МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
Механико-математический факультет

На правах рукописи

Шатина Любовь Сергеевна

Эволюция движения систем вязкоупругих тел

01.02.01 — Теоретическая механика

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва - 2012

Работа выполнена на кафедре теоретической механики и мехатроники механико-математического факультета Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова.

Научный руководитель:	Вильке В.Г., доктор физико-математических наук, профессор
Официальные оппоненты:	Марков Ю.Г., доктор физико-математических наук, профессор
	Зленко А.А., кандидат физико-математических наук, доцент
Ведущая организация:	Вычислительный центр им. А.А. Дородницына Российской академии наук

Защита диссертации состоится 25 мая 2012 года в 16 часов 30 минут на заседании совета Д 501.001.22 при Московском государственном университете имени М.В. Ломоносова по адресу: 119991, Москва, Ленинские горы, Главное Здание МГУ, механико-математический факультет, ауд. 16-24.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке механико-математического факультета МГУ (Главное здание МГУ, 14 этаж).

Автореферат разослан 25 апреля 2012 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета
кандидат физико-математических наук,
доцент Прошкин В.А.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Задача о движении вязкоупругих тел в гравитационном поле сил является модельной задачей в теории приливов. Первые фундаментальные исследования в этой области принадлежат Дж.Г. Дарвину. Более детальное исследование приливных эффектов, учитывающее новую научную информацию о планетах и их спутниках, было проведено во второй половине XX века такими учеными как Г.Макдональд, П. Голдрайх, С. Пил, У. Каула и другими. Ряд важных результатов по приливной эволюции вращательного движения небесных тел был получен Белецким В.В. В данной работе применяется метод разделения движений и усреднения, разработанный Вильке В.Г. для изучения механических систем с бесконечным числом степеней свободы, движение которых описывается сложными системами интегродифференциальных уравнений в бесконечномерных банаховых пространствах. Указанный метод позволяет перейти от этих уравнений к конечной системе обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающих эволюцию движения исследуемой системы. Изучению систем, содержащих вязкоупругие элементы большой жесткости, посвящены работы Черноусько Ф.Л., Вильке В.Г., Маркова Ю.Г., Маркеева А.П. и др.

Исследования по влиянию упругих и диссипативных сил на эволюцию движения небесных тел актуальны также в связи с попыткой объяснить расхождения между теоретическими результатами и данными наблюдений и необходимостью уточнения законов движения тел в гравитационном поле сил. Цель работы состоит в развитии и углублении методов исследования эволюции движения систем с бесконечным числом степеней свободы и применении этих и ранее известных методов к исследованию диссипативной эволюции движения небесных тел.

Основные результаты диссертации и их научная новизна. В работе проведено исследование диссипативной эволюции поступательно-вращательного движения систем вязкоупругих тел в гравитационном поле сил. Планеты моделируются однородными изотропными телами из материала Кельвина-Фойгта, имеющими шаровую форму в естественном недеформированном состоянии.

- Проведено исследование поступательно-вращательного движения двух вязкоупругих планет в поле сил взаимного притяжения в "плоском" случае, когда центры масс планет движутся в неподвижной плоскости, а ось вращения каждой из планет направлена по нормали к этой плоскости. Описано деформированное состояние планет в первом приближении по малым параметрам. Методом разделения движений и усреднения получена система уравнений, описывающих эволюцию поступательно-вращательного движения системы в переменных Андуайе-Делоне. Найдены стационарные решения этой системы и исследована их устойчивость на основе уравнений в вариациях. Показано, что эволюционная система имеет не более двух стационарных решений. В случае существования одного стационарного решения оно является неустойчивым. В случае существования двух стационарных решений стационарное движение, соответствующее большему расстоянию между центрами масс планет асимптотически устойчиво, а меньшему - неустойчиво. В стационарном движении планеты обращены друг к другу одной стороной и равномерно вращаются вокруг общего центра масс по круговым орбитам. Для планет Солнечной системы вычислены значения радиусов стационарных орбит. В рамках модельной задачи о движении двух вязкоупругих тел в поле сил взаимного притяжения получено уравнение, описывающее эволюцию медленной угловой переменной долготы перигелия. В качестве примера рассмотрена система "Солнце-Меркурий". Существенным обстоятельством является тот факт, что движение меньшей по массе планеты (Меркурия) происходит не в центральном ньютоновском поле сил, а в гравитационном поле массивного вращающегося вязкоупругого тела (Солнца).

