Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

На правах рукописи
УДК 512.74

Анисимов Артём Борисович

Стабильность диагональных действий и многообразия двойных смежных классов

01.01.06 — математическая логика, алгебра и теория чисел

Автореферат

диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Москва, 2012

Работа выполнена на кафедре высшей алгебры Механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова.

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук, доцент Аржанцев Иван Владимирович
Официальные оппоненты:	Онищик Аркадий Львович, доктор физико-математических наук, профессор кафедры алгебры и математической логики математического факультета Ярославского государственного университета,
	Жгун Владимир Сергеевич, кандидат физико-математических наук, научный сотрудник Научно-исследовательского института системных исследований РАН
Ведущая организация:	Самарский государственный университет

Защита диссертации состоится 25 мая 2012 г. в 16 ч. 45 м. на заседании диссертационного совета Д 501.001.84 при Московском государственном университете имени М. В. Ломоносова по адресу: Российская Федерация, 119991, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д. 1, МГУ, Механико-математический факультет, аудитория 14-08.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Механико-математического факультета МГУ (Главное здание, 14 этаж).

Автореферат разослан 25 апреля 2012 г.

Учёный секретарь
диссертационного совета
Д 501.001.84 при МГУ
доктор физико-математических наук,
профессор

А. О. Иванов

Общая характеристика работы

Актуальность темы

Диссертация посвящена решению ряда актуальных задач теории алгебраических групп преобразований. Исследуются задачи, связанные с построением факторов для действий алгебраических групп. Первая из них состоит в доказательстве того, что типичные орбиты диагонального действия полупростой группы на достаточно большом числе копий аффинного многообразия допускают параметризацию точками категорного фактора. Вторая часть диссертации посвящена задаче параметризации двойных смежных классов в алгебраических группах; здесь исследуются два вопроса — о возможности такой параметризации и о том, когда пространство параметров устроено наиболее просто, а именно, когда многообразие двойных смежных классов является аффинным пространством.

Одной из основных целей изучения инвариантов действия $\mathrm{G} : X$ является параметризация его орбит, или, выражаясь более точно, построение фактормногообразия для заданного действия алгебраической группы. Построение фактора как множества всех орбит с фактор-топологией не даёт решения этой задачи по той причине, что такой фактор зачастую не будет алгебраическим многообразием; этому препятствует, например, наличие незамкнутых орбит у действия $\mathrm{G} : X$.

Определение. Пусть G — аффинная алгебраическая группа и X — алгебраическое многообразие, снабжённое регулярным действием группы G. *Категорным фактором* для действия $\mathrm{G} : X$ называется регулярное, постоянное на G-орбитах отображение $\rho : X \to Y$ в алгебраическое многообразие Y, обладающее следующим универсальным свойством: всякий постоянный на G-орбитах морфизм $\varphi : X \to Z$ пропускается через ρ единственным способом, т. е. существует и единственен морфизм $\tilde{\varphi} : Y \to Z$, для которого коммутативна следующая диаграмма:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "\rho"'] & & Z. \\ & Y \arrow[ur, "\tilde{\varphi}"'] & \end{tikzcd}$$

Многообразие Y обозначается $X/\!/\,\mathrm{G}$. Иногда, допуская вольность речи, мы будем называть категорным фактором само многообразие $X/\!/\,\mathrm{G}$. Отметим, что универсальное свойство категорного фактора гарантирует его единственность и сюръективность отображения $\rho : X \to Y$. Хорошо известно, что всякое действие $\mathrm{G} : X$ редуктивной группы на аффинном алгебраическом многообразии обладает категорным фактором; им является отображение $\rho : X \to \operatorname{Spec} \Bbbk[X]^{\mathrm{G}}$, двойственное к вложению алгебр $\Bbbk[X]^{\mathrm{G}} \subset \Bbbk[X]$.

В случае, когда рассматривается действие $\mathrm{G} : X$ группы, не являющейся редуктивной, категорный фактор $X/\!/\,\mathrm{G}$ может не существовать. В работе[1] А. Бялиницкого-Бирули и в работе[2] И. В. Аржанцева, Ю. Хаузена и Д. Целика был предложен подход, позволяющий расширить класс действий, обладающих категорным фактором. Для этого оказывается необходимым расширить категорию, в которой рассматривается фактор, а именно, рассмотреть категорию конструктивных пространств, т. е. пространств с пучком функций, локально изоморфных конструктивным подмножествам в аффинных многообразиях. В диссертации мы покажем, что рассмотрение этой категории позволяет определить конструктивные пространства двойных смежных классов в ситуациях, где многообразие двойных смежных классов не существует.

