 2. *Пусть поверхность X регулярна. Тогда верно равенство $H^2(K_2^M(\mathbb{A}^\bullet)) = CH^2(X)$.*

Также доказана следующая лемма:

Лемма 3. *Существует отображение $\psi' : H^2(K_2(\mathbb{A}^\bullet)) \to CH^2(X)$, такое что следующая диаграмма коммутативна:*

$$\begin{tikzcd}
H^2(K_2^M(\mathbb{A}^\bullet)) \arrow[r, "i"] \arrow[dr, "\psi"'] & H^2(K_2(\mathbb{A}^\bullet)) \arrow[d, "\psi'"] \\
& CH^2(X)
\end{tikzcd}$$

Отображение i является вложением.

Вторая глава посвящена получению неравенства типа Минковского при помощи адельных групп. Пусть K –числовое поле. Неравенство Минковского - это оценка на дискриминант поля K вида $D_K \geq C^{dim(K_{\mathbb{R}})}$. Внутри множества всех решеток выделяется подмножество, считается его объем по эквивариантной мере Хаара и сравнивается с объемом всех решеток, даваемом формулой Зигеля. В качестве подмножества берутся нестабильные решетки, факторы фильтрации которых суть свободные одномерные модули над кольцом целых O_K. Полученное неравенство связывает регулятор и дискриминант и является утверждением типа теоремы Брауэра-Зигеля.

В разделе 3.1 описывается метод А.Н.Паршина доказательства того, что род кривой над конечным полем больше либо равен нулю. При этом род кривой рассматривается как логарифм объема некоторой фундаментальной области, связанной с данной кривой. Ключевым в этом рассуждении оказывается рассмотрение векторных расслоений как двойного фактора адельных групп и выделение в этом множестве некоторого подмножества условием типа стабильности.

Разделы 3.2 - 3.4 носят вводный характер. В них даны основные определения и обозначения.

В разделе 3.2 вводится понятие решетки, арифметического аналога векторного расслоения. Вводятся понятия подрешетки, ее наклона, канонического многоугольника и стабильной решетки. Приводятся основные утверждения о каноническом многоугольнике: единственность канонической фильтрации и критерий каноничности данной фильтрации. Все определения и утверждения раздела 3.2 взяты из статьи Грэйсона.

В разделе 3.3 показано, что множество решеток является двойным фактором адельной группы $\mathrm{GL}(\mathbb{A})$.

В разделе 3.4 строится эквивариантная мера Хаара на множестве решеток с выделенным базисом через дифференциалы координат, связанных с разложением Ивасавы. Эту меру мы называем мерой Ивасавы, и она довольно удобна для вычисления объема главных нестабильных решеток.

В разделе 3.5 вводится понятие главной нестабильной решетки. В теореме 3.5.3 строится некоторая фундаментальная область для решеток. Приведен пример частного случая такой фундаментальной области. Теорема 3.5.5 дает характеризацию главных нестабильных решеток среди всех решеток в терминах разложения Ивасавы и вычисляет их объем в мере, связанной с разложением Ивасавы.

В разделе 3.6 вычисляется объем главных нестабильных решеток в мере, связанной с координатами квадратичных форм. Это вычисление сводится к нахождению коэффициента пропорциональности между мерами Ивасавы и мерой, связанной с коэффициентами квадратичных форм. После сравнения с объемом фундаментального множества для всех решеток, который дается формулой Зигеля, получается основной результат второй главы и статьи[2]:

Теорема 4. *Справедливо следующее неравенство, связывающее дискриминант D_K и регулятор R_K числового поля*

$$2^{-3s}(r+4s)\,|D_K|\,\zeta_K(2) \geq R_K,$$

где s - число комплексных пополнений поля K.

Пусть X - гладкая поверхность. Набор базисов во всех схемных точках $e_{1,\eta}, e_{2,\eta}$ называется адельной тривиализацией (см. пример 2.2.3). Третья глава посвящена построению формулы для класса Черна в терминах адельных тривиализаций. Такой, чтобы по адельной тривиализации t_E она выдавала цикл $c(t_E) = \sum_{x \in C} a_{x,C} x$ (здесь суммирование идет по флагам - точка и неприводимая кривая ее содержащая). Причем этот цикл должен обладать свойством функториальности при морфизмах $f: Y \to X$, а именно, кратность $a_{f(y),f(C)}$ (кратность, соответствующая обратному образу $c(t_E)$ при морфизме f) совпадает с соответствующей кратностью в $c(f^*(t_E))$.

В разделе 4.1 даны основные определения, относящие к K - теории, определение матричных групп $E(R)$, $GE(R)$, группы Стейнберга $St(R)$ и группы $K_2(R)$. Также там вводится определение группы $\mathrm{GSt}(R)$(см. определение 4.1.4) и строится центральное расширение с помощью K_2 для $\mathrm{GE}(R)$(теорема 4.1.7):

$$1 \to K_2(R) \to \mathrm{GSt}(R) \to \mathrm{GE}(R) \to 1.$$

В разделе 4.2 доказано, что адельная тривиализация t_E векторного расслоения лежит в $\mathrm{GE}(R)$. А также доказан основной результат третьей главы и статьи[3]:

Теорема 5. *второй класс Черна для двумерного векторного расслоения на гладкой поверхности можно выразить следующим образом*

$$c_2(E) = \nu \circ d^1 \circ s(t_E)$$

Здесь t_E – это элемент первого члена рационального адельного комплекса GE, отвечающий тривиализации расслоения E, а s - это некоторое сечение отображения $\mathrm{GSt}(\mathbb{A}^1) \to CE(\mathbb{A}^1)$ из раздела 4.1, а ν - это отображение из второго члена рационального адельного комплекса $\mathcal{K}_2$ в группу $CH^2(X)$. Эта формула обладает нужным нам функториальным свойством относительно обратных образов.

Формула Севери

$$c_2(E) = \langle w \rangle + (w)(\det E) - (w)(w)$$

выражает второй класс Черна векторного расслоения через его произвольное сечение. В разделе 4.3 мы представляем формулу Севери для второго класса Черна двумерного расслоения на поверхности как частный случай нашей формулы при конкретном выборе тривиализаций и сечения s.

Раздел 4.4 посвящен основному результату статьи [1], в нем приводится алгоритм для разложения матрицы над двумерным локальным полем $k((u))((t))$ следующего вида:

$$\mathrm{GL}(n, k((u))((t))) = \mathrm{GL}(n, k((u))[[t]])\mathrm{GL}(n, k[[u]]((t))).$$

Благодарности

Автор благодарен научному руководителю, академику А. Н. Паршину за постановки задач и всестороннюю поддержку. Также я хотел бы выразить благодарность к.ф.-м.н. С. О. Горчинскому и к.ф.-м.н. Д. В. Осипову за многочисленные обсуждения. С. О. Горчинскому я обязан идеей применить подход Блоха к адельному комплексу.

Список публикаций по теме диссертации

[1] Р. Я. Будылин, "Матричное разложение над двумерным локальным полем", *Математические заметки*, **85**:6 (2009), 936–939.

[2] Р. Я. Будылин, "Неравенство, полученное при рассмотрении нестабильных решеток ранга 2", *Успехи математических наук*, **66**:4 (2011), 183–184.

[3] Р. Я. Будылин, "Адельное построение класса Черна", *Математический сборник*, 202:11(2011), 75–96.