- Рассмотрено движение связки двух вязкоупругих планет в гравитационном поле массивного вязкоупругого тела. Методом разделения движений и усреднения получена система дифференциальных уравнений, описывающих эволюцию поступательно-вращательного движения системы. Для системы "Солнце-Земля-Луна" с использованием данных наблюдений определены числовые значения эквивалентных коэффициентов вязкости планет. На основе полученных уравнений построены графики зависимости угловых скоростей и элементов орбит изучаемых небесных тел от времени. Проведено качественное исследование эволюционной системы уравнений движения в случае, когда тело наименьшей массы моделируется материальной точкой. Показано, что в зависимости от начальных условий эта система может иметь не более двух стационарных решений, и доказана их неустойчивость.
- Получены векторные уравнения, описывающие движение трех вязкоупругих тел в поле сил взаимного притяжения в неограниченной постановке задачи с учетом возмущений, вызванных упругостью и диссипацией. Найдено стационарное движение системы - аналог треугольных точек либрации в классической задаче трех тел. Получены поправки к взаимным расстояниям между центрами масс планет в стационарной конфигурации.

Все основные результаты, полученные в работе, являются новыми

Методы исследования. В работе используются методы аналитической механики, метод разделения движений, применяемый к механическим системам, содержащим деформируемые элементы большой жесткости (Черноусько Ф.Л. (1980), Вильке В.Г. (1983)), метод усреднения для систем с быстрыми и медленными переменными (Арнольд В.И., Козлов В.В., Нейштадт А.И. (2009)).

Достоверность результатов. Все результаты в диссертации получены методами аналитической механики и асимптотическими методами на основе сформулированных в ней гипотез. Качественно-аналитические результаты проиллюстрированы и подтверждены с помощью численного анализа.

Теоретическая и практическая ценность. Диссертация носит теоретический характер. Полученные результаты могут найти применение в приливной теории движения планет и их спутников, а также при построении новых усложненных моделей в небесной механике и в динамике полета космических аппаратов. Результаты диссертации могут быть использованы в исследованиях, проводимых в МГУ имени М.В. Ломоносова, Институте проблем механики имени А.Ю. Ишлинского РАН, Вычислительном центре имени А.А. Дородницына РАН, Институте прикладной математики имени М.В. Келдыша РАН и других научно-исследовательских центрах.

Апробация работы. Результаты, представленные в диссертации, докладывались автором и обсуждались на следующих научных семинарах и конференциях:

- Международная конференция студентов, аспирантов и молодых учёных "Ломоносов-2009"(Москва, 13-18 апреля 2009 г.)
- European Geosciences Union General Assembly 2009 (Vienna, Austria, 19-24 April 2009)
- Симбирская молодежная научная школа по аналитической динамике, устойчивости и управлению движениями и процессами, посвященная памяти академика В.В. Румянцева (Ульяновск, 8-12 июня 2009 г.)
- European Planetary Science Congress 2009 (Potsdam, Germany, 14-18 September 2009)
- Международный молодежный научный форум "Ломоносов-2011" (Москва, 11-15 апреля 2011 г.)
- X Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики (Нижний Новгород, 24-30 ав-

густа 2011 г.)

- Семинар "Динамика относительного движения" под руководством чл.-корр. РАН В.В. Белецкого, проф. Ю.Ф. Голубева, доц. К.Е. Якимовой, доц. Е.В.Мелкумовой (2012 г.)
- Семинар "Математические методы технической механики" под руководством проф. С.Я.Степанова и доц. А.А.Бурова (2012 г.)
- Семинар "Аналитическая механика и теория устойчивости" под руководством чл.-корр. РАН В.В. Белецкого и проф. А.В. Карапетяна (2012 г.)

Публикации. Основные результаты диссертации изложены в 4 публикациях, список которых приведен в конце автореферата. Работы [1,2] выполнены в соавторстве с научным руководителем д.ф.-м.н. Вильке В.Г., которому принадлежат постановки задач и методы их исследования, и в соавторстве с д.ф.-м.н. Шатиной А.В., которая проводила научные консультации.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы из 133 наименований. Работа содержит 14 рисунков. Общий объем диссертации - 91 страница.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во **введении** описана предметная область и цель настоящей диссертации, дан обзор работ, посвященных исследованию влияния деформаций и внутреннего трения на эволюцию поступательно-вращательного движения систем небесных тел, а также изложены основные результаты диссертации.

