Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова

На правах рукописи
УДК 514.765, 512

Петухов Алексей Владимирович

Геометрический подход к $(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$-модулям конечного типа

01.01.06 — математическая логика, алгебра и теория чисел

Автореферат

диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Москва 2012

Работа выполнена на кафедре высшей алгебры Механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова.

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук, профессор Михалёв Александр Васильевич
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, профессор кафедры Вычислительной математики Национального исследовательского университета московского энергетического института профессор Туганбаев Аскар Аканович
	кандидат физико-математических наук научный сотрудник Научно исследовательского института системных исследований РАН Жгун Владимир Сергеевич
Ведущая организация:	Московский педагогический государственный университет Адрес: Россия, 119991 Москва, ул. Малая Пироговская, д.1, стр. 1.

Защита диссертации состоится 25 мая 2012 г. в 16 ч. 45 м. на заседании диссертационного совета Д 501.001.84 при Московском государственном университете имени М. В. Ломоносова по адресу: Российская Федерация, 119991, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д. 1, МГУ, механико-математический факультет, аудитория 14-08.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке механико-математического факультета МГУ (Главное здание, 14 этаж)

Автореферат разослан 25 апреля 2012 года.

Учёный секретарь
диссертационного совета
Д 501.001.84 при МГУ
доктор физико-математических наук,
профессор

А. О. Иванов

Общая характеристика работы

Актуальность темы

Диссертация посвящена исследованию некоторых категорий бесконечномерных модулей конечномерных полупростых алгебр Ли, свойств этих категорий через геометрические инварианты их объектов, а так же их связей с категорией голономных D-модулей.

Пусть $\mathfrak{g}$ — редуктивная алгебра Ли над полем $\mathbb{C}$, а $\mathfrak{k} \subset \mathfrak{g}$ — редуктивная в $\mathfrak{g}$ подалгебра. Обозначим через $\mathrm{U}(\mathfrak{k})$ — универсальную обёртывающую алгебру $\mathfrak{k}$, через G — присоединённую группу алгебры $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$, через K связную редуктивную подгруппу группы G с алгеброй Ли $\mathfrak{k} \cap [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$, и, наконец, через B — борелевскую подгруппу группы K, т.е. максимальную связную разрешимую подгруппу. Все рассматриваемые многообразия алгебраичны над $\mathbb{C}$. Все рассматриваемые алгебры Ли конечномерны.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.Мы называем $(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$-*модулем* $\mathfrak{g}$-модуль с *локально конечномерным* действием $\mathfrak{k}$, т.е. таким, что $\dim\,(\mathrm{U}(\mathfrak{k})m) < \infty$ для всякого $m \in M$, где $\mathrm{U}(\mathfrak{k})m := \{m' \in M \mid m' = um$ для каких-то $u \in \mathrm{U}(\mathfrak{k})$ и $m \in M\}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.Пусть M — *локально конечномерный* $\mathfrak{k}$-модуль (то есть $(\mathfrak{k}, \mathfrak{k})$-модуль). Мы будем говорить, что M *конечного типа над* $\mathfrak{k}$, если все $\mathfrak{k}$-изотипные компоненты M конечномерны. Мы будем говорить, что $(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$-модуль *имеет конечный тип*, если M есть $\mathfrak{k}$-модуль конечного типа.

Есть две известные категории $(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$-модулей: категория модулей Хариш-Чандры и категория $\mathcal{O}$. В первом случае $\mathfrak{k}$ — симметрическая подалгебра алгебры $\mathfrak{g}$ (то есть $\mathfrak{k}$ является множеством неподвижных точек некоторой инволюции $\mathfrak{g}$), а во втором случае $\mathfrak{k}$ — Картановская подалгебра $\mathfrak{h}_{\mathfrak{g}}$ алгебры $\mathfrak{g}$. Для обеих типов пар $(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$ конечнопорождённые $(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$-модули являются модулями конечного типа и имеют конечную длину. Известно, что категории этих модулей эквивалентны категории превратных пучков на многообразии флагов (смотри [1], [2] и [3]). В свою очередь эти категории эквивалентны категориям представлений некоторых конечномерных алгебр, допускающих явное описание [4].