Для действий редуктивных групп на аффинных многообразиях хорошо известно[3], что отображение факторизации $\pi : X \to X/\!/\,\mathrm{G}$ разделяет замкнутые орбиты, поэтому интерес представляют действия, для которых типичные орбиты замкнуты.

Определение. Действие алгебраической группы G на алгебраическом многообразии X называется *стабильным*, если орбиты точек общего положения (т. е. точек из некоторого плотного открытого подмножества) замкнуты в X.

Стабильность действия $\mathrm{G} : X$ в случае аффинного многообразия X связана со свойствами стабилизатора общего положения G_*. Во-первых, отметим,

[1] A. Bialynicki-Birula: Algebraic quotients. Invariant Theory and Algebraic Transformation Groups, II, in: Encyclopaedia Math. Sci., vol. 131, Springer-Verlag, Berlin, 2002.

[2] I. V. Arzhantsev, D. Celik, J. Hausen: Factorial algebraic group actions and categorical quotients. arXiv:0908.0443v2 [math.AG], 11 pages.

[3] Э. Б. Винберг, В. Л. Попов: Теория инвариантов (Алгебраическая геометрия – 4). Итоги науки и техники. Серия "Современные проблемы математики. Фундаментальные направления", 55. М.: ВИНИТИ, 1989.

что из теоремы Д. Луны и Р. Ричардсона[3] следует, что всякое стабильное действие обладает стабилизатором общего положения (с. о. п.). Далее, согласно критерию Мацусимы-Онищика[3], стабилизатор точки, имеющей замкнутую орбиту, редуктивен. Это означает, что с. о. п. для стабильного действия $\mathrm{G} : X$ является редуктивной подгруппой в G. Для определённого класса действий верно и обратное. А именно, критерий Попова[4] утверждает, что если многообразие X факториально и группа G полупроста, то редуктивность с. о. п. равносильна стабильности действия $\mathrm{G} : X$. Напомним, что многообразие X называется *факториальным*, если алгебра регулярных функций $\Bbbk[X]$ факториальна.

Оказывается, свойство стабильности действия $\mathrm{G} : X$ можно определить в чисто алгебраических терминах[5]. Рассмотрим разложение алгебры регулярных функций $\Bbbk[X] = \Bbbk[X]^{\mathrm{G}} \oplus \Bbbk[X]_{\mathrm{G}}$, где $\Bbbk[X]^{\mathrm{G}}$ — подалгебра G-инвариантных функций на X, а $\Bbbk[X]_{\mathrm{G}}$ — единственное G-инвариантное прямое дополнение к $\Bbbk[X]^{\mathrm{G}}$. Обозначим через $p : \Bbbk[X] \to \Bbbk[X]^{\mathrm{G}}$ оператор проекции вдоль $\Bbbk[X]_{\mathrm{G}}$. С помощью p мы можем определить на алгебре $\Bbbk[X]$ симметрическую билинейную форму, положив $(f, g) = p(fg)$. Невырожденность этой билинейной формы равносильна[5] стабильности действия $\mathrm{G} : X$ Из такого описания получаются удобные для проверки достаточные условия стабильности действий. Коротко опишем их. Обозначим через $\Theta(\mathrm{G}, X)$ полугруппу, состоящую из старших весов простых G-модулей, входящих в $\Bbbk[X]$, а через λ^* — старший вес двойственного к $V(\lambda)$ модуля. Для стабильности диагонального действия $\mathrm{G} : X \times Y$ достаточно, чтобы множество $\Theta(\mathrm{G}, X) - \Theta(\mathrm{G}, Y)^*$ было группой[5]. Из этого утверждения следует, что если действие $\mathrm{G} : X$ можно продолжить до действия некоторой бóльшей связной редуктивной группы $\mathrm{R} : X$, то для стабильности действия $\mathrm{G} : X$ достаточно, чтобы множество $\Theta(\mathrm{R}, X) - \Theta(\mathrm{R}, \mathrm{R} / \mathrm{G})$ было группой. Данные утверждения будут играть решающую роль в доказательстве стабилизации диагональных действий $\mathrm{G} : X \times \cdots \times X$ при увеличении числа копий X.

Одной из задач, которые будут интересовать нас в диссертации, является вопрос о стабильности диагональных действий. Доказанная И. В. Аржан-

[4]В. Л. Попов: Критерий стабильности действия полупростой группы на факториальном многообразии. Известия АН СССР 34 (1970), 523–531.

[5]E. B. Vinberg: On stability of actions of reductive algebraic groups. In: Lie Algebras, Rings and Related Topics, eds. Fong Yuen, A. A. Mikhalev, E. Zelmanov, Springer-Verlag, Hong Kong, 2000, 188–202.

цевым теорема[6] показывает, что всякое действие полупростой группы G на аффинном многобразии X становится стабильным при переходе к диагональному действию на достаточно большом числе копий X. Мы покажем, в частности, что количество копий X, необходимое для получения стабильного действия, ограничено сверху числом, зависящим *только* от группы G.