Первая глава посвящена задаче о движении двух вязкоупругих планет в поле сил взаимного притяжения. Планеты моделируются однородными изотропными вязкоупругими телами масс m_1 и m_2 из материала Кельвина-Фойгта, имеющими в естественном недеформированном состоянии шаровую форму. Так как рассматриваемая система изолирована, ее центр масс движется равномерно и прямолинейно и может быть принят за начало инерциальной системы отсчета $OXYZ$.

Для описания вращательного движения планет вводятся подвижные системы координат $C_i x_1^{(i)} x_2^{(i)} x_3^{(i)}$, где C_i - центр масс i-ой планеты. Переход от подвижных осей к осям Кенига $C_i \xi_1^{(i)} \xi_2^{(i)} \xi_3^{(i)}$задается ортогональным оператором Γ_i $(i = 1, 2)$. Положение точки M_i i -ой планеты определяется радиусом-вектором $\mathbf{R}_{M_i}$по формуле

$$\mathbf{R}_{M_i} = \mathbf{R}_i + \Gamma_i \left(\mathbf{r}_i + \mathbf{u}_i \left(\mathbf{r}_i, t \right) \right) \quad (i = 1, 2),$$

где $\mathbf{R}_i$ - радиус-вектор точки C_i, $\mathbf{r}_i$ - радиус-вектор точки M_i шара в недеформированном состоянии относительно подвижной системы координат $C_i x_1^{(i)} x_2^{(i)} x_3^{(i)}$, $\mathbf{u}_i = \left(u_1^{(i)}, u_2^{(i)}, u_3^{(i)} \right)$ - вектор упругого смещения.

Векторы $\mathbf{R}_i$ и операторы Γ_i однозначно определяются по заданному векторному полю $\mathbf{R}_{M_i}$ следующими условиями:

$$\mathbf{R}_i \left(t \right) = \frac{1}{m_i} \int_{V_i} \mathbf{R}_{M_i} \left(\mathbf{r}_i, t \right) \rho_i dv_i, \quad \int_{V_i} \mathbf{u}_i dv_i = 0, \quad \int_{V_i} rot \mathbf{u}_i dv_i = 0,$$

где $dv_i = dx_1^{(i)} dx_2^{(i)} dx_3^{(i)}$, ρ_i - плотность i-ой планеты $(i = 1, 2)$.

Потенциальная энергия упругих деформаций определяется функционалом

$$\Pi = - \int_{V_1} \int_{V_2} \frac{f \rho_1 \rho_2}{\left| \mathbf{R}_{M_1} - \mathbf{R}_{M_2} \right|} dv_1 dv_2,$$

где f - универсальная гравитационная постоянная.

Деформированное состояние планет описывается в рамках классической теории упругости малых деформаций с помощью квадратичного функционала

$$\mathscr{E} \left[\mathbf{u} \right] = \sum_{i=1}^{2} \mathscr{E}_i \left[\mathbf{u}_i \right] = \sum_{i=1}^{2} \int_{V_i} \alpha_{i1} \left(I_{iE}^2 - \alpha_{i2} II_{iE} \right) dv_i,$$

$$\alpha_{i1} = \frac{E_i \left(1 - \nu_i \right)}{2 \left(1 + \nu_i \right) \left(1 - 2\nu_i \right)}, \ \alpha_{i1} = \frac{2 \left(1 - 2\nu_i \right)}{\left(1 - \nu_i \right)},$$

$$\alpha_{i1} > 0,\ 0 < \alpha_{i2} < 3,\ I_{iE} = \sum_{j=1}^{3} e_{jj}^{(i)},$$

$$II_{iE} = \sum_{k<l} \left(e_{kk}^{(i)} e_{ll}^{(i)} - \left(e_{kl}^{(i)} \right)^2 \right), e_{kl}^{(i)} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_k^{(i)}}{\partial x_l^{(i)}} + \frac{\partial u_l^{(i)}}{\partial x_k^{(i)}} \right),$$

где E_i - модуль Юнга i-ой планеты, ν_i - ее коэффициент Пуассона.

Функционал диссипативных сил $\mathscr{D}[\dot{\mathbf{u}}] = \sum_{i=1}^{2} \mathscr{D}_i[\dot{\mathbf{u}}_i]$ согласно модели Кельвина-Фойгта определяется соотношением $\mathscr{D}_i[\dot{\mathbf{u}}_i] = \chi_i \mathscr{E}_i[\dot{\mathbf{u}}_i]$ где $\chi_i > 0$ - коэффициент внутреннего вязкого трения.