И. Пенков, В. Серганова и Г. Цукерман определили и попытались клас-

[1] Beilinson A., Bernstein J., *Localisation de $\mathfrak{g}$-modules*, C.R.Acad. Sci. Paris **292**(1981), 15–18.

[2] Beilinson A., *Localization of representations of reductive Lie algebras*, Proc. of the IMC (Warsaw, 1983), PWN, Warsaw, 1984, 699–710.

[3] Касивара М., Шапира П., *Пучки на многообразиях*, Москва, Мир, 1997.

[4] Sörgel W., *Kategorie $\mathcal{O}$, perverse Garben und Moduln über den Koinvarianten zur Weylgruppe*, J. Amer. Math. Soc. **3:2**(1990), 421–445.

сифицировать простые $(\mathfrak{g},\mathfrak{k})$-модули конечного типа для произвольных редуктивных пар алгебр Ли $(\mathfrak{g},\mathfrak{k})$ [5], [6] (смотри также [7]).

Конечнопорождённому $\mathrm{U}(\mathfrak{g})$-модулю — объекту некоммутативной алгебры, можно сопоставить градуированный $\mathrm{S}(\mathfrak{g})$-модуль $\mathrm{gr}M$ — объект алгебры коммутативной, и, как следствие, алгебраической геометрии. Носитель пучка на $\mathfrak{g}^*$, соответствующего $\mathrm{gr}M$, называется *ассоциированным многообразием $\mathfrak{g}$-модуля M*; обозначается $\mathrm{V}(M)$. Оказывается, что $(\mathfrak{g},\mathfrak{k})$-модуль M является $(\mathfrak{g},\mathfrak{k})$-модулем конечного типа если и только если $\mathrm{V}(M)$ имеет единственную замкнутую K-орбиту.

Отметим, что простые объекты категории $\mathcal{O}$ и все простые модули Хариш-Чандры допускают полное описание в терминах ассоциированных многообразий [8]. Благодаря этому получена как полная «геометрическая» классификация модулей Хариш-Чандры, так и явное описание их в терминах превратных пучков.

Пусть M — это $(\mathfrak{g},\mathfrak{k})$-модуль конечного типа, а V — простой $\mathfrak{k}$-модуль. Мы обозначим через $[M:V]_{\mathfrak{k}}$ максимум по всем конечномерным $\mathfrak{k}$-подмодулям $M'\subset M$ кратностей Жордана-Гёльдера $[M':V]_{\mathfrak{k}}$. Через $[M:\cdot]_{\mathfrak{k}}$ обозначим соответствующую функцию из множества $\mathfrak{k}$-модулей в $\mathbb{Z}_{\geqslant 0}$. Эта функция по определению есть $\mathfrak{k}$-характер модуля M.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. *Ограниченным $(\mathfrak{g},\mathfrak{k})$-модулем M* называется $(\mathfrak{g},\mathfrak{k})$-модуль, *ограниченный* как $\mathfrak{k}$-модуль, т.е. модуль M для которого функция $[M:\cdot]_{\mathfrak{k}}$ равномерно ограничена какой-то константой C_M.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. *Модулем простого спектра* называется $(\mathfrak{g},\mathfrak{k})$-модуль M, *$\mathfrak{k}$-спектр которого прост*, т.е. $\mathfrak{k}$-модуль M, для которого функция $[M:\cdot]_{\mathfrak{k}}$ ограничена 1.