Одной из задач диссертации является изучение многообразий двойных смежных классов, возникающих из действий максимального тора классической группы G на аффинных сферических однородных пространствах G / H. Сферические однородные пространства также возникают при построении нижних оценок на индексы стабильности простых групп G.

Определение. Подгруппа $\mathrm{H} \subseteq \mathrm{G}$ называется *сферической* (а однородное пространство G / H — *сферическим*), если действие борелевской подгруппы $\mathrm{B} \subset \mathrm{G}$ на G / H левыми сдвигами имеет открытую орбиту.

Пусть G — редуктивная алгебраическая группа. Рассмотрим изотипное разложение алгебры $\Bbbk[\mathrm{G} / \mathrm{H}] = \Bbbk[\mathrm{G}]^{\mathrm{H}}$

$$\Bbbk[\mathrm{G} / \mathrm{H}] = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda_+(\mathrm{G})} \Bbbk[\mathrm{G} / \mathrm{H}]_\lambda,$$

где $\Lambda_+(\mathrm{G})$ — множество доминантных весов группы G, а $\Bbbk[\mathrm{G} / \mathrm{H}]_\lambda$ — сумма всех простых подмодулей $\Bbbk[\mathrm{G} / \mathrm{H}]$, изоморфных простому G-модулю со старшим весом λ; множество тех весов λ, для которых изотипная компонента $\Bbbk[\mathrm{G} / \mathrm{H}]_\lambda$ ненулевая, называется *спектром* представления G в алгебре $\Bbbk[\mathrm{G} / \mathrm{H}]$. Если многобразие G / H квазиаффинно, то условие сферичности H эквивалентно тому, что спектр представления $\mathrm{G} : \Bbbk[\mathrm{G} / \mathrm{H}]$ прост, т. е. каждый простой G-модуль входит в $\Bbbk[\mathrm{G} / \mathrm{H}]$ с кратностью 0 или 1.

Известно, что сферичность однородного пространства G / H является локальным свойством, т. е. зависит только от касательных алгебр $\mathrm{Lie}\,\mathrm{G}$ и $\mathrm{Lie}\,\mathrm{H}$.

В качестве примеров сферических однородных пространств приведём (алгебраические) симметрические пространства, т. е. однородные пространства G / H, где H — подгруппа неподвижных точек инволютивного автоморфизма группы G, и орисферические однородные пространства G / Q, где Q — подгруппа, содержащая максимальную унипотентную подгруппу группы G.

[6] И. В. Аржанцев: О стабильности диагональных действий. Математические заметки 71:6 (2002), 803–806.

Теория сферических однородных пространств является одним из наиболее разработанных разделов теории алгебраических групп преобразований. Сферические однородные пространства интенсивно изучались многими авторами с различных точек зрения начиная с 80-х годов прошлого века и продолжают активно изучаться в настоящее время. Обзор различных направлений исследования сферических однородных пространств, а также достигнутых по этим направлениям результатов можно найти в монографии Д. А. Тимашёва[7].

Будем говорить, что G-многообразие X *сферично*, если оно содержит сферическое однородное пространство в качестве плотной орбиты. Важным для нас примером сферических многообразий являются определённые Э. Б. Винбергом и В. Л. Поповым[8] конусы старших векторов (или HV-многообразия). *HV-многообразием* называется замыкание орбиты старшего вектора в простом G-модуле. Отметим, что стабилизатор всякой точки на HV-многообразии содержит максимальную унипотентную группу, т. е. HV-многообразия являются примерами орисферических многообразий. В главе 1 мы покажем, что HV-многообразия являются "плохими" с точки зрения вопроса о стабилизации диагонального действия: нижние оценки на индексы стабильности простых групп получаются именно при рассмотрении подходящих HV-многообразий.

В главах 2 и 3 диссертации изучаются категорные факторы специального вида, которые возникают при рассмотрении двойных смежных классов в алгебраических группах.

Определение. Пусть G — аффинная алгебраическая группа, а F и H — её замкнутые подгруппы. *Многообразие двойных смежных классов* $\mathrm{F} \backslash\backslash \mathrm{G} /\!/ \mathrm{H}$ — это подлежащее пространство категорного фактора для действия группы $\mathrm{F} \times \mathrm{H}$ на группе G, заданного формулой $(f, h) \circ g = fgh^{-1}$.

Для таких категорных факторов мы рассматриваем два вопроса — когда он существует, и когда изоморфен аффинному пространству.

Если подгруппы F и H редуктивны, то ответ на вопрос о существовании многообразия двойных смежных классов положителен: $\mathrm{F} \backslash\backslash \mathrm{G} /\!/ \mathrm{H}$ совпадает со

[7] D. A. Timashev: Homogeneous spaces and equivariant embeddings. Encyclopaedia of Mathematical Sciences 138, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 2011.