Кинетическая энергия системы задается функционалом

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{2} \int_{V_i} \dot{\mathbf{R}}_{M_i}^2 \rho_i dv_i =$$

$$= \sum_{i=1}^{2} \left\{ \frac{1}{2} m_i \dot{\mathbf{R}}_i^2 + \frac{1}{2} \int_{V_i} \left[\boldsymbol{\omega}_i \times (\mathbf{r}_i + \mathbf{u}_i) \right]^2 \rho_i dv_i + \right.$$

$$\left. + \int_{V_i} \left(\boldsymbol{\omega}_i \times (\mathbf{r}_i + \mathbf{u}_i), \dot{\mathbf{u}}_i \right) \rho_i dv_i + \frac{1}{2} \int_{V_i} \dot{\mathbf{u}}_i^2 \rho_i dv_i \right\},$$

где $\boldsymbol{\omega}_i$ - угловая скорость i-го шара, $\boldsymbol{\omega}_i \times (\cdot) = \Gamma_i^{(-1)} \dot{\Gamma}_i(\cdot)$ $(i = 1, 2)$.

Взаимное расположение планет описывается вектором $\mathbf{R} = \mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2$, соединяющим их центры масс.

Рассматривается частный случай, когда движение центров масс планет происходит в неподвижной плоскости OXY, а их вращение происходит по нормали к этой плоскости. Существование такого класса движений было доказано в монографии Вильке В.Г. (1997), где были получены уравнения движения рассматриваемой системы в векторном виде.

В п. 1.1 формулируется постановка задачи, и выводятся уравнения движения системы в форме уравнений Рауса, каноническую часть которых составляют уравнения относительно переменных Андуайе-Делоне, а лагранжеву - уравнения в форме вариационного принципа Д'Аламбера-Лагранжа относительно обобщенных координат, описывающих деформированное состояние планет. Вращательное движение планет описывается переменными I_1, φ_1, I_2, φ_2, а движение конца вектора $\mathbf{R}$ - переменными G, g, L, l. Здесь I_i - модуль кинетического момента i-ой планеты относительно ее центра масс, φ_i - угол, задающий в рассматриваемом частном случае поворот подвижных осей $C_i x_1^{(i)} x_2^{(i)} x_3^{(i)}$ относительно соответствующих осей Кенига, G - модуль момента количества движения конца вектора $\mathbf{R}$ относительно начала инерциальной системы отсчета, L - модуль момента количества движения по круговой орбите с данным значением полной энергии, g - долгота перигелия орбиты, l - средняя аномалия.

В п. 1.2 методом разделения движений и усреднения выводится приближенная система уравнений относительно переменных "действие" и медленных угловых переменных, описывающих диссипативную эволюцию поступательно-вращательного движения системы.

В соответствии с рассматриваемой моделью, жесткость планет предполагается большой, и вводятся безразмерные малые параметры ε_i $(i = 1, 2)$, обратно пропорциональные модулям Юнга планет. При $\varepsilon_i = 0$ уравнения движения системы интегрируются и описывают движение двух абсолютно твердых шаров в поле сил взаимного притяжения, когда конец вектора $\mathbf{R}$ описывает кеплеровскую орбиту, а угловые скорости планет постоянны. Это невозмущенное движение используется в качестве порождающего для определения векторов упругого смещения $\mathbf{u}_i$ в первом приближении по малым параметрам.

В результате подстановки найденных решений $\mathbf{u}_i$ в правые части канонических уравнений для "медленных" переменных I_1, I_2, G, L, g и усреднения их по "быстрой" угловой переменной l, получена следующая эволюционная система уравнений:

$$\dot{I}_i = \frac{\Delta_i}{G^{12}} \left\{ nF_2(e) - \omega_i \frac{G^3}{L^3} F_1(e) \right\} (i = 1,\, 2)\,, \tag{1a}$$

$$\dot{L} = -\sum_{i=1}^{2} \frac{\Delta_i}{G^{12}} \left\{ nF_3(e) \frac{L^3}{G^3} - \omega_i F_2(e) \right\} \tag{1b}$$

$$\dot{G} = -\sum_{i=1}^{2} \frac{\Delta_i}{G^{12}} \left\{ nF_2(e) - \omega_i \frac{G^3}{L^3} F_1(e) \right\} \tag{1c}$$

$$\dot{g} = \sum_{i=1}^{2} \frac{3\rho_i^2 \gamma_i \varepsilon_i D_{2i} f^3 m_1^6 m_2^6}{G^7 (m_1+m_2)^3} \frac{G^3}{L^3} \left[\omega_i^2 + \right.$$
$$\left. + \frac{15\gamma_i f^3 m_1^6 m_2^6}{G^6 (m_1+m_2)^6} \left(1 + \frac{3}{2} e^2 + \frac{1}{8} e^4 \right) \right] \tag{1d}$$