В классификации $(\mathfrak{g},\mathfrak{h}_{\mathfrak{g}})$-модулей конечного типа ограниченные модули играют ведущую роль. Отталкиваясь от этого, и от опыта работы с модулями Хариш-Чандры, И. Пенков и В. Серганова определили понятие ограниченного модуля для произвольной пары $(\mathfrak{g},\mathfrak{k})$. Один из вопросов, возникающих в этом контексте, описать, для данной алгебры $\mathfrak{g}$, все редуктивные ограниченные подалгебры $\mathfrak{k}\subset\mathfrak{g}$, то есть редуктивные подалгебры $\mathfrak{k}$, допускающие простой ограниченный бесконечномерный $(\mathfrak{g},\mathfrak{k})$-модуль. В [9] авто-

[5] Penkov I., Serganova V., Zuckerman G., *On the existence of $(\mathfrak{g},\mathfrak{k})$-modules of finite type*, Duke Math. J. **125**(2004), 329–349.

[6] Ivan Penkov, Gregg Zuckerman, *Generalized Harish-Chandra modules with generic minimal $\mathfrak{k}$-type*, Asian J. Math. **8**(2004), 795–812.

[7] Milev T., *Root Fernando-Kac subalgebras of finite type*, to appear in J. of Alg., arXiv:1009.5260.

[8] Beilinson A., Bernstein J., *Localisation de $\mathfrak{g}$-modules*, C.R.Acad. Sci. Paris **292**(1981), 15–18.

[9] Penkov I., Serganova V., *Bounded generalized Harish-Chandra modules*, to appear in Ann. de l'Inst.

ры частично ответили на этот вопрос, доказав неравенство, существенно уменьшающее число интересных подалгебр $\mathfrak{k}$. Они также привели полный список ограниченных редуктивных подалгебр $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n$, которые максимальны как подалгебры.

Напомним, что B — борелевская подгруппа в K.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Многообразие X, снабжённое действием K, называется *сферическим*, если существует открытая орбита для действия B на X.

В качестве примеров сферических однородных пространств приведём (алгебраические) симметрические пространства, т.е. однородные пространства G/K, где K — симметрическая подгруппа группы G, и (обобщённые) многообразия флагов G/P, где P — параболическая подгруппа группы G, т.е. подгруппа, содержащая некоторую борелевскую подгруппу группы G. Описание B-орбит на G/K является отправной точкой «геометрической» классификации модулей Хариш-Чандры.

Теория сферических многообразий является одним из наиболее разработанных разделов теории алгебраических групп преобразований. Сферические однородные пространства интенсивно изучались многими авторами с различных точек зрения начиная с конца 70-х гг. XX века и продолжают активно изучаться в настоящее время. Обзор различных направлений исследования сферических однородных пространств, а также достигнутых по этим направлениям результатов можно найти в монографиях Д. А. Тимашёва[10] и Э. Б. Винберга [11]. Важную роль в данной диссертации играют результаты Э. Б. Винберга, Б. Н. Кимельфельда [12], И. В. Лосева, Ч. Бенсона и Г. Ратклифа, В. Г. Каца и Д. И. Панюшева, касающиеся сферических многообразий. Отметим отдельно М. Бриона, Д. Луну, Т. Вюста, Ф. Кнопа, М. Крамера и С. Кюпит-Футу, Р. С. Авдеева, внёсших свой вклад в эту теорию.

Пусть X — квазиаффинное K-многообразие. Как показали Э. Б. Винберг и Б. Н. Кимельфельд, многообразие X является K-сферическим если и только если алгебра регулярных функций $\mathbb{C}[X]$ на X является ограниченным $(\mathfrak{k}, \mathfrak{k})$-модулем. Откуда $(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$-модуль M является ограниченным

Fourier

[10]Timashev D., *Homogeneous spaces and equivariant embeddings*, Encyclopaedia of Mathematical Sciences, **138**, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2011.

[11]Э. Б. Винберг, Коммутативные однородные пространства и коизотропные симплектические действия, УМН **56**(2001), 1–60.

[12]Винберг Э. Б., Кимельфельд Б. Н., *Однородные области на флаговых многообразиях и сферические подгруппы полупростых групп Ли*, Функц. анализ и его прил., **12:3**(1978), 12–19.