[8] Э. Б. Винберг, В. Л. Попов: Об одном классе квазиоднородных аффинных многообразий. Известия АН СССР 36 (1972), 749–764.

спектром алгебры ${}^{\mathrm{F}}\Bbbk\,[\mathrm{G}]^{\,\mathrm{H}}$ регулярных функций на G, инвариантных относительно описанного действия $\mathrm{F}\times\mathrm{H}$. Если дополнительно группа G редуктивна, то $\mathrm{F}\backslash\!\backslash\mathrm{G}/\!/\,\mathrm{H}$ параметризует типичные (F,H)-смежные классы. Если же не требовать редуктивности подгрупп F и H, то даже существование многообразия $\mathrm{F}\backslash\!\backslash\mathrm{G}/\!/\mathrm{H}$ гарантировать нельзя. Описанию явлений, возникающих в данном случае, посвящена глава 2. В этой же главе установлено, что при естественных и достаточно общих ограничениях на подгруппы F и H существует конструктивное пространство двойных смежных классов $\mathrm{F}\backslash\!\backslash\mathrm{G}/\!/\mathrm{H}$.

Интересно сравнить свойства действий $\{e\}\times\mathrm{H}:\mathrm{G}$, приводящих к однородным пространствам, и свойства действий $\mathrm{F}\times\mathrm{H}:\mathrm{G}$, приводящих к многообразиям двойных смежных классов — какие из свойств действий $\mathrm{H}:\mathrm{G}$ сохраняются, а какие нет? Например, все орбиты действия $\mathrm{H}:\mathrm{G}$ замкнуты; действия $\mathrm{F}\times\mathrm{H}$ сохраняют это свойство для типичных орбит[9] (если F, H и G редуктивны). Некоторые же свойства существенно меняются. Например, Х. Крафт и В. Л. Попов показали[10], что если группы $\mathrm{H}\subsetneq\mathrm{G}$ редуктивны, то однородное пространство $\mathrm{G}\,/\,\mathrm{H}$ не может быть изоморфно аффинному пространству[11]. В то же время несложно видеть, что аффинным пространством оказывается $\mathrm{T}\backslash\!\backslash\mathrm{SL}_4/\!/\mathrm{Sp}_4$, где T — максимальный тор SL_4. Если не требовать редуктивности подгрупп F и H, то можно построить много таких примеров. Если подгруппы F и H превосходны, то многообразие $\mathrm{F}\backslash\!\backslash\mathrm{G}/\!/\mathrm{H}$ является аффинным пространством[12]. Напомним, что сферическая подгруппа $\mathrm{H}\subseteq\mathrm{G}$ называется *превосходной*, если весовая полугруппа $\Theta(\mathrm{G},\mathrm{G}\,/\,\mathrm{H})$ порождена непересекающимися линейными комбинациями фундаментальных весов, т. е. каждый фундаментальный вес входит в разложение не более одной образующей.

Приведённые примеры подводят к вопросу об описании троек $\mathrm{F},\mathrm{H}\subset\mathrm{G}$ со свободной алгеброй ${}^{\mathrm{F}}\Bbbk[\mathrm{G}]^{\mathrm{H}}$. Схожая задача уже рассматривалась для линей-

[9] D. Luna: Sur les orbites fermées des groupes algébriques réductifs. Inventiones Mathematicae 16 (1972), 1–5.

[10] H. Kraft, V. L. Popov: Semisimple group actions on the three dimensional affine space are linear. Commentarii Mathematici Helvetici 60 (1985), 466–479.

[11] Здесь существенно требование того, что характеристика основного поля равна нулю. При $\mathrm{char}\,\Bbbk=2$ имеется пример транзитивного действия $\mathrm{SL}_2:\mathbb{A}^2$. Об этом примере автора известил профессор В. ван дер Каллен.

[12] Э. Б. Винберг, С. Г. Гиндикин: Вырождение орисфер в сферических однородных пространствах. Не опубликовано.

ных представлений редуктивных групп[3]. Например, Э. Б. Винберг, В. Г. Кац и В. Л. Попов получили полную классификацию простых G-модулей простых групп, имеющих свободную алгебру $\Bbbk[V]^{\mathrm{G}}$. Как оказалось[3], свободная порождённость алгебры $\Bbbk[V]^{\mathrm{G}}$ для таких модулей равносильна другим хорошим свойствам действия $\mathrm{G} : V$, а именно, равноразмерности морфизма факторизации $\pi : V \to V /\!/ \mathrm{G}$, наличию лишь конечного числа G-орбит в каждом слое π и, наконец, нетривиальности стабилизатора точки общего положения. Для многообразий двойных смежных классов аналогичная классификация неизвестна. В главе 3 мы рассмотрим вопрос о классификации многообразий $\mathrm{F}\backslash\!\backslash\mathrm{G}/\!/\mathrm{H}$ со свободной алгеброй ${}^{\mathrm{F}}\Bbbk[\mathrm{G}]^{\mathrm{H}}$ в случае, когда G — классическая группа, $\mathrm{H} \subset \mathrm{G}$ — связная редуктивная сферическая подгруппа и $\mathrm{F} \subset \mathrm{G}$ — максимальный тор.