где r_{i0}- радиус i-ой планеты в естественном недеформированном состоянии, $\omega_i = \dfrac{I_i}{A_i}$ - ее угловая скорость, A_i - центральный момент инерции $(i = 1, 2)$, $e = \sqrt{1 - \dfrac{G^2}{L^2}}$ - эксцентриситет орбиты конца вектора $\mathbf{R}$, $n = \dfrac{f^2 m_1^3 m_2^3}{(m_1+m_2)L^3}$ - его среднее орбитальное движение, $\gamma_1 = f m_2$, $\gamma_2 = f m_1$,

$$\Delta_i = 18 \frac{\rho_i^2 \gamma_i^2 f^6 m_1^{12} m_2^{12} D_{2i} \varepsilon_i \chi_i}{(m_1+m_2)^6},\ D_{2i} = \frac{4\pi(1+\nu_i)(13+9\nu_i) r_{i0}^7}{105(5\nu_i+7)},$$

$$F_1(e) = 1 + 3e^2 + \frac{3}{8} e^4,\ F_2(e) = 1 + \frac{15}{2} e^2 + \frac{45}{8} e^4 + \frac{5}{16} e^6,$$

$$F_3(e) = 1 + \frac{31}{2} e^2 + \frac{255}{8} e^4 + \frac{185}{16} e^6 + \frac{25}{64} e^8.$$

Уравнения (1a)-(1c) образуют замкнутую систему обыкновенных дифференциальных уравнений относительно функций I_1, I_2, L, G, имеющую первый интеграл, выражающий закон сохранения модуля момента количества движения системы относительно общего центра масс,

$$G + I_1 + I_2 = G_0. \tag{2}$$

Уравнение (1d) интегрируется после нахождения функций I_1, I_2, L и G.

Стационарные решения полученных уравнений найдены в п. 1.3. Показано, что в стационарном движении система двух планет движется как твердое тело, то есть планеты обращены друг к другу одной стороной, а их центры масс равномерно движутся по круговым орбитам.

В зависимости от значения первого интеграла (2) система может иметь не более двух стационарных решений.

При $G_0 > \frac{4}{3}\sqrt[4]{3k}$, где $k = \dfrac{A_1 + A_2}{m_1 + m_2} f^2 m_1^3 m_2^3$, система имеет два стационарных решения, одно из которых, соответствующее большему расстоянию между центрами масс планет, асимптотически устойчиво, а второе неустойчиво.

Если $G_0 = \frac{4}{3}\sqrt[4]{3k}$, то система имеет ровно одно неустойчивое стационарное движение.

В случае $G_0 < \frac{4}{3}\sqrt[4]{3k}$ стационарных движений нет.

Этот результат соответствует полученному ранее в монографии Вильке В.Г. (1997).

Полученные результаты иллюстрируются на примере Солнечной системы в п. 1.4, где в качестве первого тела рассматривается Солнце, а в качестве второго - одна из планет. Показано, что для всех планет Солнечной системы выполнено условие существования двух стационарных решений. Вычислены радиусы стационарных орбит и проведено сравнение полученных результатов с текущими значениями больших полуосей орбит планет. Показано, что планеты земной группы (Меркурий, Венера, Земля, Марс) находятся ближе к неустойчивым стационарным орбитам, а орбиты планет-гигантов (Юпитера, Сатурна, Урана, Нептуна) близки к соответствующим устойчивым стационарным орбитам.

Уравнение (1d), описывающее эволюцию медленной угловой переменной g, рассматривается отдельно в п. 1.5 на примере системы Солнце-Меркурий.

Правую часть уравнения (1d) можно представить в следующем виде:

$$\dot{g} = g_1 + g_2 + q_1 + q_2, \tag{3}$$

где $q_i = \dfrac{27 f^{1/2} m_1 m_2 r_{i0} h(\nu_i) \varepsilon_i}{28\pi a^{7/2}(1-e^2)^5 (m_1+m_2)^{1/2}} n^2 \left(1 + \frac{3}{2}e^2 + \frac{1}{8}e^4\right)$,

$$g_i = \frac{9(m_1+m_2)^{1/2} f^{1/2} m_i r_{i0} h(\nu_i)\varepsilon_i}{140\pi a^{7/2}(1-e^2)^2}\omega_i^2 \quad (i=1,2),$$

$h(\nu) = \dfrac{(1+\nu)(13+9\nu)}{(5\nu+7)}$, $a = \dfrac{G^2(m_1+m_2)}{f m_1^2 m_2^2}$ - большая полуось орбиты.