если и только если его ассоциированное многообразие $\mathrm{V}(M)$ является K-сферическим.

Цель работы

Целью диссертации является решение следующих задач:

1. Классификация пар $(\mathfrak{sl}_n, \mathfrak{k})$, допускающих простой бесконечномерный $(\mathfrak{sl}_n, \mathfrak{k})$-модуль.
2. Описание аннуляторов ограниченных $(\mathfrak{sl}_n, \mathfrak{k})$-модулей и, в связи с этим, классификация K-сферических компактных SL_n-однородных пространств (многообразий флагов).
3. Описание категорий ограниченных $(\mathfrak{sp}_{n(n\pm1)}, \mathfrak{gl}_n)$-модулей.

Научная новизна

Результаты диссертации являются новыми, получены автором самостоятельно и заключаются в следующем:

1. Доказано, что пара $(\mathfrak{sl}_n, \mathfrak{k})$ допускает простой бесконечномерный ограниченный $(\mathfrak{sl}_n, \mathfrak{k})$-модуль если и только если K действует сферично на проективизации соответствующего n-го векторного пространства. Так как классификация таких действий известна, в диссертации получена полная классификация пар $(\mathfrak{sl}_n, \mathfrak{k})$, допускающих простой бесконечномерный ограниченный модуль.
2. Доказано, что $(\mathfrak{sl}_n, \mathfrak{k})$-модуль конечного типа ограничен если и только ассоциированное многообразие его аннулятора K-коизотропно. Ассоциированное многообразие аннулятора простого $\mathfrak{sl}_n$-модуля K-коизотропно если и только если K-сферично соответствующее компактное SL_n-однородное пространство (многообразие флагов). Получена классификация K-сферических многообразий флагов.
3. Доказано, что для $n \geqslant 5$ категории $(\mathfrak{sp}_{n(n\pm1)}, \mathfrak{gl}_n)$–модулей изоморфны прямой сумме счётного числа категорий, каждая из которых эквивалентна категории превратных пучков на $\mathbb{F}^{\frac{n(n\pm1)}{2}}$, гладких вдоль орбит действия группы GL_n (каждая такая категория эквивалентна категории представлений некоторого явно заданного колчана с соотношениями).

Основные методы исследования

В диссертации используются методы алгебраической геометрии, теории представлений, теории алгебраических групп и теории инвариантов.

Теоретическая и практическая ценность работы

Полученные в диссертации результаты имеют теоретическое значение. Они могут найти применение в теории представлений, эквивариантной симплектической геометрии, теории алгебраических групп преобразований и теории инвариантов.

Апробация работы

Результаты диссертации докладывались:

- На семинаре «Алгебраические группы и теория инвариантов» механико-математического факультета МГУ (руководители - Э. Б. Винберг, Д. А. Тимашёв и И. В. Аржанцев), 17 февраля 2010 г. и 20 апреля 2011 г.
- На общем семинаре кафедры алгебры МГУ, 31 октября 2011 г.
- На пятом семинаре «Transformation groups and mathematical physics» (организаторы - Joachim Hilgert, Alan Huckleberry, Peter Littelmann, Karl-Hermann Neeb, Ivan Penkov, Christoph Schweigert), г. Гамбург, 28 мая 2010 г.
- На семинаре группы «Arbeitsgruppe Algebra und Zahlentheorie» университета г. Кёльн (руководитель - P. Littelmann), 1 июня 2010 г.
- На рабочей встрече «Representation theory and quantization», Fields Institute (организаторы - И. Димитров, Hadi Salmasian), г. Торонто, 25-27 февраля 2011 г.

Публикации

Основные результаты диссертации опубликованы в четырёх работах автора. Список работ приводится в конце автореферата [1–4].

Структура и объём диссертации

Диссертация состоит из 10 параграфов (первые три из них — вводные) и списка литературы. Параграфы разбиты на пункты, пункты — на подпункты. Список литературы включает в себя 65 наименований. Общий объём диссертации составляет 70 страниц.