Цель работы

1. Исследовать стабилизацию диагональных действий полупростых групп G и получить оценки на количество копий G-многообразия, необходимое для получения стабильного диагонального действия.

2. Привести примеры несуществования многообразия двойных смежных классов $\mathrm{F}\backslash\!\backslash\mathrm{G}/\!/\mathrm{H}$.

3. Провести классификацию троек $(\mathrm{G}, \mathrm{T}, \mathrm{H})$, где G — классическая линейная группа, $\mathrm{T} \subset \mathrm{G}$ — максимальный тор, $\mathrm{H} \subset \mathrm{G}$ — связная редуктивная сферическая подгруппа, для которых многообразие двойных смежных классов $\mathrm{T}\backslash\!\backslash\mathrm{G}/\!/\mathrm{H}$ является аффинным пространством (эквивалентно, алгебра ${}^{\mathrm{T}}\mathbb{C}[\mathrm{G}]^{\mathrm{H}}$ свободна).

Научная новизна

Результаты диссертации являются новыми, получены автором самостоятельно, и заключаются в следующем.

1. Найдены оценки на число копий G-многообразия полупростой группы G, необходимое для получения стабильного диагонального действия, причём эти оценки зависят от группы G, а не от G-многообразия.

2. Построены примеры троек $H, F \subset G$ линейных алгебраических групп, для которых категорный фактор $F\backslash\!\backslash G/\!/H$ не существует в категории алгебраических многообразий и найдены некоторые достаточные условия его существования в категории конструктивных пространств.

3. Получен критерий того, что многообразие двойных смежных классов $T\backslash\!\backslash G/\!/H$ (где G — классическая простая алгебраическая группа, $T \subset G$ — максимальный тор и $H \subset G$ — связная редуктивная сферическая подгруппа) является аффинным пространством и найдены все тройки (G, T, H) с таким свойством.

Основные методы исследования

В диссертации используются методы алгебраической геометрии, теории представлений, теории алгебраических групп и теории инвариантов.

Теоретическая и практическая ценность работы

Полученные в диссертации результаты имеют теоретическое значение. Они могут найти применение в теории алгебраических групп преобразований и теории инвариантов.

Апробация работы

Результаты диссертации докладывались:

1 на научно-исследовательском семинаре "Группы Ли и теория инвариантов" кафедры высшей алгебры Механико-математического факультета МГУ (под руководством Э. Б. Винберга, А. Л. Онищика, И. В Аржанцева и Д. А. Тимашёва) в период с 2009 по 2012 год (неоднократно);

2 на второй международной школе-конференции "Алгебры Ли, алгебраические группы и теория инвариантов" (Москва, МГУ, февраль 2011 г.).

3 на семинаре по теории представлений кафедры высшей алгебры Механико-математического факультета МГУ (под руководством Ю. А. Неретина) в 2012 году;

Публикации

Основные результаты диссертации опубликованы в трёх работах автора. Список работ приводится в конце автореферата [1–3].

Структура и объём диссертации

Диссертация состоит из введения, трёх глав и списка литературы. Главы разбиты на параграфы, параграфы — на пункты. Список литературы включает 44 наименования. Общий объём диссертации составляет 72 страницы.

Краткое содержание работы

Во введении приводятся основные понятия, обсуждается история вопроса, формулируются основные результаты диссертации, а также освещается их место в современной теории алгебраических групп преобразований и теории инвариантов.

Первая глава посвящена вопросу о стабильности диагональных действий полупростых групп и его связи с вопросом о существовании инвариантов в тензорных степенях линейных представлений.

Определение. Пусть G — связная полупростая алгебраическая группа. Обозначим

- $s_m(\mathrm{G})$ — *индекс метастабильности группы* G — такое минимальное натуральное число, что для любого аффинного многообразия X с эффективным действием группы G диагональное действие G на произведении $s_m(\mathrm{G})$ экземпляров X стабильно;

- $s(G)$ — *индекс стабильности группы* G — такое минимальное натуральное число, что для любого аффинного многообразия X с эффективным действием группы G и для любого натурального $k \geq s(\mathrm{G})$ диагональное действие $\mathrm{G} : X^k$ стабильно.