Следует отметить, что существенным отличием между аналогичным уравнением, полученным в диссертации Шатиной А.В. (2007), где изучалось движение планеты в центральном поле сил, и уравнением (3), описывающим изменение долготы перигелия орбиты планеты, движущейся в гравитационном поле массивного вязкоупругого тела, является наличие в его правой части слагаемого g_1, зависящего от массы, радиуса и угловой скорости этого тела, причем в случае системы Солнце-Меркурий именно оно вносит основной вклад в эволюцию перигелия, так как $\left|\dfrac{g_2}{g_1}\right| \ll 1$, $\left|\dfrac{q_1}{g_1}\right| \ll 1$ и $\left|\dfrac{q_2}{g_1}\right| \ll 1$.

Приближенно можно считать, что

$$\dot{g} \approx \frac{9\sqrt{f\,(m_1+m_2)}h\,(\nu_1)\,m_1 r_{10}}{140\pi E_1 a^{7/2}\,(1-e^2)^2}\omega_1^2. \tag{4}$$

Согласно данным наблюдений, смещение перигелия Меркурия составляет $570''/100$лет (Роузвер Н.Т. (1985)).

На основании формулы (4) были вычислены значения модуля Юнга вязкоупругого тела, моделирующего Солнце, для разных значений коэффициента Пуассона

Таким образом, соответствующим выбором модуля Юнга E_1 в рамках данной постановки задачи можно добиться совпадения теоретического значения наблюдаемого смещения перигелия Меркурия с наблюдаемым.

Во **второй главе** исследуется движение двойной планеты, моделируемой двумя вязкоупругими шарами с массами m_2 и m_3, в гравитационном поле вязкоупругого тела массы m_1. Предполагается, что $m_2/m_1 \ll 1$, $m_3/m_2 \ll 1$, а расстояние между телами, составляющими двойную планету, много меньше расстояния от их барицентра до третьего тела. Эта глава является обобщением работы Вильке В.Г., Шатиной А.В. (2001), где движение двойной планеты осуществлялось по орбитам с нулевыми эксцентриситетами в гравитационном поле неподвижного притягивающего центра.

В п. 2.1 описывается "плоская" постановка задачи, когда центры масс планет движутся в неподвижной плоскости, а их угловые скорости ортогональны этой плоскости. Взаимное расположение планет описывается с помощью векторов $\mathbf{R}_1 = \overline{C_1C}$ и $\mathbf{R}_2 = \overline{C_2C_3}$, где C_i - центр масс i-ой планеты, C - барицентр двойной планеты. Получены уравнения движения системы в форме уравнений Рауса, состоящих из канонических уравнений относительно переменных Андуайе-Делоне I_1, I_2, I_3, L_1, L_2, G_1, G_2, φ_1, φ_2, φ_3, l_1, l_2, g_1, g_2, где переменные I_k, φ_k $(k = 1, 2, 3)$ описывают вращательное движение планет, а переменные G_j, g_j, L_j, l_j $(j = 1, 2)$ - орбитальное движение концов векторов $\mathbf{R}_1$, $\mathbf{R}_2$, и уравнения в форме вариационного принципа Д'Аламбера-Лагранжа для определения векторов упругого смещения.

В п. 2.2 методом разделения движений и усреднения осуществляется построение приближенной системы обыкновенных дифференциальных уравнений относительно переменных "действие", описывающих эволюцию поступательно-вращательного движения двойной планеты в гравитационном поле массивного вязкоупругого тела. В случае отсутствия деформаций "невозмущенные" уравнения интегрируются и описывают движение, когда концы векторов $\mathbf{R}_1$ и $\mathbf{R}_2$ движутся по кеплеровским орбитам, а планеты вращаются с постоянными угловыми скоростями. Это движение используется в качестве порождающего для определения вынужденных колебаний вязкоупругих шаров.