1. Краткое содержание работы

Первый параграф фиксирует обозначения, используемые далее в работе.

В **параграфе два** даны основные определения и приведены основные результаты работы, а также обсуждается история вопроса и место полученных результатов в теории представлений.

В третьем параграфе приведён беглый обзор необходимых теоретических концепций. Мы приведём здесь определения и концепции, важные для понимания некоторых параграфов диссертации.

Назовём связную подгруппу $K \subset \mathrm{GL}(W)$ *насыщенной*, если она является максимальной связной подгруппой с заданной полупростой частью K'; связная подгруппа насыщена тогда и только тогда, когда она совпадает с компонентой связности единицы своего нормализатора в $\mathrm{GL}(V)$. Мы называем многообразие цепочек подпространств $V_1 \subset ... \subset V_s \subset V$ с фиксированным вектором размерностей $(n_1, ..., n_s)$ *пространством V-флагов* и обозначаем его $\mathrm{Fl}(n_1, ..., n_s; V)$.

Пусть V — конечномерный K-модуль. Положим

$$\mathrm{N}_K(V) := \{v \in V \mid 0 \in \overline{KV}\}.$$

В этом же параграфе мы выдвигаем следующую гипотезу.

ГИПОТЕЗА 1. *Простой $(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$-модуль M ограничен тогда и только тогда, когда K-коизотропно многообразие* $\mathrm{GV}(M)$.

Это утверждение связано с [13] и с последними исследованиями Д. А. Тимашёва и В. С. Жгуна.

Четвёртый параграф посвящена построению списка возможных ассоциированных многообразий $(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$-модулей конечного типа. Первым шагом к списку является следующая теорема, сформулированная во втором параграфе.

[13] Panyushev D., On the conormal bundles of a G-stable subvariety, Man. Math. **99**(1999), Question, p. 191.

ТЕОРЕМА 1. *Пусть* $\mathcal{Z} \subset \mathfrak{g}^*$ *— нильпотентная* G*-орбита,* $\mathfrak{k}^{\perp}$ *— аннулятор* $\mathfrak{k}$ *в* $\mathfrak{g}^*$*,* $\mathrm{N}_K(\mathfrak{g}^*)$ *— это* K*-нульконус в* $\mathfrak{g}^*$*. Тогда все неприводимые компоненты* $\mathcal{Z} \cap \mathfrak{k}^{\perp} \cap \mathrm{N}_K(\mathfrak{g}^*)$ *изотропны в* $\mathcal{Z}$*.*

Доказательство этой теоремы опирается на критерий Гильберта-Мамфорда и утверждение о том, что подмногообразие изотропного многообразия — изотропно [14].

По определению $\mathrm{V}^{\cdot}_{\mathfrak{g},\mathfrak{k}}$ — множество неприводимых компонент всевозможных пересечений $\mathrm{N}_K(\mathfrak{k}^{\perp})$ с G-орбитами в $\mathrm{N}_G(\mathfrak{g}^*)$. Объединение множеств $\mathrm{V}^{\cdot}_{\mathfrak{g},\mathfrak{k}}$ по всевозможным парам редуктивных алгебр Ли $(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$ и даёт искомый список ассоциированных многообразий модулей конечного типа, что и есть утверждение следующей теоремы.

ТЕОРЕМА 2. *Пусть* M *— простой* $(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$*-модуль конечного типа. Тогда всякая неприводимая компонента многообразия* $\mathrm{V}(M)$ *принадлежит* $\mathrm{V}^{\cdot}_{\mathfrak{g},\mathfrak{k}}$*.*

Ключевую роль в доказательстве играет теорема 1 и тот факт, что ассоциированное многообразие всегда коизотропно (теорема Габбера).

Пятый параграф посвящён следующей теореме.