Определение. Пусть G — связная алгебраическая группа. Положим

$$M(\mathrm{G}) := \Big\{ n \in \mathbb{N} \mid \big(V^{\otimes n}\big)^{\mathrm{G}} \neq \{0\} \text{ для любого ненулевого рационального } \mathrm{G}\text{-модуля } V \Big\}.$$

Обозначим через $m(\mathrm{G})$ минимальный элемент полугруппы $M(\mathrm{G})$.

Теорема 1. *Полугруппы $M(G)$ для простых односвязных групп* G *имеют вид:*

Группа G	M(G)	*Группа* G	M(G)
SL_n	$n\mathbb{N}$	G_2	$\{n \in \mathbb{N} \mid n \geq 2\}$
Spin_{2n+1}	$2\mathbb{N}$	F_4	$\{n \in \mathbb{N} \mid n \geq 2\}$
Spin_{4n+2}	$4\mathbb{N}$	E_6	$3\mathbb{N}$
Spin_{4n+4}	$2\mathbb{N}$	E_7	$2\mathbb{N}$
Sp_{2n}	$2\mathbb{N}$	E_8	$\{n \in \mathbb{N} \mid n \geq 2\}$

Утверждение 1. *Пусть* G *— связная аффинная алгебраическая группа,* G^u *— её унипотентный радикал и* $\mathrm{H} = \mathrm{G} \big/ \mathrm{G}^u$*. Тогда* $M(\mathrm{G}) = M(\mathrm{H})$*.*

Легко видеть, что если редуктивная группа G имеет нетривиальный центральный тор, то $M(\mathrm{G}) = \emptyset$, поэтому в действительности данное утверждение сводит вычисление полугруппы $M(\mathrm{G})$ к случаю полупростой группы G.

Утверждение 2. *Пусть группа* $\mathrm{G} = \mathrm{G}_1 \times \mathrm{G}_2$ *является прямым произведением полупростых групп* G_1 *и* G_2*. Тогда* $M(\mathrm{G}) = M(\mathrm{G}_1) \cap M(\mathrm{G}_2)$*.*

Вычисление полугруппы $M(\mathrm{G})$ для односвязных простых групп G оказывается связанным с задачей описания уравновешенных наборов в группе Вейля системы корней касательной алгебры группы G.

Определение 1. Пусть $\mathcal{W}$ — группа Вейля, соответствующая группе G. Будем говорить, что набор её элементов $w_1, \ldots, w_k \in \mathcal{W}$ *уравновешен*, если $w_1 + \cdots + w_k = 0$ (сумма здесь понимается как сумма линейных операторов, действующих в $\mathbb{Q}$-линейной оболочке корней группы G).

Теорема 2. *Пусть $\mathcal{W}$ — группа Вейля системы корней касательной алгебры простой группы* G*. Группа $\mathcal{W}$ обладает уравновешенным набором из m элементов тогда и только тогда, когда $m \in M(\mathrm{G})$.*

Основным результатом первой главы являются оценки индексов стабильности.

Теорема 3. *Для односвязной простой группы* G *имеем* $m(\mathrm{G}) \leq s_m(\mathrm{G})$*.*

Теорема 4. *Пусть $e(\mathrm{G})$ — такое натуральное число, что для любого аффинного многообразия X с эффективным действием* G *действие* $\mathrm{G} : X^{e(\mathrm{G})}$ *имеет конечный стабилизатор общего положения. Тогда выполнена оценка* $s(\mathrm{G}) \leq e(\mathrm{G})m(\mathrm{G})$*.*

Теорема 4 является прямым следствием доказательства теоремы о стабилизации диагонального действия полупростой группы[6]. Отметим, что число $e(\mathrm{G})$ существует и не превосходит размерности группы G. Теорема 3 доказывается путём предъявления G-многообразий X, для которых диагональные действия стабилизируются только при рассмотрении $m(\mathrm{G})$ копий многообразия X.

Теорема 5. *Пусть* G *— связная полупростая, но не обязательно односвязная аффинная алгебраическая группа, все линейные представления которой самосопряжены. Тогда* $s_m(G) = m(G)$.