В результате подстановки найденных в первом приближении по малому параметру ε_i функций $\mathbf{u}_i(\mathbf{r}_i, t)$ $(i = 1, 2, 3)$ в правые части уравнений относительно переменных "действие" и усреднения этих уравнений по быстрым угловым переменным l_1 и l_2 (рассматривается нерезонансный случай), получена следующая система обыкновенных дифференциальных уравнений седьмого порядка:

$$\dot{I}_1 = -\frac{\Delta_{11}}{G_1^{12}}\left\{\omega_1\frac{G_1^3}{L_1^3}F_1(e_1) - n_1F_2(e_1)\right\}, \tag{5a}$$

$$\dot{I}_j = -\sum_{i=1}^{2}\frac{\Delta_{ij}}{G_i^{12}}\left\{\omega_j\frac{G_i^3}{L_i^3}F_1(e_i) - n_iF_2(e_i)\right\}\ (j=2,3), \tag{5b}$$

$$\dot{L}_1 = \sum_{i=1}^{3}\frac{\Delta_{1i}}{G_1^{12}}\left\{\omega_iF_2(e_1) - n_1\frac{L_1^3}{G_1^3}F_3(e_1)\right\}, \tag{5c}$$

$$\dot{L}_2 = \sum_{i=2}^{3}\frac{\Delta_{2i}}{G_2^{12}}\left\{\omega_iF_2(e_2) - n_2\frac{L_2^3}{G_2^3}F_3(e_2)\right\}, \tag{5d}$$

$$\dot{G}_1 = \sum_{i=1}^{3}\frac{\Delta_{1i}}{G_1^{12}}\left\{\omega_i\frac{G_1^3}{L_1^3}F_1(e_1) - n_1F_2(e_1)\right\}, \tag{5e}$$

$$\dot{G}_2 = \sum_{i=2}^{3}\frac{\Delta_{2i}}{G_2^{12}}\left\{\omega_i\frac{G_2^3}{L_2^3}F_1(e_2) - n_2F_2(e_2)\right\}, \tag{5f}$$

где $\Delta_{11} = \dfrac{18\rho_1^2f^8m_1^{12}(m_2+m_3)^{14}D_{21}\varepsilon_1\chi_1}{M^6}$,

$$\Delta_{1j} = \frac{18\rho_j^2f^8m_1^{14}(m_2+m_3)^{12}D_{2j}\varepsilon_j\chi_j}{M^6},$$

$$\Delta_{2j} = \frac{18\rho_j^2f^8m_j^{12}m_k^{14}D_{2j}\varepsilon_j\chi_j}{(m_2+m_3)^6}\ (j,k=2,3,j\neq k),$$

функции $F_1(e)$, $F_2(e)$, $F_3(e)$ и выражение D_{2i} определены выше, f -универсальная гравитационная постоянная, $M = m_1+m_2+m_3$, ρ_i - плотность i-ой планеты, r_{i0}- ее радиус в естественном недеформированном состоянии, $\omega_i = \dfrac{I_i}{A_i}$ - угловая скорость i-ой планеты, A_i - ее центральный момент инерции $(i=1,2,3)$, $e_j = \sqrt{1-\dfrac{G_j^2}{L_j^2}}$ - эксцентриситет орбиты конца вектора $\mathbf{R}_j$ $(j=1,2)$, $n_1 = \dfrac{f^2m_1^3(m_2+m_3)^3}{ML_1^3}$, $n_2 = \dfrac{f^2m_2^3m_3^3}{(m_2+m_3)L_2^3}$ - соответствующие средние орбитальные движения.

Система уравнений (5) имеет первый интеграл, выражающий закон сохранения модуля кинетического момента системы относительно общего центра масс:

$$I_1 + I_2 + I_3 + G_1 + G_2 = \widetilde{G}_0.$$

В п. 2.3 для случая, когда планета массы m_3 моделируется материальной точкой ($\Delta_{13} = \Delta_{23} = 0$), проведено исследование стационарных решений соответствующей системы уравнений. Показано, что в зависимости от начальных условий система может иметь одно или два стационарных решения, оба из которых неустойчивы, либо не иметь стационарных решений. В стационарном движении все три планеты расположены на одной прямой и равномерно вращаются вокруг общего центра масс как твердое тело.

В п. 2.4 осуществлен переход от уравнений (5) относительно переменных Андуайе-Делоне к уравнениям относительно переменных ω_i $(i = 1, 2, 3)$, n_j, e_j $(j = 1, 2)$. В рамках изучаемой постановки задачи рассмотрен пример системы "Солнце-Земля-Луна". На основе данных наблюдений определены числовые значения параметров системы - эквивалентных коэффициентов вязкости планет. С помощью системы Matlab7.0.1 получены графики, отображающие картину эволюции системы в будущем.