ТЕОРЕМА 3. *Простой бесконечномерный ограниченный* $(\mathfrak{sl}(V), \mathfrak{k})$*-модуль существует тогда и только тогда, когда* K*-сферично многообразие* $\mathbb{P}(V)$*.*

Первым шагом в доказательстве теоремы 3 является цепочка переформулировок свойства «ограниченность $(\mathfrak{sl}(V), \mathfrak{k})$-модуля», в конце которой стоит K-сферичность некоторого многообразия V-флагов. Вторым шагом к списку служит следующее предложение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Пусть* $\mathrm{Fl}(n_1, ..., n_s; V)$ *— это* K*-сферическое многообразие флагов. Тогда многообразие* $\mathbb{P}(V)$ *также* K*-сферично.*

Это предложение доказано в параграфе два и является простым следствием результата И. В. Лосева [15].

Из предложения 1, многообразие $\mathbb{P}(V)$ также K-сферично. Доказательство того, что если K-сферично многообразие $\mathbb{P}(V)$, то существует простой ограниченный бесконечномерный $(\mathfrak{sl}(V), \mathfrak{k})$-модуль приведено в [9]

В пятом параграфе мы докажем гипотезу 1 в некотором частном случае.

ТЕОРЕМА 4. *Простой* $(\mathfrak{sl}(W), \mathfrak{k})$*-модуль ограничен тогда и только тогда, когда* K*-коизотропно ассоциированное многообразие его аннуля-*

[14] Chriss N., Ginzburg V., *Representation theory and complex geometry*, Birkhäuser Boston, 1997.
[15] Losev I., Algebraic Hamiltonian actions, Math. Z. **263**(2009), 685–723.

тора.

В **параграфе шесть** получен полный список многообразий флагов Fl и насыщенных подгрупп $K \subset \mathrm{GL}(V)$, для которых Fl является K-сферическим многообразием. Отметим, что каждая связная редуктивная подгруппа $K \subset \mathrm{GL}(V)$ включается в единственную с точностью до сопряжения связную насыщенную подгруппу. Основной результат сформулирован в виде достаточно громоздкой таблицы. Основным средством является сравнение кокасательных расслоений многообразий флагов с помощью отображения моментов.

В **параграфе семь** вводится понятие идеала Джозефа алгебры $\mathrm{U}(\mathfrak{g})$ как идеала, фактор по которому обладает наименьшей возможной ненулевой размерностью Гельфанда-Кириллова. Проясняется связь этих идеалов с ограниченными весовыми модулями и их поведение под действием функторов трансляции. Следующий результат этого параграфа, принадлежащий А. Джозефу [16], необходим для понимания параграфа 9.

ТЕОРЕМА 5. *Пусть* $I_1, I_2 \subset \mathrm{U}(\mathfrak{sp}(W \oplus W^*))$ *— два идеала Джозефа. Тогда категории* $\mathfrak{sp}(W \oplus W^*)$*-модулей, аннулируемых идеалами* I_1 *и* I_2 *эквивалентны.*

Так же в параграфе 9 нам потребуется реализация фактора по идеалу Джозефа в дифференциальных операторах, приведённая ниже. Пусть $D := \mathbb{F}[x_1, ..., x_n, \partial_{x_1}, ..., \partial_{x_n}]$ — алгебра дифференциальных операторов от n переменных. Введём $\mathbb{Z}_2$-градуировку на D, присвоив вес 1 операторам $x_1, ..., x_n, \partial_{x_1}, ..., \partial_{x_n}$. Обозначим через D^0 нулевую компоненту этой $\mathbb{Z}_2$-градуировки D.

ЛЕММА 1. *Существует гомоморфизм* $\phi : \mathrm{U}(\mathfrak{sp}_{2n}) \to D$*, ядром которого является идеал Джозефа, а образом — алгебра* D^0.