Во **второй главе** рассматривается вопрос о существовании многообразия двойных смежных классов. В случае, когда подгруппы F и H редуктивны, многообразие $\mathrm{F}\backslash\backslash\mathrm{G}/\!/\mathrm{H}$ существует, причём оно аффинно и точки $\mathrm{F}\backslash\backslash\mathrm{G}/\!/\mathrm{H}$ параметризуют замкнутые двойные смежные классы. В случае нередуктивных подгрупп F и H мы приводим примеры:

I. унипотентной группы G и её подгруппы U таких, что действие $\mathrm{U}\times\mathrm{U}$ на G не допускает категорного фактора, т. е. многообразие $\mathrm{U}\backslash\backslash\mathrm{G}/\!/\mathrm{U}$ не существует;

II. редуктивной группы G и двух её подгрупп F и H таких, что многообразие $\mathrm{F}\backslash\backslash\mathrm{G}/\!/\mathrm{H}$ не существует;

III. полупростой группы G и двух её подгрупп F и H, для которых алгебра $\mathrm{F}\times\mathrm{H}$-инвариантных регулярных функций $R = {}^{\mathrm{F}}\Bbbk[\mathrm{G}]^{\mathrm{H}}$ конечно порождена и естественный морфизм $\pi : \mathrm{G} \to \operatorname{Spec} R$ сюръективен, но не является категорным фактором.

Как отмечалось выше, замена категории алгебраических многообразий на категорию конструктивных пространств расширяет класс действий, обладающих категорным фактором. Мы показываем, что при достаточно общих предположениях о подгруппах F и H существует конструктивное пространство двойных смежных классов $\mathrm{F}\backslash\backslash\mathrm{G}/\!/\mathrm{H}$.

Утверждение 3. *Пусть* G *— связная аффинная алгебраическая группа,* $\mathrm{F}, \mathrm{H} \subseteq \mathrm{G}$ *— связные замкнутые подгруппы, которые не имеют нетривиальных характеров. Предположим, что алгебра* ${}^{\mathrm{F}}\Bbbk[\mathrm{G}]^{\mathrm{H}}$ *конечно порождена,* *и обозначим через* $\pi : \mathrm{G} \to \mathrm{Spec}({}^{\mathrm{F}}\Bbbk[\mathrm{G}]^{\mathrm{H}})$ *морфизм, отвечающий вложению алгебр* ${}^{\mathrm{F}}\Bbbk[\mathrm{G}]^{\mathrm{H}} \subseteq \Bbbk[\mathrm{G}]$. *Тогда* $\mathrm{F}\backslash\!\backslash\mathrm{G}/\!/\mathrm{H}$ *существует как конструктивное пространство и отображение* $\pi : \mathrm{G} \to \pi(\mathrm{G})$ *является конструктивным фактором для действия* $\mathrm{F} \times \mathrm{H} : \mathrm{G}$.

В **третьей главе** проводится классификация троек $(\mathrm{G}, \mathrm{T}, \mathrm{H})$, где G — классическая линейная группа, $\mathrm{T} \subset \mathrm{G}$ — максимальный тор, $\mathrm{H} \subset \mathrm{G}$ — связная редуктивная сферическая подгруппа, для которых многообразие двойных смежных классов $\mathrm{T}\backslash\!\backslash\mathrm{G}/\!/\mathrm{H}$ является аффинным пространством (эквивалентно, алгебра ${}^{\mathrm{T}}\mathbb{C}[\mathrm{G}]^{\mathrm{H}}$ свободна).

Глава начинается с установления общих фактов, касающихся многообразий двойных смежных классов. Они имеют бóльшую общность, чем нужно для решения поставленной задачи, и могут представлять самостоятельный интерес.

Определение. Будем говорить, что подгруппы F и H *имеют максимальное пересечение*, если для всякого $g \in \mathrm{G}$ размерность $g\,\mathrm{F}\,g^{-1} \cap \mathrm{H}$ не превосходит размерности $\mathrm{F} \cap \mathrm{H}$.

Несложно видеть, что при работе с многообразиями двойных смежных классов можно ограничиться рассмотрением подгрупп с максимальным пересечением. Такие подгруппы обладают рядом полезных свойств.

Утверждение 4. *Пусть* G *— связная редуктивная подгруппа,* $\mathrm{F} \subseteq \mathrm{G}$ *— её максимальный тор (соотв., максимальная унипотентная или борелевская подгруппа). Если* $\mathrm{H} \subseteq \mathrm{G}$ *— ещё одна подгруппа, имеющая максимальное пересечение с* F*, то* $\mathrm{H} \cap \mathrm{F}$ *является максимальным тором (соотв., максимальной унипотентной или борелевской подгруппой) в* H.

Утверждение 5. *Предположим, что редуктивные подгруппы* $\mathrm{F}, \mathrm{H} \subset \mathrm{G}$ *имеют максимальное пересечение. Тогда двойной смежный класс* $\mathrm{F}\,\mathrm{H}$ *замкнут в* G*, а пересечение* $\mathrm{F} \cap \mathrm{H}$ *является редуктивной подгруппой.*

Для того, чтобы отбросить многообразия двойных смежных классов, которые заведомо не могут быть изоморфны аффинному пространству, мы указываем на них особые точки. Для этого оказывается полезным следующее утверждение.