В настоящее время Луна удаляется от Земли. Согласно полученным численным результатам, наибольшее расстояние, на которое она удалится, составит 512,4 тыс. км, что в 1,3 раза больше текущего значения большой полуоси ее орбиты. Одновременно с этим период обращения Земли вокруг оси сравняется с периодом обращения Луны вокруг Земли и составит 42,2 суток. Эти значения близки к полученным в работе Вильке В.Г., Шатиной А.В. (2001). Далее угловая скорость Земли продолжит убывать, а среднее орбитальное движение Луны - возрастать, и стационарного движения система не достигнет. Эксцентриситет лунной орбиты будет возрастать до максимального значения, равного 0,1112, а затем начнет убывать.

Описанная картина эволюции лунной орбиты сходна с той, что была получена Г. Макдональдом (1964) при рассмотрении движения Луны по эксцентрической орбите без учета влияния Солнца.

В **главе 3** исследуется поступательно-вращательное движение трех планет, моделируемых однородными изотропными вязкоупругими шарами масс m_1, m_2 и m_3 в поле сил взаимного притяжения в общей постановке задачи.

В п. 3.1 на основе вариационного принципа Д'Аламбера-Лагранжа выводятся точные уравнения движения системы.

В п. 3.2 методом разделения движений получена система приближенных уравнений движения трех вязкоупругих шаров с учетом возмущений, вызванных упругостью и диссипацией.

В случае, когда планеты моделируются абсолютно твердыми шарами, система имеет стационарные движения, в которых центры масс планет образуют равносторонний треугольник, и система равномерно вращается относительно общего центра масс с угловой скоростью, направленной вдоль постоянного вектора кинетического момента (лагранжевы треугольные точки либрации).

В п. 3.3 найден аналог треугольных точек либрации для системы трех вязкоупругих тел. В этом движении диссипация энергии отсутствует, планеты движутся как одно тело с постоянной угловой скоростью $\mathbf{\Omega}$, при этом их центры масс находятся в неподвижной плоскости, ортогональной вектору угловой скорости, образуя треугольник общего положения. Стороны этого треугольника R_{12}, R_{13} и R_{23} в первом приближении по малым параметрам ε_i $(i = 1, 2, 3)$ определяются следующими формулами:

$$
\begin{aligned}
&R_{ij} = R + \frac{f}{R^4} R_{ij}^{(1)},\\
&R_{12}^{(1)} = \Delta_1 \frac{4m_1 + 28m_2 - 5m_3}{12m_1} + \Delta_2 \frac{28m_1 + 4m_2 - 5m_3}{12m_2} + \Delta_3,\\
&R_{13}^{(1)} = \Delta_1 \frac{4m_1 + 28m_3 - 5m_1}{12m_1} + \Delta_2 + \Delta_3 \frac{28m_1 + 4m_3 - 5m_2}{12m_3},\\
&R_{23}^{(1)} = \Delta_1 + \Delta_2 \frac{4m_2 + 28m_3 - 5m_1}{12m_2} + \Delta_3 \frac{28m_2 + 4m_3 - 5m_1}{12m_3},
\end{aligned}
$$

где f - универсальная гравитационная постоянная, $R = \sqrt[3]{fM\Omega^{-2}}$, $M = m_1 + m_2 + m_3$, $\Delta_i = \dfrac{4\pi\varepsilon_i\rho_i^2(1+\nu_i)(13+9\nu_i)}{105(5\nu_i+7)}r_{i0}^7$, r_{i0} - радиус i-ой планеты в недеформированном состоянии, ρ_i - ее плотность $(i = 1, 2, 3)$.

В **заключении** сформулированы основные результаты диссертации.

Публикации по теме диссертации

1. *Вильке В.Г., Шатина А.В., Шатина Л.С.* Движение трех вязкоупругих планет в поле сил взаимного притяжения // Космические исследования, 2009, т.47, №5, с. 471-476.

2. *Вильке В.Г., Шатина А.В., Шатина Л.С.* Эволюция движения двух вязкоупругих планет в поле сил взаимного притяжения // Космические исследования, 2011, т.49, №4, с. 355-362.

3. *Шатина Л.С.* Эволюция движения двойной планеты в гравитационном поле массивного вязкоупругого тела // Вестник МГУ, сер.1, математика-механика, 2011, №6, с.32-37.

4. *Шатина Л.С.* Эволюция движения связки двух вязкоупругих планет в гравитационном поле массивной вязкоупругой планеты // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского, 2011, №4, часть 2, с. 361-363.