В **параграфе восемь** вводится понятие $\mathfrak{g}$-модуля малого роста как модуля, с наименьшей возможной ненулевой размерностью Гельфанда-Кириллова. Доказано, что всякий такой модуль обладает конечной длиной и что всякий простой модуль малого роста аннулируется идеалом Джозефа. Доказано, что для $\mathfrak{sp}$-модулей малого роста неразложимый проективный функтор является эквивалентностью категорий. Доказано, что для $\mathfrak{sl}$-модулей малого роста неразложимый проективный функтор есть композиция эквивалентности категорий и функтора, возникающего из действия S_n на $(n-1)$-ом представлении.

[16] Joseph A., *Orbital varieties of the minimal orbit*, Ann. Sci. École Norm. Sup. **31**(1998), 17–45.

Параграф девять посвящён более детальному анализу ограниченных модулей четырёх пар $(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$:

a) $W = \mathrm{S}^2V (n_W = \frac{n_V(n_V+1)}{2})$	b) $W = \Lambda^2V (n_W = \frac{n_V(n_V-1)}{2})$
1a) $(\mathfrak{sl}(W), \mathfrak{sl}(V))$	1b) $(\mathfrak{sl}(W), \mathfrak{sl}(V))$
2a) $(\mathfrak{sp}(W \oplus W^*), \mathfrak{gl}(V))$	2b) $(\mathfrak{sp}(W \oplus W^*), \mathfrak{gl}(V))$

(1).

Для предложенных четырёх пар $(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$ всякий ограниченный модуль является модулем малого роста. Основным результатом параграфа является следующая теорема.

ТЕОРЕМА 6. *Пусть $I \subset \mathrm{U}(\mathfrak{sp}(W \oplus W^*))$ — идеал Джозефа. Тогда категория $(\mathfrak{sp}(W \oplus W^*), \mathfrak{gl}(V))$-модулей, аннулируемых I, эквивалентна категории превратных пучков на W, гладких вдоль всех $GL(V)$-орбит.*

Утверждение этой теоремы, с учётом результатов параграфов 8 и 9, сводится к утверждению о том, что категория D-модулей с локально конечномерным действием $\mathfrak{gl}(V)$ эквивалентна категории превратных пучков на W, гладких вдоль всех $\mathrm{GL}(V)$-орбит. Доказательство последнего утверждения повторяет схему доказательства основного результата работы [17].

Как показали Т. Брейден и М. Гринберг [18], категории превратных пучков на S^2V и Λ^2V, гладких вдоль всех $\mathrm{GL}(V)$-орбит, эквивалентны категории представлений некоммутативной алгебры, заданной через колчан с соотношениями. Простые объекты в этом описании соответствуют точкам колчана.

Как мы надеемся, приведённые в диссертации результаты позволят почувствовать как выглядит общая теория ограниченных модулей.

Благодарности

Автор благодарит своего учителя профессора Александра Васильевича Михалёва за постоянное внимание к работе. Я благодарю всех участников семинара Эрнеста Борисовича Винберга за незатухающий интерес ко всему, что связано с группам и алгебрами Ли, а также Ивана Пенкова за стимулирующие дискуссии.

[17]Beilinson A., Bernstein J., *Localisation de $\mathfrak{g}$-modules*, C.R.Acad. Sci. Paris **292**(1981), 15–18.

[18]Braden T., Grinberg M., *Perverse sheaves on rank stratifications*, Duke Math. J. **96**(1999), 317–362.

Публикации автора по теме диссертации

[1] Petukhov A. V., *Bounded reductive subalgebras of* $\mathfrak{sl}_n$, Transf. groups **16: 4** (2011), стр. 1173-1182.

[2] Петухов А. В., *Категории ограниченных* $(\mathfrak{sp}(\mathrm{S}^2V+\mathrm{S}^2V^*),\mathfrak{gl}(V))$*- и* $(\mathfrak{sp}(\Lambda^2V+\Lambda^2V^*),\mathfrak{gl}(V))$*-модулей*, Фунд. и прикл. Мат. **17:2** (2012), 183-199.

[3] Петухов А. В., *Сферические действия на многообразиях флагов*, депонирование ВИНИТИ №489-В2011, депонировано 14.11.11.