Утверждение 6. *Пусть* $\mathrm{F}, \mathrm{H} \subseteq \mathrm{G}$ *— редуктивные подгруппы и* $\pi : \mathrm{G} \to \mathrm{F}\backslash\!\backslash \mathrm{G}/\!/\mathrm{H}$ *— морфизм факторизации. Предположим, что двойной смежный класс* $\mathrm{F}\,\mathrm{H}$ *замкнут в* G. *Пусть* Z *— категорный фактор для действия* $\mathrm{F} \cap \mathrm{H} : \mathrm{Lie}\,\mathrm{G} \,/\, (\mathrm{Lie}\,\mathrm{F} + \mathrm{Lie}\,\mathrm{H})$, *индуцированного присоединённым действием* $\mathrm{F} \cap \mathrm{H}$ *на* $\mathrm{Lie}\,\mathrm{G}$. *В этом случае точка* $\pi(e) \in \mathrm{F}\backslash\!\backslash \mathrm{G}/\!/\,\mathrm{H}$ *является гладкой тогда и только тогда, когда* Z *— аффинное пространство.*

Перейдём к основным результатам третьей главы.

Теорема 6 (критерий свободности)**.** *Пусть* G *— классическая группа,* $\mathrm{T} \subset \mathrm{G}$ *— её максимальный тор,* $\mathrm{H} \subset \mathrm{G}$ *— связная редуктивная сферическая подгруппа и* $\pi : \mathrm{G} \to \mathrm{T}\backslash\!\backslash \mathrm{G}/\!/\mathrm{H}$ *— морфизм факторизации. Многообразие двойных смежных классов* $\mathrm{T}\backslash\!\backslash \mathrm{G}/\!/\mathrm{H}$ *является аффинным пространством тогда и только тогда, когда образ* $\pi(e)$ *единичного элемента группы является гладкой точкой.*

Теорема 6 по своей формулировке повторяет критерий свободной порождённости алгебры инвариантов линейного представления редуктивной группы[3].

Теорема 7 (теорема классификации)**.** *Пусть* G *— классическая группа,* $\mathrm{T} \subset \mathrm{G}$ *— её максимальный тор и* $\mathrm{H} \subset \mathrm{G}$ *— связная редуктивная сферическая подгруппа. Многообразие двойных смежных классов* $\mathrm{T}\backslash\!\backslash \mathrm{G}/\!/\mathrm{H}$ *является аффинным пространством тогда и только тогда, когда* G *и* H *входят в следующий список:*

G	H	$\dim \mathrm{T}\backslash\!\backslash \mathrm{G}/\!/\mathrm{H}$
SL_{n+1}	$\mathrm{S}\,(\mathrm{GL}_n \times \mathrm{GL}_1)$	n
SL_4	Sp_4	2
SO_{2n+1}	SO_{2n}	n
SO_{2n}	SO_{2n-1}	$n-1$
SO_4	GL_2	1
SO_8	Spin_7	3
SO_6	GL_3	3
SO_4	$\mathrm{SO}_2 \times \mathrm{SO}_2$	2
SO_3	GL_1	1
Sp_4	$\mathrm{Sp}_2 \times \mathrm{Sp}_2$	2

Для получения списка, приведённого в теореме 7, мы сначала отбрасываем многообразия $\mathrm{T}\backslash\backslash\mathrm{G}/\!/\mathrm{H}$, которые имеют негладкую точку $\pi(e)$, а в оставшихся случаях проверяем, что $\mathrm{T}\backslash\backslash\mathrm{G}/\!/\mathrm{H}$ изоморфно аффинному пространству.

Благодарности

Я выражаю глубокую благодарность своему научному руководителю доктору физико-математических наук И. В. Аржанцеву за постановку задач, многочисленные обсуждения и постоянное внимание к работе. Отдельную благодарность я хотел бы высказать профессору Э. Б. Винбергу и доценту Д. А. Тимашёву, которые сыграли важную роль в моём образовании. Благодарю весь коллектив кафедры высшей алгебры Механико-математического факультета МГУ имени М. В. Ломоносова за творческую атмосферу.

Публикации автора по теме диссертации

(*из списка ВАК*)

[1] А. Б. Анисимов: Стабильность диагональных действий и тензорные инварианты. Математический сборник 203:4 (2012), 47 – 60.

[2] A. Anisimov: Spherical subgroups and double coset varieties. Journal of Lie Theory 22 (2012), no. 2, 505–522.

(*не из списка ВАК*)

[3] А. Б. Анисимов: Стабильность диагональных действий и тензорные инварианты. Вторая школа-конференция “Алгебры Ли, алгебраические группы и теория инвариантов”. Москва, Россия, 31 января – 5 февраля 2011 г. Тезисы докладов. Москва: Изд-во “Ол Би Принт”, 2011, 6–8.